Processos de Markov a Tempo Contínuo e Sistemas de Partículas
Parte 3

Leandro Cioletti
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
cioletti@mat.unb.br

Ricardo Parreira
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
rpsilva@unb.br

8 de fevereiro de 2017

Resumo

Nestas notas são apresentadas algumas das propriedades básicas dos processos de Markov, introduzidos na Parte 2, e também a definição de semi-grupos de Markov. Um dos principais resultados destas notas é o teorema de existência de medidas invariantes para semi-grupos de Markov. Estas notas são baseadas nas referências [2, 4].

1 Processos de Markov e Semigrupos

Vamos começar lembrando a definição de um Processo de Markov.

Definição 1 (Processo de Markov). *Um processo de Markov é uma família de medidas de probabilidade* $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ *definidas em* $\mathcal{F}$ *que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo* $x \in \mathcal{X}$*, temos que* $\mathbb{P}^x\big(\{\eta \in D[0,\infty) : \pi_0(\eta) = x\}\big) = 1$*;*
2. *Para todo* $A \in \mathcal{F}$*, a aplicação* $x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$ *é* $\mathscr{B}(\mathcal{X})$*-mensurável;*
3. *Para todo* $x \in \mathcal{X}$ *e para todo* $A \in \mathcal{F}$*, temos* $\mathbb{P}^x\big(\tau_t^{-1}(A)|\mathcal{F}_t\big)(\eta) = \mathbb{P}^{\pi_t(\eta)}(A)$ *para* η *em um conjunto de medida* 1 *com respeito a* $\mathbb{P}^x$*.*

A seguir vamos introduzir um operador que será muito importante para fazer a ligação entre os processos de Markov e os semi-grupos de Markov. A definição deste operador é a seguinte.

Definição 2 (Operador $S(t)$). *Suponha que para cada $x \in \mathcal{X}$ fixado exista um espaço de probabilidade $(D[0,\infty), \mathscr{F}, \mathbb{P}^x)$ associado a este elemento. Então para qualquer função contínua $f \in C(\mathcal{X})$ e $t \geq 0$ podemos construir uma nova função $S(t)f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ dada pela seguinte expressão*

$$S(t)f(x) \equiv \mathbb{E}^x[f \circ \pi_t] \qquad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Observamos que sem hipóteses adequadas na família $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ é extremamente duro extrair qualquer informação sobre a regularidade da função $S(t)f$, mesmo que f seja contínua. Porém podemos afirmar que para cada $t \geq 0$ a aplicação $f \mapsto S(t)f$ define uma transformação linear de $C(\mathcal{X})$ em $F(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \equiv \{f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : f \text{ é uma função}\}$ e portanto $S(t)(C(\mathcal{X}))$ é um subespaço de $F(\mathcal{X}, \mathbb{R})$. Mas sem informações adicionais sobre a família $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$, é praticamente impossível fazer afirmações interessantes a respeito deste subespaço.

Exercício 3. *Mostre que se $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ é um processo de Markov então para todo $t \geq 0$ temos que $S(t)C(\mathcal{X}) \subset \mathscr{M}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, conjunto de todas as funções reais $\mathscr{B}(\mathcal{X})$-mensuráveis.*

A discussão acima motiva a seguinte definição.

Definição 4 (Processos de Feller). *Um processo de Markov $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ sobre $\mathcal{X}$ será chamado de um Processo de Feller sobre $\mathcal{X}$ se para cada $t \geq 0$ o operador linear $S(t)$ obtido na Definição 2 é tal que $S(t)f \in C(\mathcal{X})$ para toda $f \in C(\mathcal{X})$. Em outras palavras $S(t)C(\mathcal{X}) \subset C(\mathcal{X})$.*

Note que se $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ é um processo de Feller em $\mathcal{X}$, então a aplicação

$$x \mapsto \mathbb{E}^x[f \circ \pi_t]$$

é contínua para cada $f \in C(\mathcal{X})$ e $t \geq 0$ fixados.

Exercício 5. *Seja $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ é um processo de Markov em $\mathcal{X}$. Mostre que se $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathscr{B}(\mathcal{X})$-mensurável e limitada, então para todo $t, s \geq 0$ a aplicação*

$$D(0,\infty] \ni \zeta \mapsto \mathbb{E}^{\pi_s(\zeta)}[f \circ \pi_t]$$

é $\mathscr{F}$-mensurável.

Proposição 6. *Suponha que $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ é um Processo de Feller sobre $\mathcal{X}$. Então a família de operadores lineares $\{S(t) : t \geq 0\}$ em $C(\mathcal{X})$, tem as seguintes propriedades:*

1. *$S(0) = I$, operador identidade de $C(\mathcal{X})$;*
2. *A aplicação $t \mapsto S(t)f$ é contínua a direita para toda $f \in C(\mathcal{X})$;*
3. *$S(t+s)f = S(t)S(s)f$ para toda $f \in C(\mathcal{X})$ e $t, s \geq 0$;*
4. *$S(t)1 = 1$ para todo $t \geq 0$;*

5. $S(t)f \geq 0$ para toda $f \geq 0$ e $t \geq 0$.

