Processos de Markov a Tempo Contínuo e Sistemas de Partículas
Parte 4

Leandro Cioletti
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
cioletti@mat.unb.br

Ricardo Parreira
Departamento de Matemática - UnB
70910-900, Brasília, Brazil
rpsilva@unb.br

8 de fevereiro de 2017

Resumo

Um dos objetivos principais destas notas é apresentar o conceito de gerador de Markov e suas relações com os semigrupos de Markov. Um dos principais resultados será o Teorema de Hille-Yosida (HY), cuja a prova será dada em detalhes. Uma das conclusões do Teorema HY, a chamada *fórmula exponencial*, será provada aqui usando técnicas da Teoria de Probabilidade, seguindo de perto a referência [3].

Estas notas estão organizadas da seguinte forma. Primeiro vamos introduzir a ideia de pré-gerador de Markov, estabelecer algumas de suas propriedades elementares e depois introduzir o conceito de Gerador de Markov. Apresetaremos também alguns resultados clássicos de Teoria Espectral com vista a provar o Teoremas de Hille-Yosida. Finalizamos com uma aplicação do Teorema de Hille-Yosida na caracterização do conjunto $\mathscr{I}$, das medidas invariantes, introduzido na Parte 3 destas notas. As principais referências são [1, 2].

1 Pré-Geradores de Markov

Definição 1 (Pré-gerador de Markov)**.** Um operador linear T (não necessariamente limitado) definido em $\mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X})$ tomando valores em $C(\mathcal{X})$ é chamado de *pré-gerador de Markov* se ele satisfaz as seguintes condições:

1. $1 \in \mathcal{D}(T)$ e $T(1) = 0$;
2. $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$;

3. Para todo $f \in \mathcal{D}(T)$ e $\lambda \geq 0$ temos que a função g dada por $g = f - \lambda T(f)$, satisfaz:
$$\min_{x \in \mathcal{X}} g(x) \leq \min_{x \in \mathcal{X}} f(x).$$

Observação. Aplicando a propriedade (3) para a função $(-f)$ obtemos a seguinte equivalência:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} (-g)(x) \leq \min_{x \in \mathcal{X}} (-f)(x) \iff \max_{x \in \mathcal{X}} f(x) \leq \max_{x \in \mathcal{X}} g(x).$$

Exercício 2. Seja $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ um pré-gerador de Markov. Mostre que se

$$f \in \mathcal{D}(T), \ \ \lambda \geq 0 \ \text{ e } \ g = f - \lambda T(f), \qquad \text{então} \qquad \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty. \tag{1}$$

Em particular, segue da condição (3) da definição de pré-gerador de Markov que g determina f unicamente. De fato, se $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(T)$ são tais que $f_1 - \lambda T(f_1) = g = f_2 - \lambda T(f_1)$, então $(f_1 - f_2) - \lambda T(f_1 - f_2) = 0$. Desta forma, segue do Exercício 2 que $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \|0\|_\infty = 0$.

A seguir, apresentamos um resultado que nos fornece uma maneira bastante prática de provar a validade do item (3) da definição acima.

Proposição 3. *Se $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é um operador linear que satisfaz a condição:*

> *para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ temos que $T(f)(x_0) \geq 0$, para qualquer $x_0 \in \mathcal{X}$ ponto de mínimo global de f.*

Então, T satisfaz a condição (3) da Definição 1.

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{D}(T)$, $\lambda \geq 0$ e $g = f - \lambda T(f)$. Seja x_0 qualquer ponto de mínimo global de f (a existência de pelo meno um ponto com esta propriedade segue da continuidade de f e compacidade de $\mathcal{X}$). Então, temos

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) = f(x_0) \geq f(x_0) - \lambda T(f)(x_0) = g(x_0) \geq \min_{x \in \mathcal{X}} g(x).$$

□

2 Exemplos de Pré-geradores de Markov

A seguir apresentamos 3 exemplos de operadores lineares onde podemos usar a Proposição 3 para mostrar que tais operadores são de fato pré-geradores de Markov.

