Processos de Markov a Tempo Contínuo e Sistemas de Partículas

Parte 2

Leandro Cioletti
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
cioletti@mat.unb.br

Ricardo Parreira
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
rpsilva@unb.br

8 de fevereiro de 2017

Resumo

Nestas notas são apresentados alguns conceitos elementares da Teoria de Probabilidade. Apresentamos a construção da esperança condicional, do movimento Browniano e no final é dada a definição de Processo de Markov como uma família de medidas de probabilidade indexada em um determinado espaço métrico compacto. Todo material apresentado aqui pode ser encontrado em texto básicos de Teoria da Medida e Teoria de Probabilidade como [1, 2, 3, 4]. Para a parte de Processos de Markov da última seção utilizamos a referência [5].

1 Variáveis Aleatórias e Esperança

Nestas notas usamos a notação $\overline{\mathbb{R}}$ para representar o conjunto dos números reais extendido, isto é, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definição 1 (Variável Aleatória)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de medida e $\Lambda \in \mathcal{F}$. Uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathcal{F})$ (v.a.) é uma função $X : \Lambda \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que para todo $B \in \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ temos*

$$\{\omega \in \Lambda : X(\omega) \in B\} \in \Lambda \cap \mathcal{F},$$

onde $\Lambda \cap \mathcal{F}$ denota a coleção de todos os subconjuntos de Ω da forma $\Lambda \cap F$ com $F \in \mathcal{F}$.

Observação 2. *A definição nesta generalidade é necessária por razões técnicas em algumas aplicações, mas para a discussão das propriedades básicas de variáveis aleatórias, podemos supor que $\Lambda = \Omega$.*

Exercício 3. *Suponha que $\Lambda = \Omega$ na Definição 1. Mostre que uma variável aleatória é uma função $\mathcal{F}$-mensurável tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$.*

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Se $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma variável aleatória então vamos usar a notação

$$\mathbb{P}(X \in B) \equiv \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}).$$

Vamos usar a abreviação v.a. para nos referir a uma variável aleatória, assim ao invés de escrever $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma variável aleatória, vamos escrever simplesmente X é uma v.a.. Quando $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ vamos dizer que X é uma v.a. real.

Proposição 4. *Se X uma v.a. real em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ então $\mu : \mathcal{F} \to [0,1]$ dada por*

$$\mu(B) \equiv \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$$

é uma medida de probabilidade em $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Demonstração. Claramente $\mu(B) \geq 0$ para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Se $\{A_n\}$ é uma sequência de conjuntos mutuamente disjunta em $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ então $\{X^{-1}(A_n)\}$ é uma sequência mutuamente disjunta em Ω, portanto

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\end{aligned}$$

Já que $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$, temos que $\mu(\mathbb{R}) = 1$ e isto encerra a prova de que μ é uma medida de probabilidade. $\square$

A medida de probabilidade μ induzida pela v.a. real X, definida na proposição acima, é frequentemente denotada por

$$\mu = \mathbb{P} \circ X^{-1}.$$

Neste caso, a função distribuição F associada a medida μ é chamada **função distribuição de X**, mais especificamente

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Quando estivermos lidando com mais de uma v.a. usamos a notação F_X para indicar que estamos falando da função distribuição de X.

Teorema 5. *Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Se X é uma v.a. real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável (com respeito a σ-álgebra de Borel), então $f(X)$ é uma v.a. real.*

Demonstração. Segue das propriedades de composição de função que $(f(X))^{-1}(A) = (f \circ X)^{-1}(A) = X^{-1}(f^{-1}(A))$. Logo

$$(f \circ X)^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) = X^{-1}(f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))) = X^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}.$$

O que completa a demostração. $\square$

Definição 6 (Esperança de uma variável aleatória)**.** *Seja X uma variável aleatória em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $X^+ = \max\{0, X\}$ e $X^- = -\min\{0, X\}$ as partes positiva e negativa de X, respectivamente. Suponha que*

$$\int_\Omega X^+ \, d\mathbb{P} < +\infty \qquad e \qquad \int_\Omega X^- \, d\mathbb{P} < +\infty.$$

Então definimos a esperança da variável aleatória X como sendo

$$\mathbb{E}[X] \equiv \int_\Omega X \, d\mathbb{P}.$$

2 Independência

Independência é uma propriedade básica de eventos e variáveis aleatórias em vários modelos de probabilidade. A definição deste conceito é motivada pelo raciocínio intuitivo de que a ocorrência ou não de um evento não afeta nossa estimativa da probabilidade que um evento independente ocorra ou não. Apesar deste conceito ter um apelo intuitivo é importante entender que independência em Teoria da Probabilidade é um conceito técnico com uma definição precisa e que deve ser verificada em cada modelo específico que estiver sendo estudado.