Demonstração. Prova do item (1). Para todo $\zeta \in D[0,\infty)$ temos

$$f \circ \pi_0(\zeta) = 1_{\{\pi_0(\zeta)=x\}}(\zeta) \cdot f \circ \pi_0(\zeta) + 1_{\{\pi_0(\zeta)\neq x\}}(\zeta) \cdot f \circ \pi_0(\zeta).$$

Já que $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ é um Processo de Feller segue do item (1) da Definição 1 que $1_{\{\pi_0(\zeta)\neq x\}}(\zeta) = 0$ quase certamente com respeito a $\mathbb{P}^x$. Por outro lado, $1_{\{\pi_0(\zeta)=x\}}(\zeta) f \circ \pi_0(\zeta) = f(x)$ para quase todo ζ, com respeito a $\mathbb{P}^x$. Assim temos

$$\begin{aligned}
S(0)f(x) &\equiv \mathbb{E}^x[f \circ \pi_0] \\
&= \int_{D[0,\infty)} \Big[1_{\{\pi_0(\zeta)=x\}}(\zeta) f \circ \pi_0(\zeta) + 1_{\{\pi_0(\zeta)\neq x\}}(\zeta) f \circ \pi_0(\zeta)\Big]\, d\mathbb{P}^x(\zeta) \\
&= \int_{D[0,\infty)} f(x)\, d\mathbb{P}^x(\zeta) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

O que prova que $S(0)f = f$.

Prova do item (2). A prova apresentado a seguir é inspirada na Seção 1 do Capítulo IX de [7]. Para provar que o item (2) é verdadeiro, temos que mostrar que fixada qualquer função $f \in C(\mathcal{X})$, $t \geq 0$ e dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que pode depender da escolha de f e t) tal que para todo $s \geq 0$ satisfazendo $0 < s - t < \delta$ temos

$$\sup_{x\in\mathcal{X}} |S(t)f(x) - S(s)f(x)| < \varepsilon.$$

Para facilitar a exposição, vamos dividir a prova deste fato em duas partes. Na primeira parte vamos provar uma afirmação aparentemente mais fraca que é a seguinte: fixados $f \in C(\mathcal{X})$, $t \geq 0$ e $x \in \mathcal{X}$ vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que pode a princípio depender de f, t e x) tal que para todo $s \geq 0$ satisfazendo $0 < s - t < \delta$ temos $|S(t)f(x) - S(s)f(x)| < \varepsilon$. A segunda parte consiste em mostrar que podemos aplicar um resultado elementar da Teoria de Hille-Yosida para semigrupos em espaços de Banach para concluir a partir da primeira parte que o item (2) é verdadeiro.

Seja $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de números reais tal que $s_n \downarrow t$, quando $n \to \infty$. Considere a sequência de funções $\varphi_n : D[0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_n \equiv f \circ \pi_{s_n}$. Já que toda função em $D[0,\infty)$ é contínua pela direita, temos que $\varphi_n(\zeta) \to f \circ \pi_t(\zeta)$, quando $n \to \infty$, para todo $\zeta \in D[0,\infty)$. Como estamos assumindo que $f \in C(\mathcal{X})$ temos que φ_n é uma sequência de funções $\mathscr{F}$-mensuráveis uniformemente limitada por $\|f\|_\infty$, portanto segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$S(s_n)f(x) = \mathbb{E}^x[f \circ \pi_{s_n}] = \mathbb{E}^x[\varphi_n] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}^x[f \circ \pi_t] = S(t)f(x).$$

Já que $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência arbitrária satisfazendo $s_n \downarrow t$, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (que pode a princípio depender de f, t e x) tal que para todo $s \geq 0$ satisfazendo $0 < s - t < \delta$ temos $|S(t)f(x) - S(s)f(x)| < \varepsilon$.

Para finalizar a prova do item (2) desta proposição a ideia é usar a implicação (1)$\Longrightarrow$(2) do Teorema 17, uma vez que o item (2) do Teorema 17 com $\mathcal{B} = C(\mathcal{X})$ é exatamente o que queremos provar.

Como $\mathcal{X}$ é um espaço métrico compacto, dado um funcional linear contínuo $F : C(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ sabemos do Teorema de Riesz-Markov que existe uma única medida de Radon sinalada μ tal que para toda $f \in C(\mathcal{X})$ temos $F(f) = \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu$. Para qualquer sequência $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $s_n \downarrow t$ provamos acima que $S(s_n)f$ converge pontualmente para $S(t)f$ como esta sequência de funções é uniformemente limitada, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$|F(S(s_n)f) - F(S(t)f)| = \left| \int_{\mathcal{X}} [S(s_n)f(x) - S(t)f(x)] \, d\mu(x) \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Como $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência arbitraria satisfazendo $s_n \downarrow t$ podemos concluir que para todo funcional linear contínuo $F : C(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ e para toda função $f \in C(\mathcal{X})$ temos

$$\lim_{s \to t^+} |F(S(s)f) - F(S(t)f)| = 0$$

que é exatamente o item (1) do Teorema 17 e portanto a prova do item (2) desta proposição está encerrada.