Example 1. Considere $T = L - I$, onde L é um operador positivo definido, com $\mathcal{D}(T) = C(\mathcal{X})$ e $L(1) = 1$.

Neste caso as condições (1) e (2) da Definição 1 são imediatas. Ademais, dada qualquer função $f \in C(\mathcal{X})$, se x_0 é um mínimo global de f, então a função $h(x) = f(x) - f(x_0)$ é tal que $h \geq 0$, de modo que $Lh \geq 0$ e, como temos ainda $L(1) = 1$, segue que

$$\begin{aligned} T(f)(x_0) = (L - I)(f)(x_0) = L(f)(x_0) - f(x_0) &= L(f)(x_0) - f(x_0)[L(1)(x_0)] \\ &= L(f - f(x_0) \cdot 1)(x_0) \\ &= L(h)(x_0) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Este fato permite aplicar a Proposição 3 e concluir que o item (3) da Definição 1 é satisfeito.

Example 2. Considere $\mathcal{X} = [0, 1]$ e T o operador definido por

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} f''(x)$$

no seguinte subespaço, do espaço das funções duas vezes diferenciáveis $C^2(\mathcal{X})$,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in C^2(\mathcal{X}) : f'(0) = 0 = f'(1)\}.$$

Neste exemplo temos claramente $T(1) = 0$. Para ver que $\mathcal{D}(T)$ é denso, vamos mostar que podemos aplicar o Teorema de Stone-Weierstrass. De fato, o conjunto $\mathcal{D}(T)$ é uma álgebra de funções que possui as funções contantes e que separa pontos (note que a função $x \to \cos(\pi x)$ está em $\mathcal{D}(T)$). Resta apenas verificar que podemos aplicar a Proposição 3.

Se $f \in \mathcal{D}(T)$ e x_0 é um ponto de mínimo globlal de f, então segue de resultados elementares da teoria clássica de funções de uma variável real que $0 \leq (1/2) f''(x_0) = T(f)(x_0)$. Note que, se $x_0 = 0$ ou 1, é crucial para a conclusão usar que $f'(0) = 0 = f'(1)$.

Example 3. Considere $\mathcal{X} = [0, 1]$ e T o operador definido por

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} f''(x)$$

no seguinte subespaço, do espaço das funções duas vezes diferenciáveis $C^2(\mathcal{X})$,

$$\mathcal{D}(T) = \{f \in C^2(\mathcal{X}) : f''(0) = 0 = f''(1)\}.$$

Como no exemplo anterior, é imediato verificar que $T(1) = 0$ e que $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$, utilizando novamente o Teorema de Stone-Weierstrass (neste exemplo a hipótese de separação de pontos pode ser provada usando a função $f(x) = x$).

A prova da validade do item 3 da definição de pré-gerador e semelhante a dada no exemplo anterior quando o ponto de mínimo global x_0 está no interior do intervalo $[0, 1]$ Se x_0 for um ponto de fronteira devemos usar neste exemplo que $f''(0) = 0 = f''(1)$. Daí concluímos que podemos aplicar a Proposição 3.

Observação. Existem poucos exemplos onde $\mathcal{D}(T)$ e T são completamente conhecidos.

3 Operadores Fechados (Revisão)

Definição 4. Um operador linear $S : \mathcal{D}(S) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é chamado de uma extensão de T, se $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ e $S(f) = T(f)$ para todo $f \in \mathcal{D}(T)$. Neste caso escrevemos $T \subset S$.

O gráfico de um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é o subconjunto do produto cartesiano $C(\mathcal{X}) \times C(\mathcal{X})$ dado por

$$\Gamma(T) \equiv \{ (f, Tf) \in C(\mathcal{X}) \times C(\mathcal{X}) \ : \ f \in \mathcal{D}(T)\}.$$

Definição 5. Dizemos que um operador linear T é fechado se $\Gamma(T)$ é um subconjunto fechado de $C(\mathcal{X}) \times C(\mathcal{X})$, munido da topologia induzida pela métrica $\|(x, y)\| \mapsto \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Definição 6. Um operador T é dito fechável se existe alguma extensão S de T que é fechado (ou seja, $T \subset S$ e S é fechado).