Certamente existem exemplos de eventos dependentes que nossa intuição nos diz que eles devem ser dependentes e exemplos que nossa intuição diz que não devem ser independentes, mas que satisfazem a definição. Assim devemos recorrer sempre a definição para termos certeza sobre a independência de determinados eventos.

Definição 7. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade fixado. Os eventos A e B são ditos independentes se*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Definição 8. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade fixado. Dizemos que os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são independentes se*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i), \qquad \forall I \subset \{1, \ldots, n\}.$$

Deve se observar que a condição de independência de eventos $A_1, \ldots, A_n$ envolve a verificação de

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - n - 1$$

equações.

Definimos em seguida, o conceito de independência de uma quantidade finita de coleções de subconjuntos de um espaço de probabilidade. Em grande parte das aplicações vamos usar este conceito com cada coleção sendo uma σ-álgebra de conjuntos de Ω.

Definição 9. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade fixado e $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$ coleções de eventos. Dizemos que as coleções $\mathcal{C}_i$'s são independentes se para qualquer escolha de $A_1, \ldots, A_n$, com $A_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$, temos que os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são eventos independentes.*

Prosseguimos apresentando um critério bastante útil para provar independência de uma quantidade finita de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Devido a sua importância nesta seção, vamos apresentá-lo na forma de um teorema.

Teorema 10. *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade fixado. Se $\mathcal{C}_i$ para $i = 1, \ldots, n$ é uma coleção (não vazia) de* **eventos** *tais que*

1. *$\mathcal{C}_i$ é um π-sistema;*
2. *$\mathcal{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$ são independentes,*

então $\sigma(\mathcal{C}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ são independentes.

Demonstração. A prova deste teorema será feita por indução no número de coleções. Primeiro mostramos que a tese do teorema se verifica para o caso $n = 2$. Fixe $A_2 \in \mathcal{C}_2$ e defina

$$\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A \cap A_2) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2)\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{L}$ é um λ-sistema. De fato, primeiramente temos que $\Omega \in \mathcal{L}$ pois, $\mathbb{P}(\Omega \cap A_2) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(A_2)$. A coleção $\mathcal{L}$ é fechada para complementação pois, para qualquer $A \in \mathcal{L}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c \cap A_2) &= \mathbb{P}((\Omega \setminus A) \cap A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_2 \setminus (A \cap A_2)) \\
&= \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A \cap A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_2)(1 - \mathbb{P}(A)) \\
&= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A^c).
\end{aligned}$$

O que mostra que $A^c \in \mathcal{L}$. Para encerrar a prova da afimarção resta mostrar que se $\{B_n\}$ uma coleção dois a dois disjunta em $\mathcal{L}$ então $\cup_{i=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}$. Este fato segue das seguintes igualdades

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_2 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_2 \cap B_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_2 \cap B_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B_n) \\
&= \mathbb{P}(A_2) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \\
&= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).
\end{aligned}
$$

Por hipótese $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{L}$ e é um π-sistema. Como mostramos que $\mathcal{L}$ é um λ-sistema podemos aplicar o Teorema de Dynkin para concluir que $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{L}$. Como A_2 é arbitrário em $\mathcal{C}_2$ temos mostrado neste momento que as coleções $\sigma(\mathcal{C}_1)$ e $\mathcal{C}_2$ são independentes.

Agora fixamos $A_1 \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. De maneira análoga definimos

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A \cap A_1) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_1)\}$$

e podemos verificar que está coleção é um λ-sistema. Como vimos acima, $\sigma(\mathcal{C}_1)$ e $\mathcal{C}_2$ são independentes logo $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{K}$. Usando novamente o Teorema de Dynkin completamos a prova do caso $n = 2$.