Prova do item (3). Afirmamos que basta mostrar para todo $B \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$, $x \in \mathcal{X}$ e $t, s \geq 0$ que a seguinte identidade é válida:

$$\mathbb{E}^x[1_B \circ \pi_{t+s}] = \int_{D[0,\infty)} \mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[1_B \circ \pi_s] \, d\mathbb{P}^x(\zeta). \tag{1}$$

De fato, para toda função simples $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ temos da identidade acima e da linearidade da integral de Lebesgue que

$$\mathbb{E}^x[\varphi \circ \pi_{t+s}] = \int_{D[0,\infty)} \mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[\varphi \circ \pi_s] \, d\mathbb{P}^x(\zeta).$$

Note que toda função $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ contínua e não-negativa é necessariamente $\mathscr{B}(\mathcal{X})$-mensurável. Logo podemos usar um teorema clássico da Teoria da Medida (ver Teorema 16) que garante a existência de uma sequência monótona crescente $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ de funções simples tal que $\varphi_n \uparrow f$. Pela monotonicidade da esperança temos que a sequência de funções $\zeta \mapsto \mathbb{E}^{\pi_s(\zeta)}[\varphi_n \circ \pi_t]$ é também uma sequência monótona não-decrescente de funções $\mathscr{F}$-mensuráveis. Para cada ζ fixado segue da monotonicidade da sequência $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ e do Teorema da Convergência Monótona que $\mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[\varphi_n \circ \pi_s] \to \mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[f \circ \pi_s]$ pontualmente. Aplicando novamente o Teorema da Convergência Monótona podemos verificar que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^x[f\circ\pi_{t+s}] &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^x[\varphi_n\circ\pi_{t+s}] \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{D[0,\infty)}\mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[\varphi_n\circ\pi_s]\,d\mathbb{P}^x(\zeta) \\
&= \int_{D[0,\infty)}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[\varphi_n\circ\pi_s]\,d\mathbb{P}^x(\zeta) \\
&= \int_{D[0,\infty)}\mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[\lim_{n\to\infty}\varphi_n\circ\pi_s]\,d\mathbb{P}^x(\zeta) \\
&= \int_{D[0,\infty)}\mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[f\circ\pi_s]\,d\mathbb{P}^x(\zeta).
\end{aligned}
$$

Por definição temos que $S(s)f(\zeta)=\mathbb{E}^\zeta[f\circ\pi_s]$ e portanto $S(t)(S(s)f)(x)$ é exatamente o extremo direito da igualadade acima. Por definição $S(t+s)f(x)$ é o extremo esquerdo da igualdade acima e portanto o item (3) é verdadeiro para toda função f contínua não-negativa. Já que uma função contínua f arbitraria pode ser escrita como diferença de duas funções não-negativas $f=f^+-f^-$ segue da linearidade dos operadores $\{S(t):t\geq 0\}$ que o item (3) é verdadeiro para qualquer função contínua. Agora resta mostrar que a identidade (1) é verdadeira para encerrar a prova do item (3). A prova deste fato é baseada na propriedade (3) da definição de um Processo de Markov em $\mathcal{X}$. Primeiro observamos que $\mathbb{E}^x[1_B\circ\pi_{s+t}]=\mathbb{E}^x[1_B\circ\pi_s\circ\tau_t]=\mathbb{E}^x[1_{\pi_s^{-1}(B)}\circ\tau_t]$. Em seguida, usamos uma propriedade elementar da esperança condicional e o item (3) da definição de Processo de Markov para provar que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^x[1_{\pi_s^{-1}(B)}\circ\tau_t] &= \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^x[1_{\pi_s^{-1}(B)}\circ\tau_t|\mathscr{F}_t]] \\
&= \int_{D[0,\infty)}\mathbb{P}^x(\tau_t^{-1}(\pi_s^{-1}(B))|\mathscr{F}_t)(\zeta)\,d\mathbb{P}^x(\zeta) \\
&= \int_{D[0,\infty)}\mathbb{P}^{\pi_t(\zeta)}(\pi_s^{-1}(B))\,d\mathbb{P}^x(\zeta) \\
&= \int_{D[0,\infty)}\mathbb{E}^{\pi_t(\zeta)}[1_B\circ\pi_s]\,d\mathbb{P}^x(\zeta).
\end{aligned}
$$

Como o lado esquerdo da igualdade acima é igual $\mathbb{E}^x[1_B\circ\pi_{s+t}]$ segue que (1) é verdadeira para todo conjunto $B\in\mathscr{B}(X)$, $x\in\mathcal{X}$ e $s,t\geq 0$.