Se um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ admite pelo menos uma extensão fechada S, então podemos definir um novo operador linear fechado $\overline{T}$, chamado de fecho de T, cujo gráfico é dado por

$$\Gamma(\overline{T}) \equiv \bigcap_{\substack{S \supset T \\ S \text{ fechado}}} \Gamma(S).$$

Definição 7. Se T é um operador fechável, denotamos por $\overline{T}$ a menor extensão fechada de T. Neste caso o operador $\overline{T}$ é chamado de fecho de T.

Exercício 8. Suponha que T é um operador linear fechável definido em $\mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X})$. Mostre que $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

Exercício 9. Mostre que um operador linear $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é fechável se, e somente se, nenhum elemento da forma $(0, g)$, com $g \neq 0$ é limite de elementos da forma (f, Tf) com $f \in \mathcal{D}(T)$.

Exercício 10. Se $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ é um operador fechado. Mostre que para todo $\lambda \geq 0$ o operador $\lambda I - T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ é um operador fechado.

No exemplo a seguir, exibimos um operador fechado mas que não é limitado.

Example 4. Considere $E = [0, 1]$ e $\mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X})$ o seguinte subespaço:

$$\mathcal{D}(T) \equiv \{f \in C(\mathcal{X}) : f' \in C(\mathcal{X})\} = C^1(E).$$

Vamos considerar ambos $\mathcal{D}(T)$ e $C(\mathcal{X})$ munidos da topologia gerada pela norma $\| \cdot \|_\infty$. Claramente $(\mathcal{D}(T), \| \cdot \|_\infty)$ e $(C(\mathcal{X})), \| \cdot \|_\infty)$ são espaços normados. Note que espaço $(\mathcal{D}(T), \| \cdot \|_\infty)$ não é Banach. De fato, basta observar que a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - 1/2|$, é limite uniforme de polinômios pelo Teorema de Stone-Weierstrass.

Observe que podemos também utilizar o Teorema de Stone-Weierstrass para garantir que $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$.

Defina ooperador linear $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ pondo $T(f) = f'$. Claramente T não é operador limitado pois, $f_n(x) = \cos(n\pi x)$ é um elemento da esfera unitária de $\mathcal{D}(T)$, cuja norma de sua imagem por T satisfaz $\|Tf\|_\infty = \pi n$. Já que $\mathcal{D}(T)$ e $C(\mathcal{X})$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$ são espaços normados, podemos afirmar que T não é contínuo.

No entanto, afirmamos que $\Gamma(T)$ é fechado. De fato, suponha que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de funções em $\mathcal{D}(T)$ tal que $(f_n, T(f_n)) \to (f, g)$. Pela definição da topologia em $C(\mathcal{X}) \times C(\mathcal{X})$ temos que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ e $\|T(f_n) - g\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$. Desta forma, podemos garantir para todo $t \in [0, 1]$ que

$$f_n(t) - f_n(0) = \int_0^t f_n'(s)\, ds = \int_0^t T(f_n)(s)\, ds$$

Da igualdade acima eda convergência uniforme de f_n para f e $T(f_n)$ para g, segue que

$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(s)\, ds,$$

de modo que f tem derivada contínua dada por $f' = g$, ou seja, $f \in \mathcal{D}(T)$. Já que $(f_n, T(f_n)) \to (f, g) = (f, f') = (f, T(f))$, segue que o gráfico de T é fechado.

