Processos de Markov a Tempo Contínuo e Sistemas de Partículas
Parte 1

Leandro Cioletti
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
cioletti@mat.unb.br

Ricardo Parreira
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
rpsilva@unb.br

8 de fevereiro de 2017

Resumo

Nestas notas de aula apresentamos um problema de Teoria Ergódica que será uma das nossas principais motivações para o estudo de uma certa classe de processos de Markov.

Este texto é baseado em resultados clássicos da literatura de Formalismo Termodinâmico e nenhum conteúdo apresentado aqui é original.

1 Preliminares

Neste texto $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos inteiros positivos, (M, d) será sempre um espaço métrico compacto arbitrário e $\mathcal{X} \equiv M^{\mathbb{N}}$. Podemos pensar em $\mathcal{X}$ como o conjunto de todas as sequências tomando valores em M e representaremos um elemento génerico $x \in \mathcal{X}$ da seguinte forma $x = (x_1, x_2, \ldots)$, onde $x_i \in M$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Vamos munir $\mathcal{X}$ da métrica $d_{\mathcal{X}}$, definida para cada par de pontos $x, y \in \mathcal{X}$ pela seguinte expressão

$$d_{\mathcal{X}}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Exercício 1. *Mostre que a topologia induzida por $d_{\mathcal{X}}$ coincide com a topologia produto de $\mathcal{X} = M^{\mathbb{N}}$.*

Segue do fato enunciado no exercício acima e do Teorema de Tychonof que $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ é um espaço métrico compacto.

Vamos denotar por $C(\mathcal{X})$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas em $\mathcal{X}$ e tomando valores em $\mathbb{R}$. Já que $\mathcal{X}$ é compacto a aplicação $f \mapsto \sup\{|f(x)| : x \in \mathcal{X}\} \equiv \|f\|_\infty$ define uma norma em $C(\mathcal{X})$ e $(C(\mathcal{X}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Para cada $\alpha \in (0,1)$ denotamos por $C^\alpha(\mathcal{X})$ o conjunto das funções reais α-Hölder contínuas, isto é, o conjunto de todas as funções $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathcal{X}\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{d^\gamma(x,y)} \equiv \mathrm{Hol}(f) < \infty.$$

Um potencial contínuo é simplesmente uma função contínua $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Vamos considerar também uma dinâmica em $\mathcal{X}$ dada pela aplicação de deslocamento para esquerda $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (também conhecida como *shift*), definida por

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Qualquer espaço métrico (M,d) tem uma estrutura natural de espaço mensurável em que os conjuntos mensuráveis são os elementos da σ-álgebra gerada pelas abertos de M. Esta σ-álgebra é chamada de σ-álgebra de Borel de M e denotada por $\mathscr{B}(M)$. O suporte de uma medida de probabilidade $p : \mathscr{B}(M) \to [0,1]$, notação $\mathrm{supp}(p)$ é o conjunto formado pelos pontos $m \in M$ tais que $p(V) > 0$, para qualquer vizinhança V contendo m.

Exercício 2. *Seja (M,d) espaço métrico compacto e $p : \mathscr{B}(M) \to [0,1]$ uma medida de probabilidade. Mostre que* $\mathrm{supp}(p)$ *é sempre um subconjunto compacto de M.*

2 Operador de Ruelle

Com intuito de definir o operador de Ruelle, no contexto desta notas, vamos fixar uma medida de probabilidade $p : \mathscr{B}(M) \to [0,1]$, que será chamada de uma *medida a priori*. Daqui em diante, vamos assumir sempre que $\mathrm{supp}(p) = M$. Esta hipótese está relacionada à questões técnicas da prova de um resultado que vamos enunciar mais a frente e na maioria das aplicações esta condição é naturalmente satisfeita. Por exemplo, se M é um conjunto finito, tomamos p como sendo a medida de contagem normalizada. Já no caso em que M é um grupo compacto tomamos p como sendo a sua medida de Haar.