Prova do item (4). Para cada $t\geq 0$ temos diretamente da definição do operador $S(t)$ e das propriedades elementares da esperança que $S(t)1(x)=\mathbb{E}^x[1\circ\pi_t]=1$.

Prova do item (5). Se $f\geq 0$ segue da monotonicidade da esperança que $S(t)f(x)=\mathbb{E}^x[f\circ\pi_t]\geq 0$ e assim encerramos a prova da proposição. □

Definição 7 (Semigrupo de Markov). *Uma família $\{S(t):t\geq 0\}$ de operadores lineares em $C(\mathcal{X})$ é chamada de Semigrupo de Markov em $C(\mathcal{X})$ se ela satisfaz as propriedades (1)-(5) da Proposição 6.*

Proposição 8. *Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de Markov em $C(\mathcal{X})$ então fixada $f \in C(\mathcal{X})$ a aplicação $t \mapsto S(t)f$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Pelo item (4) da Proposição 6 temos que na norma de operadores $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(C(\mathcal{X}))} \equiv \sup\{\|S(t)f\|_\infty : \|f\|_\infty = 1\} = 1$. Usando este fato e a propriedade de semigrupo (item (3) da Proposição 6) temos que

$$\begin{aligned}\|S(t+\varepsilon)f - S(t)f\|_{\mathcal{L}(C(\mathcal{X}))} &= \|S(t)[S(\varepsilon)f - If]\|_{\mathcal{L}(C(\mathcal{X}))} \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(C(\mathcal{X}))} \cdot \|S(\varepsilon)f - f\|_{\mathcal{L}(C(\mathcal{X}))} \\ &= \|S(\varepsilon)f - f\|_{\mathcal{L}(C(\mathcal{X}))}.\end{aligned}$$

Para finalizar basta usar a propriedade (2) da Proposição 6. □

Uma fato importante sobre os semigrupos de Markov em $C(\mathcal{X})$ é que eles correspondem a processos de Markov em $\mathcal{X}$, o que pode ser visto como uma recíproca da Proposição 6. Desta forma o problema de se construir um processo de Feller pode ser reduzido ao problema de construir o semigrupo correspondente. A prova do seguinte teorema pode ser encontrada no Capítulo 1 de [1] ou no Capítulo 1 de [3].

Teorema 9. *Suponha que $\{S(t) : t \geq 0\}$ é uma semigrupo de Markov em $C(\mathcal{X})$. Então existe um único processo de Markov $\{\mathbb{P}^x : x \in \mathcal{X}\}$ tal que*

$$S(t)f(x) = \mathbb{E}^x[f \circ \pi_t]$$

para toda $f \in C(\mathcal{X})$, $x \in \mathcal{X}$ e $t \geq 0$.

Demonstração. Incluir esta prova. □

Seja $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ o conjunto das medidas de probabilidade de Borel sobre $\mathcal{X}$. Vamos munir $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ da topologia da convergência fraca. Com respeito a esta topologia uma sequência $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ converge fracamente para $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$, notação $\mu_n \rightharpoonup \mu$ se, e somente se, para toda função $f \in C(\mathcal{X})$ temos

$$\int_{\mathcal{X}} f \, d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu.$$

No caso em que $\mathcal{X}$ é espaço métrico compacto temos o seguinte resultado que garante a topologia fraca no espaço das medidas de probabilidade de Borel é metrizável e além do mais este espaço munido desta topologia é um espaço métrico compacto. Uma prova desta fato pode ser encontrada em [5, p. 45].

Teorema 10. *Se $(\mathcal{X}, d)$ é espaço métrico compacto se, e somente se, $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ é compacto na topologia fraca-$*$.*

Definição 11. *Suponha que $\{S(t) : t \geq 0\}$ seja um semigrupo de Markov em $C(\mathcal{X})$. Dada $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ definimos $\mu S(t) \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ pela seguinte relação*

$$\int_{\mathcal{X}} f \; d[\mu S(t)] = \int_{\mathcal{X}} S(t) f \, d\mu \qquad \forall f \in C(\mathcal{X}). \tag{2}$$

A medida de probabilidade $\mu S(t)$ é interpretada como a *distribuição no tempo t do processo* quando a distribuição inicial é dada por μ.

Já que o dual topológico de $C(\mathcal{X})$ é isomorfo ao espaço das medidas de Radon sinaladas podemos pensar no dual do operador $S(t) : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ como sendo um operador linear $S^*(t)$ que age no espaço das medidas sinaladas. Como $S(t)$ é um operador positivo e $S(t)1 = 1$ temos que $S^*(t)(\mathscr{M}_1(\mathcal{X})) \subset \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$. Usando o Teorema de Riesz-Markov é fácil ver que $S^*(t)\mu = \mu S(t)$.

A maior parte deste texto será dedicada a provar teoremas de existência e unicidade de limites fraco-$*$ de $\mu S(t)$ quando $t \to \infty$ para semi-grupos originados por sistemas de partículas interagentes. Um passo importante neste estudo é a identificação do conjunto dos pontos de acumulação na topologia fraca de sequências da forma $\{\mu S(t_n) : n \in \mathbb{N}\}$, onde $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência arbitrária de números reais não-negativos tal que $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$.