É importante observar que nem todo operador linear T tem um fecho. O que pode acontecer é que o fecho do gráfico de um operador linear T pode não ser o gráfico de um operador linear. Um exemplo simples de um operador em $C([0, 1])$ não tendo fecho é dado pelo operador T definido em $\mathcal{D}(T) = \{f \in C([0, 1]) : f'(0) \text{ existe}\}$ e dado por $T(f)(x) = f'(0)$, para toda $f \in \mathcal{D}(T)$. Felizmente, este tipo de problema não ocorre para pré-geradores de Markov, como mostra a seguinte proposição. Antes, porém, vamos provar um lema técnico que será utilizado no final da prova da proposição seguinte.

Lemma 1. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $C(\mathcal{X})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \min_{x\in\mathcal{X}} f_n(x) = \min_{x\in\mathcal{X}} f(x).$$

Demonstração. Lembramos que, para qualquer par de funções $f, g \in C(\mathcal{X})$, temos

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) + \min_{x\in\mathcal{X}} g(x) \leq \min_{x\in\mathcal{X}} \{f(x) + g(x)\}.$$

Portanto

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) = \min_{x\in\mathcal{X}} \{f(x) - g(x) + g(x)\} \geq \min_{x\in\mathcal{X}} \{f(x) - g(x)\} + \min_{x\in\mathcal{X}} g(x).$$

Como

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \{-f(x)\} = -\max_{x\in\mathcal{X}} f(x),$$

segue da desigualdade acima que

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) - \min_{x\in\mathcal{X}} g(x) \geq \min_{x\in\mathcal{X}}\{f(x) - g(x)\} = -\max_{x\in\mathcal{X}}\{g(x) - f(x)\}.$$

Logo,

$$\min_{x\in\mathcal{X}} g(x) - \min_{x\in\mathcal{X}} f(x) \leq \max_{x\in\mathcal{X}}\{g(x) - f(x)\} \leq \|f - g\|_\infty.$$

Trocando os papeis de f e g podemos verificar que

$$-\left(\min_{x\in\mathcal{X}} g(x) - \min_{x\in\mathcal{X}} f(x)\right) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Portanto,

$$\left|\min_{x\in\mathcal{X}} g(x) - \min_{x\in\mathcal{X}} f(x)\right| \leq \|f - g\|_\infty.$$

Aplicando a desigualdade acima para $g = f_n$, concluímos imediatamente a prova do lema. $\square$

4 O Fecho de Pré-geradores de Markov

Nesta seção vamos mostrar dois resultados topológicos sobre pré-geradores de Markov. O primeiro deles mostra que um pré-gerador é sempre um operador fechável e o seguinte prova que a imagem do operador $I-\lambda T : \mathcal{D}(T) \to C(X)$ é sempre um subespaço fechado de $(C(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\infty)$.

Proposição 11. *Se $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é um pré-gerador de Markov, então T é um operador fechável e, além disso, $\overline{T}$ é um pré-gerador de Markov.*

Demonstração. Suponha que existe uma sequência $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $\|f_n\|_\infty \to 0$ e $\|Tf_n - h\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$. Para quaisquer $g \in \mathcal{D}(T)$ e $\lambda \geq 0$, temos por (1) que

$$\|f_n + \lambda g\|_\infty \leq \|(I - \lambda T)(f_n + \lambda g)\|_\infty.$$

Como estamos supondo que $\|f_n\|_\infty \to 0$ e $\|Tf_n - h\|_\infty \to 0$, podemos tomar o limite quando $n \to \infty$ na desigualdade acima, que resulta em

$$\|\lambda g\|_\infty \leq \|\lambda g - \lambda h - \lambda^2 T g\|_\infty.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por λ e em seguida tomando o limite quando $\lambda \downarrow 0$, obtemos $\|g\|_\infty \leq \|g - h\|_\infty$. Já que $g \in \mathcal{D}(T)$ é arbitrária e $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$, segue desta última desigualdade que $h = 0$. Portanto, segue do Exercício 9 que T é fechável.