Claramente o passo de indução pode ser feito utilizando a técnica apresentada acima e assim o teorema está provado. □

Definição 11 (Coleções Independentes)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e I um conjunto de índices arbitrário. As coleções (de eventos) $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ são independentes se para todo $J \subset I$ finito, temos que as coleções $\{\mathcal{C}\}_{j\in J}$ são independentes.*

Corollary 1. *Se $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ é uma coleção de π-sistemas não-vazios e independentes, então $\{\sigma(\mathcal{C}_i)\}_{i\in I}$ são σ-álgebras independentes.*

2.1 Variáveis Aleatórias Independentes

Nesta seção apresentamos um dos conceitos mais importantes deste curso que é o de v.a.'s independentes. Também são apresentados nesta seção alguns critérios para independência de v.a.'s.

Definição 12 (σ-álgebra Induzida por uma v.a.)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço de mensurável e X uma v.a. definida Ω. A σ-álgebra induzida por X, notação, $\sigma(X)$ é definida como sendo a sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ dada por*

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})\}.$$

Definição 13 (Variáveis Aleatórias Independentes)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade fixado e* T *um conjunto arbitrário de índices. Uma coleção de variáveis aleatórias* $\{X_t\}_{t\in T}$ *é dita independente se a coleção de* σ*-álgebras* $\{\sigma(X_t)\}_{t\in T}$ *é independente.*

Segundo nossa definição uma coleção de v.a.'s é independente se as σ-álgebras induzidas por elas são independentes. Um caso particular interessante deste conceito é dado por uma coleção de funções indicadoras de determinados eventos. Primeiro observe, para qualquer evento A, que

$$\sigma(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}.$$

Assim as v.a.'s $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ são independentes, se e somente se, $A_1, \ldots, A_n$ são eventos independentes.

Apresentamos abaixo um critério para independência de v.a.'s em termos de suas funções distribuição. Antes porém, vamos introduzir algumas notações.

Fixe um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, um conjunto de índices T e uma família de v.a.'s $\{X_t\}_{t\in T}$. Para cada $J \subset T$ finito definimos

$$F_J(x_j, j \in J) \equiv \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j \leq x_j\}\right).$$

Teorema 14. *Fixe um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *e um conjunto arbitrário de índices* T*. Uma família de v.a.'s* $\{X_t\}_{t\in T}$ *é independente se, e somente se, para todo subconjunto* $J \subset T$ *finito temos que*

$$F_J(x_j, j \in J) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j \leq x_j) \qquad \forall x_j \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Demonstração. Para demonstrar o teorema é suficiente provar que para todo subconjunto **finito** $J \subset T$ temos que as v.a.'s $\{X_j\}_{j\in J}$ são independentes se, e somente se, vale a condição (1).

Para cada $j \in J$, defina

$$\mathcal{C}_j = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{X_j \leq x\}.$$

É imediato verificar que $\mathcal{C}_j$ é um π-sistema e que $\sigma(\mathcal{C}_j) = \sigma(X_j)$. Observe que a condição (1) é equivalente a dizer que $\{\mathcal{C}_j\}_{j\in J}$ é uma coleção de eventos independentes e portanto segue do Teorema 10 que as σ-álgebras $\{\sigma(\mathcal{C}_j) = \sigma(X_j)\}_{j\in J}$ são independentes. $\square$

Corollary 2. *Uma coleção finita de v.a.'s* $X_1, \ldots, X_n$ *em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *é independente se, e somente se,*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j \leq x_j\}\right) \equiv \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i \leq x_i)$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição 15 (Variável Aleatória Discreta). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dizemos que uma v.a. X é discreta se $X(\Omega)$ é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$.*

Corollary 3. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $X_1, \ldots, X_n$ uma coleção de v.a.'s* **discretas** *com conjunto imagem comum igual a $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$. Sob estas condições a coleção $X_1, \ldots, X_n$ é independente se, e somente se,*

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i) \qquad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n. \tag{2}$$

Demonstração. Supondo que $X_1, \ldots, X_n$ é uma família de v.a.'s independentes temos que $\sigma(X_i), i = 1, \ldots, n$ é uma coleção de σ-álgebras independentes. Já que $\{X_i = x_i\} \in \sigma(X_i)$ temos que $\{X_i = x_i\}, i = 1, \ldots, n$ são eventos independentes e assim a condição 2 é satisfeita.