Definição 12. *Uma medida de probabilidade $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ é chamada de invariante para um processo de Markov com semigrupo associado $\{S(t) : t \geq 0\}$ if $\mu S(t) = \mu$ para todo $t \geq 0$. A coleção de todas as medidas invariantes será denotada por $\mathscr{I}$.*

Proposição 13. *Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de Markov em $C(\mathcal{X})$. Então temos*

1. *$\mu \in \mathscr{I}$ se, e somente se, para toda $f \in C(\mathcal{X})$ e $t \geq 0$ temos*

$$\int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu.$$

2. *$\mathscr{I}$ é um subconjunto compacto e convexo de $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$.*

3. *Se $\mathscr{I}_e$ denota o conjunto dos pontos extremais de $\mathscr{I}$. Então $\mathscr{I}$ é o fecho da envoltória convexa de $\mathscr{I}_e$.*

4. *Se para algum μ existe o limite $\lim_{t\to\infty} \mu S(t) \equiv \nu$ então $\nu \in \mathscr{I}$.*

5. *Se para alguma sequência $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ com $T_n \uparrow \infty$ e $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ existe o limite*

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \mu S(t) \, dt \xrightarrow{n\to\infty} \nu,$$

   então $\nu \in \mathscr{I}$.

6. *$\mathscr{I}$ é não-vazio.*

Demonstração. Prova do item (1). Segue diretamente de (2), definição de $\mu S(t)$.

Prova do item (2). Sejam $\mu, \nu \in \mathscr{I}$ e $\lambda \in [0,1]$. Pelo item (1) e pelas propriedades elementares da integral de Lebesgue temos para toda $f \in C(\mathcal{X})$ que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} S(t)f \; d[\lambda\mu + (1-\lambda)\nu] &= \lambda \int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu + (1-\lambda) \int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\nu \\
&= \lambda \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu + (1-\lambda) \int_{\mathcal{X}} f \, d\nu \\
&= \lambda \int_{\mathcal{X}} f \; d[\lambda\mu + (1-\lambda)\nu].
\end{aligned}$$

O que mostra que $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu \in \mathscr{I}$ e portanto $\mathscr{I}$ é convexo. Já que $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ é um espaço de Hausdorff é suficiente mostrar que $\mathscr{I}$ é fechado em $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ (que é compacto na topologia fraca) para concluir que $\mathscr{I}$ é compacto. Para mostrar que este conjunto é fechado argumentamos como segue. Se $f \in C(\mathcal{X})$ então temos diretamente da definição de semigrupo de Markov que $S(t)f \in C(\mathcal{X})$. Portanto para toda sequência $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{I}$ tal que $\mu_n \rightharpoonup \mu$, temos das definições do conjunto $\mathscr{I}$ da convergência fraca que

$$\int_{\mathcal{X}} f \, d\mu_n = \int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu.$$

Da unicidade do limite fraco segue que

$$\int_{\mathcal{X}} f \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu$$

e portanto temos do item (1) que $\mu \in \mathscr{I}$ o que mostra que o conjunto $\mathscr{I}$ é um subconjunto compacto de $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$.

Prova do item (3). A prova do item (3) segue do item (2) e do Teorema de Krein-Milman, veja Teorema 18.

Prova do item (4). Segue da definição de convergência fraca, equação (2) e da propriedade de semigrupo que para todo $s \geq 0$ as seguintes igualdades são verdadeiras

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} S(s)f \, d\nu = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}} S(s)f \; d[\mu S(t)] &= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}} S(t)S(s)f \, d\mu \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}} S(t+s)f \, d\mu \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathcal{X}} f \; d[S(t)\mu] \\
&= \int_{\mathcal{X}} f \, d\nu.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o item (1) segue que $\nu \in \mathscr{I}$ o que prova o item (4).

Prova do item (5). A ideia da prova deste item é semelhante a do item anterior. Por questão de conveniência vamos denotar por ν_n a medida de probabilidade definida para cada $B \in \mathscr{B}(X)$ por

$$\nu_n(B) \equiv \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \mu S(t)(B)\ dt.$$

Usando o Teorem 16 e o Teorema da Convergência Dominada temos para qualquer $f \in C(\mathcal{X})$ a seguinte igualdade

$$\int_{\mathcal{X}} f\, d\nu_n = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \left[\int_{\mathcal{X}} f\ d[\mu S(t)] \right] dt. \tag{3}$$

Já que ν_n converge fracamente para ν temos da identidade (3), da propriedade de semi-grupo, Teorema da mudança de variáveis, para qualquer função $f \in C(\mathcal{X})$ e $s \geq 0$, as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} S(s)f\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} S(s)f\, d\nu_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \left[\int_{\mathcal{X}} S(s)f\ d[\mu S(t)] \right] dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \left[\int_{\mathcal{X}} S(s+t)f\, d\mu \right] dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_s^{T_n+s} \left[\int_{\mathcal{X}} S(t)f\, d\mu \right] dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Já que $T_n \uparrow \infty$ afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_s^{T_n+s} \left[\int_{\mathcal{X}} S(t)f\, d\mu \right] dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \left[\int_{\mathcal{X}} S(t)f\, d\mu \right] dt. \tag{5}$$