Para verificar que $\overline{T}$ é um pré-gerador de Markov, basta mostrar que este operador satisfaz a propriedade (3) da Definição 1. Suponha que $f \in \mathcal{D}(\overline{T})$, $\lambda \geq 0$ e $f - \lambda\overline{T}f = g$. Pela definição de $\overline{T}$ sabemos que existe uma sequência $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, bem como $\|T(f_n) - \overline{T}(f)\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$. Defina g_n por

$f_n - \lambda T f_n = g_n$. Já que o operador T é um pré-gerador de Markov, segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f_n(x) \geq \min_{x\in\mathcal{X}} g_n(x).$$

Como $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ e $\|T(f_n) - \overline{T}(f)\|_\infty \to 0$, temos que $\|g_n - g\|_\infty \to 0$. Agora, uma aplicação direta do Lema 1, em ambos os lados da desigualdade acima, permite concluir que

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) \geq \min_{x\in\mathcal{X}} g(x),$$

mostrando finalmente que $\overline{T}$ satisfaz a propriedade (3) da Definição 1 e, portanto, é um pré-gerador de Markov. □

Antes de apresentar a definição de um gerador de Markov, gostaríamos de destacar a seguinte propriedade de um pré-gerador de Markov.

Proposição 12. *Suponha que $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ é um pré-gerador de Markov fechado. Então a imagem de $I - \lambda T$, que denotamos por $\mathrm{Im}(I - \lambda T)$, é um subconjunto fechado de $C(\mathcal{X})$, para todo $\lambda \geq 0$.*

Demonstração. Se $\lambda = 0$, a afirmação do Teorema é obviamente verdadeira. Portanto, vamos assumir que $\lambda > 0$. Suponha que $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ seja uma sequência em $\mathrm{Im}(I - \lambda T)$ com $\|g_n - g\|_\infty \to 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, segue da observação feita logo abaixo da expressão (1) que existe uma única $f_n \in \mathcal{D}(T)$ na pré-imagem de g_n por $I - \lambda T$, isto é, $(I - \lambda T)f_n = g_n$. Desta forma, temos da linearidade do operador $I - \lambda T$ e da definição de f_n que, para todos $n, m \in \mathbb{N}$,

$$(f_n - f_m) - \lambda T(f_n - f_m) = g_n - g_m.$$

Por (1) temos que $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|g_n - g_m\|_\infty$. Já que $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy, segue que a sequência $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}(T) = C(\mathcal{X})$. Portanto, existe $f \in C(\mathcal{X})$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Por outro lado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} Tf_n = \frac{1}{\lambda} \lim_{n\to\infty} (f_n - g_n) = \frac{1}{\lambda}(f - g),$$

ou seja, Tf_n converge. Como T é fechado, segue que $\|Tf_n - Tf\|_\infty \to 0$. Com isso, fazendo $n \to \infty$ em $(I - \lambda T)f_n = g_n$, obtemos

$$f - \lambda T f = g,$$

o que garante que $g \in \mathrm{Im}(I - \lambda T)$ e, portanto, a proposição está demonstrada. □

5 Geradores de Markov

Definição 13 (Gerador de Markov)**.** Um operador $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é um gerador de Markov se

1. T é um pré-gerador de Markov;
2. T é fechado;
3. para algum $\varepsilon > 0$, temos $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X}), \ \ \forall \, \lambda \in (0, \varepsilon)$.

Para obter um gerador de Markov a partir de um pré-gerador de Markov, muitas vezes utilizamos o seguinte resultado.

Proposição 14. *Se $T : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ é um pré-gerador de Markov limitado, então T é um gerador de Markov.*

Demonstração. Como T é um operador limitado e $\mathcal{D}(T) = C(\mathcal{X})$, segue que $\overline{T} = T$. Portanto, T é um pré-gerador de Markov fechado.