Por questão de simplicidade vamos mostrar a recíproca para o caso $n = 2$. A prova para o caso geral é obtida de maneira análoga. Sejam (z_1, z_2) e (x_1, x_2) vetores em $\mathbb{R}^2$. Considere a seguinte relação de ordem parcial em $\mathbb{R}^2$, $(z_1, z_2) \preceq (x_1, x_2)$ se $z_1 \leq x_1$ e $z_2 \leq x_2$. Usando a condição 2 temos para qualquer $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 \leq x_1,\, X_2 \leq x_2) &= \sum_{\substack{(z_1,z_2) \preceq (x_1,x_2) \\ (z_1,z_2) \in \mathcal{R}^2}} \mathbb{P}(X_1 = z_1,\, X_2 = z_2) \\
&= \sum_{\substack{(z_1,z_2) \preceq (x_1,x_2) \\ (z_1,z_2) \in \mathcal{R}^2}} \mathbb{P}(X_1 = z_1)\mathbb{P}(X_2 = z_2) \\
&= \sum_{\substack{z_1 \leq x_1 \\ z_1 \in \mathcal{R}}} \sum_{\substack{z_2 \leq x_2 \\ z_2 \in \mathcal{R}}} \mathbb{P}(X_1 = z_1)\mathbb{P}(X_2 = z_2) \\
&= \sum_{\substack{z_1 \leq x_1 \\ z_1 \in \mathcal{R}}} \mathbb{P}(X_1 = z_1) \sum_{\substack{z_2 \leq x_2 \\ z_2 \in \mathcal{R}}} \mathbb{P}(X_2 = z_2) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1)\mathbb{P}(X_2 \leq x_2).
\end{aligned}$$

Usando o corolário anterior segue que X_1 e X_2 são independentes. □

3 Esperança condicional

Teorema 16. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida finita, $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ e $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$. Para cada $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ existe uma função g mensurável segundo a σ-álgebra $\mathcal{B}$ com $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ tal que*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\nu \qquad \textit{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Além do mais se $g' \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ é uma outra função satisfazendo a igualdade acima, então $g = g'$ ν-q.t.p.

Observação 17. *A função g cuja a existência é garantida no Teorema* (16) *é nosso ponto de partida para apresentar a definição da esperança condicional.*

Demonstração. Vamos considerar inicialmente que $f \geq 0$. Seja $\eta : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ a medida definida por

$$\eta(E) = \int_E f \, d\mu. \tag{3}$$

Note que se $\nu(E) = 0$ então obviamente $\mu(E) = 0$, mas se $\mu(E) = 0$ então a integral acima é igual a zero logo $\eta(E) = 0$, e assim temos que $\eta \ll \nu$. Daí segue do Teorema de Radon-Nikodym que existe uma função $\mathcal{B}$-mensurável $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\eta(E) = \int_E g \, d\nu \tag{4}$$

Usando a hipótese $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e tomando $E = \Omega$ nas igualdades (3) e (4) concluímos que $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$. O Teorema de Radon-Nikodým garante que g é unicamente determinada ν-q.t.p. e portanto o teorema fica provado no caso em que $f \geq 0$. No caso em que f toma valores reais basta repetir argumento apresentado acima para f^+ e f^-. □

Definição 18. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de* probabilidade, *$f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ e $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$. Dizemos que uma função $\mathcal{B}$-mensurável $g : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma esperança condicional de f dada a σ-álgebra $\mathcal{B}$, se*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\nu \qquad \textit{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Como vimos acima o Teorema (16) garante a existência de uma esperança condicional para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e para toda sub-σ-álgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$. Cada uma das funções g satisfazendo a condição acima é chamada de uma versão da esperança condicional de f com respeito a $\mathcal{B}$. O Teorema (16) também nos garante que quaisquer duas versões da esperança condicional são funções que diferem apenas em um conjunto de medida ν nula. Já que do ponto de vista de integração a escolha de uma versão arbitrária da esperança condicional não afeta nenhum cálculo é comum tomarmos uma versão qualquer e denotá-la por $\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$. Ressaltamos que $\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$ é uma função ($\mathbb{E}[f|\mathcal{B}] : \Omega \to \mathbb{R}$) cujo domínio é o conjunto Ω e toma valores em $\mathbb{R}$. Na sequência apresentamos algumas de suas principais propriedades.