Fixada uma medida a priori p, definida sobre $\mathscr{B}(M)$, o operador de Ruelle associado a um potencial f é o operador linear $\mathscr{L}_f : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ que associa a cada função $\varphi \in C(\mathcal{X})$ uma função $\mathscr{L}_f(\varphi)$ que para cada $x \in \mathcal{X}$ é definida pela seguinte expressão

$$\mathscr{L}_f(\varphi)(x) = \int_M \exp(f(ax))\varphi(ax)\, dp(a), \quad \text{onde } ax \equiv (a, x_1, x_2, \ldots). \tag{1}$$

Exercício 3. *Fixada $f \in C(\mathcal{X})$. Mostre que a aplicação $x \mapsto \mathscr{L}_f(\varphi)(x)$ define uma função em $C(\mathcal{X})$, para qualquer $\varphi \in C(\mathcal{X})$.*

Um operador linear $T : C(X) \to C(X)$ é chamado de positivo se para toda função contínua $\varphi \geq 0$ temos que $T(\varphi) \geq 0$.

Exercício 4. *Mostre que todo operador linear positivo $T : C(X) \to C(X)$ é limitado. Isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que $\|T(\varphi)\|_\infty \leq K\|\varphi\|_\infty$.*

Exercício 5. *Mostre que o operador de Ruelle $\mathscr{L}_f$, associado a qualquer potencial contínuo f é um operador positivo. Conclua que o operador $\mathscr{L}_f : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é um operador limitado.*

Vamos denotar por $C(\mathcal{X})^*$ o dual topológico de $C(\mathcal{X})$, isto é, o espaço de todos os funcionais lineares limitados definidos sobre $C(\mathcal{X})$. A cada operador linear limitado $T : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ está associado um operador linear $T^* : C(\mathcal{X})^* \to C(\mathcal{X})^*$, chamado de operador transposto de T, que satisfaz para todo $\mu \in C(\mathcal{X})^*$ e $\varphi \in C(\mathcal{X})$ a seguinte igualdade $T^*(\mu)(\varphi) = \mu(T(\varphi))$.

Usando o teorema de Riesz-Markov podemos caracterizar o dual topológico de $C(\mathcal{X})$ e ter também uma representação concreta do operador transposto do operador de Ruelle.

Antes de prosseguir introduzimos mais uma notação, $\mathscr{M}_s(\mathcal{X})$, que será usada para designar o espaço das medidas sinaladas definidas sobre os borelianos de $\mathcal{X}$.

Teorema 6 (Riesz-Markov)**.** *Para cada funcional linear limitado $F : C(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ existe uma única medida sinalada $\mu \in \mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ tal que*

$$F(\varphi) = \int_{\mathcal{X}} \varphi \, d\mu, \quad \forall \varphi \in C(\mathcal{X})$$

Além do mais, se $F(\varphi) \geq 0$ para toda função contínua $\varphi \geq 0$ (neste caso dizemos que F é positivo) então μ é uma medida. Se o funcional F é positivo e $F(1) = 1$, então temos que μ é uma medida de probabilidade.

Observe que a cada $\mu \in \mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ temos associado um único funcional linear limitado $F_\mu : C(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ dado por $F_\mu(\varphi) = \int_{\mathcal{X}} \varphi \, d\mu$. Esta observação juntamente com o Teorema de Riesz-Markov mostra que existe uma bijeção linear entre $C(\mathcal{X})^*$ e $\mathscr{M}_s(\mathcal{X})$. De maneira usual, definimos a norma de operadores de um funcional linear $F \in C(\mathcal{X})^*$ pela expressão $\|F\| = \sup\{|F(\varphi)| : \varphi \in C(\mathcal{X}) \text{ e } \|\varphi\|_\infty = 1\}$. O conjunto das medidas sinaladas $\mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ é também comumente visto como um espaço normado, com a norma da variação total $\|\cdot\|_T$ que é dada para cada $\mu \in \mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ pela expressão $\|\mu\|_T \equiv |\mu|(\mathcal{X}) = \mu^+(\mathcal{X}) + \mu^-(\mathcal{X})$, onde o par (μ^+, μ^-) é uma decomposição de Hahn-Jordan de μ. Munindo os espaços $C(\mathcal{X})^*$ e $\mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ com a normas de operadores e da variação total, respectivamente, podemos mostrar que a bijeção linear mencionada acima é na verdade uma isometria e portanto

$$(C(\mathcal{X})^*, \|\cdot\|) \simeq (\mathscr{M}_s(\mathcal{X}), \|\cdot\|_T).$$