Para provar a afirmação, vamos considerar a função $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(t) \equiv \int_{\mathcal{X}} S(t)f\, d\mu.$$

Note que (5) é verdadeira se, e somente se,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \left[\int_s^{T_n+s} \varphi(t)dt - \int_0^{T_n} \varphi(t)dt \right] = 0$$

Mas este fato segue das propriedades elementares da integral de Lebesgue e da cota superior $\sup\{|\varphi(t)| : t \geq 0\} \leq \|f\|_\infty$, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \left| \int_s^{T_n+s} \varphi(t)dt - \int_0^{T_n} \varphi(t)dt \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n} \left| \int_0^{s} \varphi(t)dt - \int_{T_n}^{T_n+s} \varphi(t)dt \right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{2s\|f\|_\infty}{T_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Usando (5) em (4), em seguida as equações (2) e (3) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} S(s)f \, d\nu &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \left[\int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \left[\int_{\mathcal{X}} f \, d[\mu S(t)]\right] dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} f \, d\nu_n \\
&= \int_{\mathcal{X}} f \, d\nu.
\end{aligned}
$$

Usando novamente o item (1) concluímos a prova do item (5).

Prova do item (6). Pela compacidade de $\mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ podemos afirmar que para cada medida de probabilidade $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ podemos encontrar uma sequência $T_n \uparrow \infty$ de números naturais tal que a sequência de medidas de probabilidade dada por

$$
\frac{1}{n}\int_0^n \mu S(t) \, dt
$$

possui a seguinte subsequencia

$$
\frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} \mu S(t) \, dt
$$

convergindo fracamente para alguma medida de probabilidade $\nu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$. Já que as hipóteses do item (5) são satisfeitas para a sequência acima segue que $\nu \in \mathscr{I}$ e portanto este conjunto é não-vazio. □

Vale ressaltar que o item (4) da Proposição 13 garante que qualquer elemento de $\mathscr{I}$ é necessariamente um limite fraco da forma $\mu S(t)$, com $t \to \infty$. Mas deve ser observado que não é necessariamente verdade que subsequencias de $\mu S(t_n)$, com $t_n \uparrow \infty$ sejam elementos de $\mathscr{I}$, veja o exemplo abaixo.

Exemplo. Seja $X = \mathbb{S}^1 \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Considere o semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$ em $C(\mathcal{X})$ que manda $f \in C(\mathcal{X})$ em $S(t)f$ dada por $S(t)f(z) = f(\exp(it)z)$.

Afirmarmos que a família $\{S(t) : t \geq 0\}$ é uma família de operadores lineares agindo $C(\mathcal{X})$ que satisfaz as condições (1)-(5) da Proposição 6. De fato, $S(0)f(z) = f(\exp(i0)z) = f(z)$ o que prova (1). Uma vez que $f \in C(\mathcal{X})$ temos imediatamente que $t \mapsto f(\exp(it))$ é contínua para toda $f \in C(\mathcal{X})$ e logo a condição (2) é verificada. Para todo $s, t \geq 0$ temos $S(t+s)f(z) = f(\exp(i(t+s))z) = f(\exp(it)\exp(is)z) = S(t)f(\exp(is)z) = S(t)S(s)f(z)$ o que estabelece a propriedade de semigrupo (3). Claramente $S(t)1 = 1$ e se $f \geq 0$ então $S(t)f \geq 0$ e portanto temos (4) e (5).

Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{S}^1$. Afirmamos que $\mu S(t) = \mu$. De fato, fixado $t \in \mathbb{R}$ denote por $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a rotação do círculo definida por $T(s) = \exp(it)s$. Para toda função contínua f, segue da definição de $S(t)$ e do Teorema da mudança de variáveis e da invariância por rotações do círculo da medida de Lebesgue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1} S(t)f\,d\mu = \int_{\mathbb{S}^1} f(\exp(it)s)\,d\mu(s) = \int_{\mathbb{S}^1} f\circ T\,d\mu = \int_{\mathbb{S}^1} f\,d[\mu\circ T^{-1}]\\ = \int_{\mathbb{S}^1} f\,d\mu.\end{aligned}$$

Já que a igualdade acima é válida para toda função $f \in C(\mathcal{X})$ segue $\mu S(t) = \mu$ para todo $t \geq 0$. Por outro lado, o Teorema 6.20 p. 162 em [6] garante que a única solução da equação $\nu S(t) = \nu$ para todo $t \geq 0$ é a medida de Lebesgue no círculo μ. Desta forma $\mathscr{I} = \{\mu\}$.