Proposição 19 (Linearidade da Esperança Condicional). *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida finita, $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ e $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$. Para todas $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que*

$$\mathbb{E}[f + \alpha g|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[f|\mathcal{B}] + \alpha \mathbb{E}[g|\mathcal{B}] \quad \nu - q.t.p.$$

Demonstração. Pela definição de esperança condicional temos

$$\int_E (f + \alpha g)\, d\mu = \int_E \mathbb{E}[f + \alpha g|\mathcal{B}]\, d\nu \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}. \tag{5}$$

Usando a linearidade da Integral de Lebesgue e a definição de esperança condicional de f e g dado a σ-álgebra $\mathcal{B}$, temos para todo $E \in \mathcal{B}$ que

$$\int_E (f + \alpha g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \alpha \int_E g\, d\mu = \int_E \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\, d\nu + \alpha \int_E \mathbb{E}[g|\mathcal{B}]\, d\nu. \tag{6}$$

Já que o lado esquerdo em (5) e (6) são os mesmos temos

$$\int_E \mathbb{E}[f + \alpha g|\mathcal{B}]\, d\nu = \int_E \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\, d\nu + \alpha \int_E \mathbb{E}[g|\mathcal{B}]\, d\nu \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Usando novamente a linearidade da integral e que E é arbitrário em $\mathcal{B}$ concluímos que $\mathbb{E}[f + \alpha g|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[f|\mathcal{B}] + \alpha\mathbb{E}[g|\mathcal{B}] \quad \nu -$ q.t.p.. $\square$

A prova da próxima proposição é completamente análoga, mas repetiremos todos os detalhes para que o leitor menos experiente vá se familiarizando com o conceito da esperança condicional e suas propriedades.

Proposição 20 ($\mathcal{B}$-homogenidade da Esperança Condicional)**.** *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida finita, $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ e $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$. Se $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e g é uma função $\mathcal{B}$-mensurável então*

$$\mathbb{E}[fg|\mathcal{B}] = g\mathbb{E}[f|\mathcal{B}] \quad \nu - q.t.p.$$

Demonstração. Suponha que inicialmente que $g = \chi_F$ para algum $F \in \mathcal{B}$. Da definição de esperança condicional temos

$$\int_E f\chi_F \; d\mu = \int_E \mathbb{E}[f\chi_F|\mathcal{B}]\, d\nu \tag{7}$$

para todo $E \in \mathcal{B}$. Como estamos supondo que $F \in \mathcal{B}$, temos que $E \cap F \in \mathcal{B}$ logo, aplicando novamente a definição da esperança condicional obtemos

$$\int_E f\chi_F \; d\mu = \int_{E\cap F} f \; d\mu = \int_{E\cap F} \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\, d\nu = \int_E \chi_F \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\, d\nu. \tag{8}$$

De (7) e (8) segue que

$$\int_E \mathbb{E}[f\chi_F|\mathcal{B}]\, d\nu = \int_E \chi_F \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\, d\nu, \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Logo $\mathbb{E}[f\chi_F|\mathcal{B}] = \chi_F\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$ ν-q.t.p. e isto prova o teorema para o caso $g = \chi_F$.

Vamos mostrar agora o teorema no caso em que g é uma função simples $\mathcal{B}$-mensurável. Suponha que sua representação padrão seja $g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, onde $a_j \in \mathbb{R}$ e $E_j \in \mathcal{B}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Pela linearidade da esperança condicional e pela propriedade que acabamos de demostrar acima, uma indução mostra que as seguintes igualdades são verdadeiras

$$\mathbb{E}[gf|\mathcal{B}] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}\right) f \,\middle|\mathcal{B}\right] = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E}[\chi_{E_j} f|\mathcal{B}] = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} \mathbb{E}[f|\mathcal{B}] = g\mathbb{E}[f|\mathcal{B}].$$