Através do isomorfismo $C(\mathcal{X})^* \simeq \mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ podemos pensar em $\mathscr{L}_f^*$, o operador transposto do operador de Ruelle, como um operador linear que age no espaço das medidas sinaladas $\mathscr{M}_s(\mathcal{X})$. De fato, dada uma medida $\mu \in \mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ temos que $\mathscr{L}_f^*(\mu)$ é caraterizada como sendo a única medida sinalada satisfazendo

$$\int_{\mathcal{X}} \varphi \, d[\mathscr{L}_f^* \mu] = \int_{\mathcal{X}} \mathscr{L}_f(\varphi) \, d\mu, \quad \forall \varphi \in C(\mathcal{X}).$$

Por causa do isomorfismo $C(\mathcal{X})^* \simeq \mathscr{M}_s(\mathcal{X})$ frequentemente escrevemos $\mu(\varphi)$ ao invés de $F_\mu(\varphi)$. Com esta identificação podemos expressar a igualdade acima, usada para definir $\mathscr{L}_f^*\mu$, da seguinte maneira $\mathscr{L}_f^*(\mu)(\varphi) = \mu(\mathscr{L}_f(\varphi))$ que é exatamente como definimos o operador transposto algumas linhas acima.

Enunciamos a seguir um dos resultados mais importantes sobre o operador de Ruelle associado a um potencial f Hölder contínuo. Antes de apresentar este enunciado convidamos o leitor a verificar o seguinte fato.

Exercício 7. *Se f é um potencial α-Hölder contínuo para toda função $\varphi \in C^\alpha(\mathcal{X})$ temos que $\mathscr{L}_f(\varphi) \in C^\alpha(\mathcal{X})$ ou seja, $\mathscr{L}_f(C^\alpha(\mathcal{X})) \subset C^\alpha(\mathcal{X})$.*

Teorema 8 (Ruelle-Perron-Frobenius)**.** *Sejam (M, d) um espaço métrico compacto e $p : \mathscr{B}(M) \to [0, 1]$ uma medida de probabilidade (a priori) tal que* $\mathrm{supp}(p) = M$. *Para cada potencial $f \in C^\alpha(\mathcal{X})$ temos que:*

1. *existe um número real $\lambda_f > 0$, uma função positiva $h_f \in C^\alpha(\mathcal{X})$ e uma medida $\nu_f \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ tais que $\mathscr{L}_f h_f = \lambda_f h_f$, $\quad \nu_f(h_f) = 1$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \|\lambda_f^{-n} \mathscr{L}_f^n \varphi - \nu_f(\varphi) h_f\|_\infty = 0;$$

2. *o espectro da restrição $\mathscr{L}_f : C^\alpha(\mathcal{X}) \to C^\alpha(\mathcal{X})$, consiste de λ_f e de um subconjunto do plano complexo contido em um disco de raio estritamente menor que λ_f.*

A rigor λ_f, h_f e ν_f que aparecem no enunciado do teorema acima dependem da escolha da medida a priori p. Como não é nosso objetivo estudar a dependência destes, com respeito a p, optamos por omitir esta dependência na notação.

3 Principio Variacional da Pressão

Seguindo a referência [5], definimos a entropia de uma medida de probabilidade μ pela expressão

$$h(\mu) = \inf_{g \in C^\alpha(\mathcal{X})} \left\{ \log \lambda_g - \int_{\mathcal{X}} g \, d\mu \right\},$$

onde λ_g é o autovalor maximal do operador de Ruelle $\mathscr{L}_g$ agindo em $C^\alpha(\mathcal{X})$.

Observamos que sob certas hipóteses em M e na medida a priori p podemos mostrar que a entropia definida acima coincide com a entropia de Kolmogorov-Sinai, que é o conceito de entropia empregado em vários textos clássicos, para a formulação do princípio variacional da pressão topológica, veja [2, 6] para maiores detalhes.

Dizemos que uma medida μ sobre $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ é invariante pelo shift $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, se para todo $E \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ temos $\mu(\sigma^{-1}(E)) = \mu(E)$. O conjunto de todas as medidas de probabilidade definidas sobre $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ que são invariantes pelo shift é denotado por $\mathscr{M}_\sigma(\mathcal{X})$.

Alguns dos problemas centrais do Formalismo Termodinâmico estão relacionados ao seguinte problema variacional

$$\sup_{\nu \in \mathscr{M}_\sigma(\mathcal{X})} \left\{ h(\nu) + \int_{\mathcal{X}} f \, d\nu \right\}$$

onde f é um potencial contínuo fixado.