Para finalizar a prova basta mostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$, para todo $\lambda \in (0, \varepsilon)$. Tome $\varepsilon = 1/\|T\|$ e considere $\lambda \in (0, \varepsilon)$. Para qualquer função $g \in C(\mathcal{X})$ dada, temos bem definido o seguinte limite

$$f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n g$$

e além do mais $f \in C(\mathcal{X})$. De fato, pela completude de $C(\mathcal{X})$ basta mostrar que a série acima é absolutamente somável. Mas este fato é consequência imediata da desigualdade triangular, da limitação de T e de $\lambda < 1/\|T\|$, como mostrado abaixo

$$\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^n g \|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|T^n g\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|T\|^n \|g\|_\infty = \|g\|_\infty \frac{1}{1 - \lambda \|T\|}.$$

Já que é imediato verificar que $f - \lambda T f = g$, a proposição está demonstrada. □

A seguir, vamos mostrar como podemos usar a condição (3) da definição de gerador de Markov para mostrar que para todo $\lambda \geq 0$ existe $(I - \lambda T)^{-1}$ e que este operador é limitado.

Proposição 15. *Se $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ um pré-gerador de Markov, então para todo $\lambda \geq 0$ existe $(I - \lambda T)^{-1} : \mathrm{Im}(I - \lambda T) \to \mathcal{D}(T)$ e além do mais*

$$\|(I - \lambda T)^{-1}\| \equiv \sup_{\substack{g \in \mathrm{Im}(I - \lambda T) \\ \|g\|_\infty = 1}} \|(I - \lambda T)^{-1} \, g\|_\infty \leq 1.$$

Demonstração. Como mencionado anteriormente segue do item 3 da definição de pré-gerador de Markov que a aplicação $\mathcal{D}(T) \ni f \mapsto f - \lambda T(f)$ é linear e injetiva. Portanto admite uma inversa linear definida no subespaço $\mathrm{Im}(I - \lambda T)$.

Portanto para cada $g \in \mathrm{Im}(I - \lambda T)$ tal que $\|g\|_\infty = 1$, existe uma única $f \in \mathcal{D}(T)$ tal que $g = (I - \lambda T) f$. Pelo Exercício 2 temos que $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty = 1$. Já que temos $f = (I - \lambda T)^{-1} \, g$ segue da observação anterior que $\|(I - \lambda T)^{-1} \, g\|_\infty \leq 1$. Como este argumento é uniforme em g a proposição está demonstrada. □

Proposição 16. *Se* $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ *é um gerador de Markov, então, para todo* $\lambda \geq 0$, *temos que* $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$.

Demonstração. É suficiente mostrar que, se para algum $\lambda > 0$ temos $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$, então para todo γ real satisfazendo $\gamma > \lambda$ temos $\mathrm{Im}(I - \gamma T) = C(\mathcal{X})$.

Para provar que esta afirmação é verdadeira, devemos mostrar que, dada $g \in C(\mathcal{X})$, existe $f \in C(\mathcal{X})$ tal que $f - \gamma T f = g$. Recorde que a observação feita logo abaixo da expressão (1) garante que se T é pré-gerador de Markov, então o operador linear $I - \lambda T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ é injetivo. Como estamos assumindo que $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$, segue que $I - \lambda T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ é uma bijeção. Desta forma podemos definir o operador $A : C(\mathcal{X}) \to \mathcal{D}(T)$ dado por

$$Ah = \frac{\lambda}{\gamma}(I - \lambda T)^{-1} g + \frac{\gamma - \lambda}{\gamma}(I - \lambda T)^{-1} h.$$

Usando a Proposição 15 podemos concluir que

$$\|Ah_1 - Ah_2\|_\infty = \|\frac{\gamma - \lambda}{\gamma}(I - \lambda T)^{-1}(h_1 - h_2)\|_\infty \leq \frac{\gamma - \lambda}{\gamma}\|h_1 - h_2\|_\infty.$$

Como $(\gamma - \lambda)/\gamma < 1$, segue da desigualdade acima e do Teorema de Ponto Fixo de Banach que existe $f \in C(X)$ tal que $Af = f$, isto é,

$$f = \frac{\lambda}{\gamma}(I - \lambda T)^{-1} g + \frac{\gamma - \lambda}{\gamma}(I - \lambda T)^{-1} f.$$