Resta agora estabelecer este fato para funções $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$. Primeiro vamos mostrar que é suficiente provar a proposição para f e g não negativas. De fato, assuma que o teorema seja válido para $f^+, f^- \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e $g^+, g^- \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$. Já que $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[gf|\mathcal{B}] &= \mathbb{E}[g^+ f^+ - g^- f^+ - g^+ f^- + g^- f^-|\mathcal{B}] \\
&= \mathbb{E}[g^+ f^+|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[g^- f^+|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[g^+ f^-|\mathcal{B}] + \mathbb{E}[g^- f^-|\mathcal{B}] \\
&= g^+\mathbb{E}[f^+|\mathcal{B}] - g^-\mathbb{E}[f^+|\mathcal{B}] - g^+\mathbb{E}[f^-|\mathcal{B}] + g^-\mathbb{E}[f^-|\mathcal{B}] \\
&= (g^+ - g^-)\mathbb{E}[f^+|\mathcal{B}] - (g^+ - g^-)\mathbb{E}[f^-|\mathcal{B}] \\
&= g\mathbb{E}[f^+|\mathcal{B}] - g\mathbb{E}[f^-|\mathcal{B}] \\
&= g(\mathbb{E}[f^+|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[f^-|\mathcal{B}]) \\
&= g\mathbb{E}[f|\mathcal{B}].
\end{aligned}$$

Portanto só resta mostrar que a proposição é verdadeira para $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ ambas não negativas. Observamos que existe uma sequência $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ monótona crescente de funções simples $\mathcal{B}$-mensuráveis tal que $g_n \uparrow g$. Já que $f \geq 0$ podemos afirmar que $g_n f \uparrow gf$. Pela definição de esperança condicional

$$\int_E g_n f \, d\mu = \int_E \mathbb{E}[g_n f|\mathcal{B}] \, d\nu, \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}. \tag{9}$$

Já sabemos que para toda função $\mathcal{B}$-mensurável g_n simples que a seguinte igualdade é verdadeira $\mathbb{E}[g_n f|\mathcal{B}] = g_n \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$. Como $f \geq 0$ é imediato verificar que $\mathbb{E}[f|\mathcal{B}] \geq 0$, assim $g_n \mathbb{E}[f|\mathcal{B}] \uparrow g\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$ o que nos permite aplicar o teorema da convergência monótona em ambos os lados de (9) e concluir que para todo $E \in \mathcal{B}$.

$$\int_E gf \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \mathbb{E}[f|\mathcal{B}] \, d\nu = \int_E g\mathbb{E}[f|\mathcal{B}] \, d\nu.$$

Observando que a integral mais a esquerda da igualdade acima é, por definição de esperança condicional, igual a $\int_E \mathbb{E}[gf|\mathcal{B}] \, d\nu$ e que esta igualdade é válida para todo $E \in \mathcal{B}$ concluímos que $\mathbb{E}[gf|\mathcal{B}] = g\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$ ν-q.t.p. e assim está completa a prova da proposição. □

Proposição 21 (Monotonicidade da Esperança Condicional). *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Se $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ são tais que $f \leq g$ e $\mathcal{B}$ é uma sub-σ-álgebra qualquer de $\mathcal{F}$ então $\mathbb{E}[f|\mathcal{B}] \leq \mathbb{E}[g|\mathcal{B}]$ ν-q.t.p., onde $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$*

Demonstração. Pela definição da esperança condicional temos

$$\int_E \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\,d\nu = \int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu = \int_E \mathbb{E}[g|\mathcal{B}]\,d\nu, \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

De onde segue o resultado. □

Teorema 22 (Teorema da Convergência Monótona para Esperança Condicional)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ e $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$. Se $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ é uma sequência de funções $\mathcal{B}$-mensuráveis tal que $f_n \uparrow f$ μ-q.t.p. então $\mathbb{E}[f_n|\mathcal{F}] \uparrow \mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$ ν-q.t.p..*