Note que para qualquer $\nu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ temos que $\nu S(2n\pi) = \nu$ o que definitivamente mostra que subsequências da forma $\nu S(t_n)$ podem convergir para elementos que não pertencem a $\mathscr{I}$.

Definição 14. *Um semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$ em $C(\mathcal{X})$ (ou seu processo de Feller associado) é chamado de ergódico, se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$\mathscr{I} = \{\nu\}$ é um conjunto unitário;*
2. *$\lim_{t\to\infty} \mu S(t) = \nu$ para toda $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$.*

2 Medidas Invariantes e Processos Estacionários

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade e T um conjunto de índices arbitrário. Um processo estocástico a valores em um espaço métrico $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ é uma família $(X_t)_{t\in T}$, onde $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{X}, \mathscr{B}(\mathcal{X}))$ é uma função mensurável, para cada $t \in T$. A lei de X_t, notação $\mathscr{L}_{X_t}$, é definida como a sendo a medida de probabilidade definida em $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ por $\mathscr{L}_{X_t}(B) = \mathbb{P}(X_t \in B) \equiv \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B\})$.

Dizemos que um processo estocástico $(X_t)_{t\in T}$ é estacionário se para cada $t \geq 0$ fixado temos que $\mathscr{L}_{X_t} = \mathscr{L}_{X_{t+s}}$ para todo $s \geq 0$.

Seja $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ um Processo de Markov. Já que a função $x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$é não-negativa e $\mathscr{B}(X)$-mensurável então podemos definir, para cada $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ fixada, uma medida de probabilidade $\mathbb{P}^\mu$ tal que para cada $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}^\mu(A) = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{P}^x(A)\,d\mu(x). \tag{6}$$

Seja $(X_t)_{t\in T}$ o processo estocástico sobre $(D[0,\infty), \mathcal{F}, \mathbb{P}^\mu)$ dado por $X_t = \pi_t$. Este processo é chamado as vezes de processo coordenado. Observe que segue diretamente da definição de Processo de Markov que para cada $B \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ a seguinte igualdade $\mathbb{P}^x(X_0 \in B) = \mathbb{P}^x(\pi_0 \in B) = 1_B(x)$ é válida para todo $x \in \mathcal{X}$. Desta igualdade podemos ver que a lei de X_0 satisfaz para todo $B \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ a seguinte identidade

$$\mathscr{L}_{X_0}(B) = \mathbb{P}^\mu(X_0 \in B) = \int_X \mathbb{P}^x(X_0 \in B)\,d\mu(x) = \int_X 1_B(x)\,d\mu(x) = \mu(B).$$

Outro fato importante é que se $\phi : D[0,\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{F}$-mensurável e limitada então

$$\mathbb{E}^\mu[\phi] = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{E}^x[\phi]\, d\mu(x).$$

Em particular, para $\phi = f \circ \pi_t$, onde $f \in C(\mathcal{X})$ e $t \geq 0$, temos

$$\mathbb{E}^\mu[f \circ \pi_t] = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{E}^x[f \circ \pi_t]\, d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} S(t) f \, d\mu. \tag{7}$$

A Definição 12 é motivada pelo problema de existência de limites, na topologia fraca, de $\mu S(t)$ quando $t \to \infty$. Outra razão para se introduzir esta definição está relacionada ao seguinte fato.

Proposição 15. *Sejam $(\mathbb{P}^x)_{x\in\mathcal{X}}$ um Processo de Markov, $\mu \in \mathscr{I}$ e $\mathbb{P}^\mu$ dada por (6). Então o processo coordenado $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$, definido em $(D[0,\infty), \mathcal{F}, \mathbb{P}^\mu)$ satisfaz $\mathscr{L}_{X_t} = \mathscr{L}_{X_{t+s}}$ para quaisquer $t, s \geq 0$.*

Demonstração. Sejam $t, s \geq 0$ e $B \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$. Por definição temos que

$$\mathscr{L}_{X_t}(B) = \mathbb{P}^\mu(X_t \in B) = \mathbb{P}^\mu(\pi_t^{-1}(B)).$$

Por outro lado, lembrando que $X_{t+s} = \pi_{t+s} = \pi_s \circ \tau_t$, obtemos a seguinte igualdade

$$\mathscr{L}_{X_{t+s}}(B) = \mathbb{P}^\mu(X_{t+s} \in B) = \mathbb{P}^\mu(\pi_{t+s}^{-1}(B)) = \mathbb{P}^\mu(\tau_s^{-1}\pi_t^{-1}(B)) = (\mathbb{P}^\mu \circ \tau_s^{-1})(\pi_t^{-1}(B)).$$

Portanto é suficiente mostrar que $\mathbb{P}^\mu = \mathbb{P}^\mu \circ \tau_s^{-1}$ para todo $s \geq 0$.