Uma medida $\mu \in \mathscr{M}_\sigma(\mathcal{X})$ é chamada de um *estado de equilíbrio* para um potencial f se ela realiza o supremo no problema variacional acima, isto é, se

$$h(\mu) + \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu = \sup_{\nu \in \mathscr{M}_\sigma(\mathcal{X})} \left\{ h(\nu) + \int_{\mathcal{X}} f \, d\nu \right\}. \tag{2}$$

Vamos argumentar a seguir que para todo potencial f contínuo o conjunto dos estados de equilíbrio para f é não-vazio. Para provar este fato vamos mostrar inicialmente que a aplicação $\mathscr{M}_1(\mathcal{X}) \ni \nu \mapsto h(\nu)$ é semicontínua superiormente. De fato, para cada $g \in C^\alpha(\mathcal{X})$ fixada, temos que a aplicação $\mathscr{M}_1(\mathcal{X}) \ni \nu \mapsto \log \lambda_g - \int_{\mathcal{X}} g \, d\nu$ é contínua. Daí segue que

$$\nu \mapsto \inf_{g \in C^\alpha(\mathcal{X})} \left\{ \log \lambda_g - \int_{\mathcal{X}} g \, d\nu \right\} \equiv h(\nu).$$

é semicontínua superiormente. Usando este fato podemos concluir que

$$\mathscr{M}_\sigma(\mathcal{X}) \ni \nu \mapsto h(\nu) + \int_{\mathcal{X}} f \, d\nu$$

é uma função semicontínua superiormente. Já que $\mathscr{M}_\sigma(\mathcal{X})$ é um subconjunto compacto e convexo na topologia fraca-$*$ segue do princípio do máximo de Bauer (veja [1, 4]) que existe uma medida $\mu \in \mathscr{M}_\sigma(\mathcal{X})$ realizando o supremo em (2), ou seja, μ é um estado de equilíbrio.

Apesar do argumento abstrato dado acima ser bastante geral. Informações mais finas como unicidade e caracterizações dos estados de equilíbrio exigem uma abordagem diferente. A seguir enunciamos um teorema que mostrar como construir um estado de equilíbrio para potencias Hölder contínuos usando informações da análise espectral do operador de Ruelle associado a este potencial. Além do mais no caso em que o potencial f é Hölder também é possível concluir que existe um único estado de equilíbrio e que esta medida é ergódica com respeito ao shift.

Teorema 9. *Sejam (M, d) espaço métrico compacto, $p : \mathscr{B}(M) \to [0, 1]$ uma medida de probabilidade a priori tal que* $\mathrm{supp}(p) = M$ *e f é um potencial α-Hölder contínuo. Então existe um único estado de equilíbrio μ_f para o potencial f. Além do mais $\mu_f = h_f \nu_f$, onde h_f e ν_f são dados pelo Teorema 8.*

No caso em que M é finito e p é a medida de contagem normalizada as referências mais clássicas para este resultado são o trabalho do Ruelle [7], onde o operador é introduzido, e a referência [6]. A prova deste teorema no caso em que $M = \mathbb{S}^1$ pode ser encontrada em [3] e no caso em que M é um espaço métrico compacto genérico este resultado é obtido em [5].

Um dos objetivos destas notas é apresentar a teoria de semi-grupos de Markov agindo em $C(\mathcal{X})$ a fim de apresentar uma maneira alternativa para construção de estados de equilíbrio.

Referências

[1] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite dimensional analysis*. Springer, Berlin, third edition, 2006. A hitchhiker's guide.

[2] V. Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000.

[3] A. T. Baraviera, L. Cioletti, A. O. Lopes, J. Mohr, and R. R. Souza. On the general one-dimensional XY model: positive and zero temperature, selection and non-selection. *Rev. Math. Phys.*, 23(10):1063–1113, 2011.

[4] J. Bell. Semicontinuous functions and convexity. *Lectures Notes - University of Toronto*, 2014.

[5] A. O. Lopes, J. K. Mengue, J. Mohr, and R. R. Souza. Entropy and variational principle for one-dimensional lattice systems with a general *a priori* probability: positive and zero temperature. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 35(6):1925–1961, 2015.

[6] W. Parry and M. Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, (187-188):268, 1990.

[7] D. Ruelle. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. *Comm. Math. Phys.*, 9:267–278, 1968.