Demonstração. Por linearidade e monotonicidade da esperança condicional temos

$$0 \leq \int_E \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\,d\nu - \int_E \mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}]\,d\nu = \int_E f\,d\mu - \int_E f_n\,d\mu. \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Como $\int_E \mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}]\,d\nu$ é uma sequência de números reais não decrescente e limitada ela possui limite. Assim podemos tomar o limite quando n vai a infinito em ambos os lados da desigualdade acima e concluir usando o Teorema da Convergência Monótona, no lado direito, que

$$0 \leq \int_E \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\,d\nu - \lim_{n\to\infty} \int_E \mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}]\,d\nu = 0 \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Já que $\mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}]$ é uma sequência monótona de funções, existe o limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}](\omega)$ ν-q.t.p. Logo podemos aplicar novamente o Teorema da Convergência Monótona na desigualdade acima e concluir que

$$\int_E \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\,d\nu = \int_E \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}]\,d\nu \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Desta forma acabamos de mostrar que $\mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}] \uparrow \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]$ ν-q.t.p. □

Exercício 23. *Prove a chamada propriedade de contração para a esperança condicional. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$, $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$ e $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Mostre que*

$$\int_\Omega \big|\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\big|\,d\nu \leq \int_\Omega |f|\,d\mu.$$

Teorema 24 (Convergência Dominada para Esperança Condicional)**.** *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida $\mathcal{B}$ sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ e $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$. Suponha que $f_n : \Omega \to [0, +\infty)$ seja uma sequência de funções em $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ que converge μ-q.t.p. para $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Se existe uma função integrável $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[f|\mathcal{B}] \quad \nu - q.t.p.$$

Demonstração. Seja $h_n : \Omega \to [0, +\infty)$ uma sequência de funções dada por

$$h_n(\omega) = \sup_{\{j\in\mathbb{N}:n\leq j\}} |f(\omega) - f_j(\omega)|.$$

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $h_{n+1}(\omega) \leq h_n(\omega)$ e $h_n(\omega) \leq |f(\omega)| + |g(\omega)|$. Desta duas propriedades podemos concluir que $(|f| + |g| - h_n) \uparrow (|f| + |g|)$ μ-q.t.p.. Pelo Teorema 22 (convergência monótona) segue que

$$\mathbb{E}[(|f| + |g| - h_n)|\mathcal{B}] \uparrow \mathbb{E}[(|f| + |g|)|\mathcal{B}] \ \ \nu - \text{q.t.p.}$$

Usando a linearidade e monotonicidade da esperança condicional segue da observação acima que $\mathbb{E}[h_n|\mathcal{B}] \downarrow 0$. Usando novamente a monotonicidade obtemos

$$\big|\mathbb{E}[f|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[f_n|\mathcal{B}]\big| \leq \mathbb{E}[|f - f_n||\mathcal{B}] \leq \mathbb{E}[h_n|\mathcal{B}] \downarrow 0 \ \ \nu - \text{q.t.p..}$$

□

Proposição 25. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{F}$-mensurável, $\mathscr{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ σ-álgebras, $\nu = \mu|_{\mathcal{B}}$ e $\eta = \mu|_{\mathscr{A}}$. Então $\mathbb{E}[\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]|\mathscr{A}] = \mathbb{E}[f|\mathscr{A}]$ η-q.t.p..*

Demonstração. Por definição da esperança condicional temos

$$\int_F \mathbb{E}[\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]|\mathscr{A}]\, d\eta = \int_F \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\, d\nu, \qquad \text{para todo } F \in \mathscr{A}.$$

Como F também é um conjunto $\mathcal{B}$-mensurável segue novamente da definição de esperança condicional que

$$\int_F \mathbb{E}[f|\mathcal{B}]\, d\nu = \int_F f\, d\mu, \qquad \text{para todo } F \in \mathscr{A}.$$

Das duas igualdades acima, temos que

$$\int_F f\, d\mu = \int_F \mathbb{E}[\mathbb{E}[f|\mathcal{B}]|\mathscr{A}]\, d\eta, \qquad \text{para todo } F \in \mathscr{A}.$$

Da unicidade η-q.t.p. garantida pelo Teorema 16 segue que o lado direito da igualdade acima é igual a $\mathbb{E}[f|\mathscr{A}]$ η-q.t.p., o que prova a proposição. □

4 O Movimento Browniano

Esta seção ainda está sob preparação. A construção que vamos apresentar é baseada em alguns fatos elementares sobre espaços de Hilbert e segue de perto o texto disponível no link abaixo:

`http://wwwf.imperial.ac.uk/~mdavis/course_material/sp1/BROWNIAN_MOTION.PDF`

5 Processos de Markov

No que segue $(\mathcal{X}, d)$ denota um espaço métrico compacto arbitrário. Recomendamos o leitor a ter em mente o espaço $\mathcal{X}$ como na Parte 1 destas notas. Para definir um processo de Markov vamos considerar o seguinte conjunto

$$D[0,\infty) = \{\eta \in \mathcal{X}^{[0,\infty)} \ : \ \eta \ \text{ possui limite a direita e é contínua a esquerda}\}.$$

O conjunto $D[0,\infty)$ munido da σ-álgebra $\mathcal{F} = \sigma\left(\pi_t : t \in [0,\infty)\right)$, gerada pelas projeções $\pi_t : D[0,\infty) \to \mathcal{X}$, onde $\pi_t(\eta) = \eta(t)$, para cada $t \in [0,\infty)$ é chamado *espaço de Skorohod.* É muito comum na literatura se referir ao conjunto $D(0,\infty]$ como o conjunto das funções *càdlàg* a valores em $\mathcal{X}$.

Uma das propriedades fundamentais da definição de processos de Markov envolve a chamada propriedade de Markov. Para dar sua definição precisa necessitamos considerar uma família de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ definidas como segue. Para cada $t > 0$ fixado denotamos por $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\pi_s : s \in [0,t]\right)$ a σ-álgebra de subconjuntos de $D[0,\infty)$ gerada pelas projeções π_s, com $s \in [0,t]$.

Para cada $t \in [0,\infty)$, definimos um operador (de translação no tempo, ou *shift*) $\tau_t : D[0,\infty) \to D[0,\infty)$, dado por $(\tau_t(\eta))(s) = \eta(s+t)$, ou seja, para cada $s \in [0,\infty)$, $\pi_s(\tau_t(\eta)) = \pi_{s+t}(\eta)$.

Exercício 26. *Mostre que para todo $t \geq 0$ a aplicação $\tau_t : D[0,\infty) \to D[0,\infty)$, definida acima, é $\mathcal{F}$-mensurável.*

Definição 27 (Processo de Markov)**.** *Um processo de Markov é uma família de probabilidades $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ definidas em $\mathcal{F}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo $x \in \mathcal{X}$, temos que $\mathbb{P}^x\big(\{\eta \in D[0,\infty) : \pi_0(\eta) = x\}\big) = 1$;*
2. *Para todo $A \in \mathcal{F}$, a aplicação $x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$ é $\mathscr{B}(\mathcal{X})$-mensurável;*
3. *Para todo $x \in \mathcal{X}$ e para todo $A \in \mathcal{F}$, temos $\mathbb{P}^x\big(\tau_t^{-1}(A)|\mathcal{F}_t\big)(\eta) = \mathbb{P}^{\pi_t(\eta)}(A)$ para η em um conjunto de medida 1 com respeito a $\mathbb{P}^x$.*

Dado um processo de Markov $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ podemos definir para cada elemento $x \in \mathcal{X}$, um espaço de probabilidade $(D[0,\infty), \mathcal{F}, \mathbb{P}^x)$. Se $Z : D[0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória neste espaço, definimos a esperança de Z, notação $\mathbb{E}^x[Z]$, como sendo a seguinte integral de Lebesgue (caso exista)

$$\mathbb{E}^x[Z] \equiv \int_{D[0,\infty)} Z \, d\mathbb{P}^x.$$

Caso a integral acima não exista dizemos que Z não tem esperança bem definida.

Na sequência destas notas vamos adicionar algumas hipóteses aos processos de Markov a fim de obter uma bijeção entre tais processos e os chamados semi-grupos de Markov agindo em $C(\mathcal{X})$.

Referências

[1] R. G. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[2] P. Billingsley. *Probability and measure.* Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012.

[3] K. L. Chung. *A course in probability theory.* Academic Press, Inc., San Diego, CA, third edition, 2001.

[4] G. B. Folland. *Real analysis.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[5] T. M. Liggett. *Interacting particle systems.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.