Observe que para todo $A \in \mathcal{F}$ temos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}^\mu \circ \tau_s^{-1})(A) = \mathbb{P}^\mu(\tau_s^{-1}(A)) &= \int_{\mathcal{X}} \mathbb{P}^x(\tau_s^{-1}(A))\, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathcal{X}} \mathbb{E}^x[\mathbb{P}^x(\tau_s^{-1}(A)|\mathscr{F}_s)\,]\, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathcal{X}} \left[\int_{D[0,\infty)} \mathbb{E}^{\pi_s(\eta)}[1_A]\; d\mathbb{P}^x(\eta)\right] d\mu(x).
\end{aligned}$$

Usando o Teorema da Convergência monótona e a igualdade acima podemos mostrar para toda função contínua $\varphi : D[0,\infty) \to \mathbb{R}$ que

$$(\mathbb{P}^\mu \circ \tau_s^{-1})(\varphi) = \int_{\mathcal{X}} \left[\int_{D[0,\infty)} \mathbb{E}^{\pi_s(\eta)}[\varphi]\; d\mathbb{P}^x(\eta)\right] d\mu(x).$$

Já que estamos lidando com processos de Feller a função $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathbb{E}^x[\varphi]$ é contínua. Portanto segue das igualdade estabelecida acima que para toda $\varphi \in C(\mathcal{X})$ temos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}^\mu \circ \tau_s^{-1})(\varphi) &= \int_{\mathcal{X}} \left[\int_{D[0,\infty)} \mathbb{E}^{\pi_s(\eta)}[\varphi]\ d\mathbb{P}^x(\eta) \right] d\mu(x) \\
&= \int_{\mathcal{X}} \left[\int_{D[0,\infty)} f \circ \pi_s(\eta)\ d\mathbb{P}^x(\eta) \right] d\mu(x) \\
&= \int_{\mathcal{X}} S(s)f(x)\ d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} f\, d[\mu S(s)] \\
&= \int_{\mathcal{X}} f\, d\mu = \int_{\mathcal{X}} \mathbb{E}^x[\varphi]\ d\mu(x) \\
&= \mathbb{P}^\mu(\varphi).
\end{aligned}$$

Como a igualdade acima é válida para qualquer $\varphi \in C(\mathcal{X})$ segue que $\mathbb{P}^\mu \circ \tau_s^{-1} = \mathbb{P}^\mu$, encerrando a demonstração. □

Note que processos estacionários $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$, podem ser estendidos de maneira natural à processos definidos em todo $\mathbb{R}$, simplesmente declarando que a lei de $\{X_{t+s} : t \geq 0\}$ para todo $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$ é a mesma que a lei de $\{X_t : t \geq 0\}$.

Apêndice

Neste apêndice são apresentados alguns enunciados de teoremas clássicos de análise utilizados ao longo do texto.

Teorema 16. *Sejam $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e $f : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ uma função $\mathcal{F}$-mensurável. Então existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ com as seguintes propriedades:*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$ a função $\varphi_n : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ é mensurável segundo $\mathcal{F}$;*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathcal{X}$ temos $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$;*
3. *$\forall n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathcal{X}$ temos $|\varphi_n(x)| \leq \sup\{|f(x)| : x \in \mathcal{X}\}$;*
4. *$\varphi_n(x) \uparrow f(x)$, para todo $x \in \mathcal{X}$.*

Teorema 17. *Sejam $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $\{S(s) : s \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares contínuos agindo em $\mathcal{B}$. Para cada $t \geq 0$ fixado, são equivalentes:*

1. *Para todo funcional linear contínuo $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ e para todo elemento $f \in \mathcal{B}$ temos*
$$\lim_{s\to t^+} |F(S(s)f) - F(S(t)f)| = 0.$$
2. *Para todo elemento $f \in \mathcal{B}$ temos*
$$\lim_{s\to t} \|S(s)f - S(t)f\| = 0.$$

Lemma 1 (Lema de Krein-Milman)**.** *Se K é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de algum espaço vetorial topológico X localmente convexo. Então K tem pelo menos um ponto extremal.*

Teorema 18 (Teorema de Krein-Milman)**.** *Se K é um subconjunto não-vazio, compacto e convexo de algum espaço vetorial topológico X localmente convexo. Então K é o fecho da envoltória convexa de seus pontos extremais.*

Agradecimentos

Agradecemos ao Hugo Cattarucci Botós do ICMC-USP São Carlos, por apontar uma falha na prova da Proposição 15 na primeira versão deste texto.

Referências

[1] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor. *Markov processes and potential theory.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 29. Academic Press, New York-London, 1968.

[2] L. Cioletti, P. H. Costa, L. R. Lucinger, and R. P. Silva. Processos de markov a tempo contínuo e sistemas de partículas. *Notas manuscritas - Universidade de Brasília*, 2016.

[3] u. I. I. Gī hman and A. V. Skorohod. *The theory of stochastic processes. II.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Translated from the Russian by Samuel Kotz, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 218.

[4] T. M. Liggett. *Interacting particle systems.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.

[5] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. Reprint of the 1967 original.

[6] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[7] K. Yosida. *Functional analysis*, volume 123 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin-New York, sixth edition, 1980.