Tomando $I - \lambda T$ em ambos lados da igualdade acima concluímos que

$$\begin{aligned} (I - \lambda T) f = \frac{\lambda}{\gamma} g + \frac{\gamma - \lambda}{\gamma} f \implies & \frac{\gamma}{\lambda}(I - \lambda T) f = \frac{\gamma}{\lambda}\frac{\lambda}{\gamma} g + \frac{\gamma}{\lambda}\frac{\gamma - \lambda}{\gamma} f \\ \implies & f - \gamma T f = g. \end{aligned}$$

A última igualdade prova a afirmação feita acima. □

6 Teoria Espectral e Propriedades do Resolvente 1

Definição 17 (Resolvente)**.** Considere $T : \mathcal{D}(T) \subset C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ um operador linear fechado (não necessariamente limitado). O conjunto resolvente de T é o conjunto de todos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que:

(1) $\mathrm{Im}(\lambda I - T) = C(\mathcal{X})$;

(2) existe $(\lambda I - T)^{-1} : C(\mathcal{X}) \to \mathcal{D}(T)$;

(3) $(\lambda I - T)^{-1}$ é um operador linear limitado.

O conjunto resolvente de T é denotado por $\rho(T)$. A família de operadores lineares limitados $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$, com $\lambda \in \rho(T)$, é chamada de resolvente de T.

Teorema 18 (Identidade do Resolvente). *Considere $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ um operador linear e $\lambda, \theta \in \rho(T)$ com $\lambda \neq \theta$. Então é válida a seguinte identidade*

$$R(\lambda, T) - R(\theta, T) = (\theta - \lambda) R(\lambda, T) R(\theta, T).$$

Demonstração. Para provar o teorema só precisamos usar que, para todo $\lambda \in \rho(T)$, temos $R(\lambda, T)(\lambda I - T) = I = (\lambda I - T) R(\lambda, T)$ bem como as propriedades algebricas elementares de operadores lineares como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} R(\lambda, T) - R(\theta, T) &= R(\lambda, T) - R(\lambda, T)(\lambda I - T) R(\theta, T) \\ &= R(\lambda, T)[I - (\lambda I - T) R(\theta, T)] \\ &= R(\lambda, T)[(\theta I - T) R(\theta, T) - (\lambda I - T) R(\theta, T)] \\ &= R(\lambda, T)[(\theta I - T) - (\lambda I - T)] R(\theta, T) \\ &= R(\lambda, T)(\theta - \lambda) R(\theta, T) \\ &= (\theta - \lambda) R(\lambda, T) R(\theta, T). \end{aligned}$$

□

Na sequência vamos mostrar que se $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ é um operador fechado, então $\rho(T)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Vamos mostrar também que se $\rho(T) \neq \emptyset$ então a aplicação $\lambda \mapsto R(\lambda, T) \equiv (\lambda - T)^{-1}$ é analítica em $\rho(T)$. Antes de passarmos aos enunciados e provas destes resultados, vamos introduzir algumas notações e lembrar a definição de analiticidade em nosso contexto.

Daqui por diante $\mathcal{N}$ denotará um subespaço de $C(\mathcal{X})$. Vamos sempre pensar em $\mathcal{N}$ como um espaço normado com a norma do supremo. Usaremos a notação $\mathcal{L}(\mathcal{N}, C(\mathcal{X}))$ para designar o espaço de todos os operadores lineares limitados de $\mathcal{N}$ para $C(\mathcal{X})$. Para cada operador linear $L \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, C(\mathcal{X}))$ definimos de maneira usual $\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}, C(\mathcal{X}))}$, a norma de operadores de L, como segue

$$\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}, C(\mathcal{X}))} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{N} \\ 0 < \|f\|_\infty \leq 1}} \frac{\|Lf\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

Para evitar uma notação muito pesada, quando for conveniente e claro pelo contexto, vamos omitir da notação da norma de operadores o sub-índice $\mathcal{L}(\mathcal{N}, C(\mathcal{X}))$, escrevendo apenas $\|L\|$ para denotar $\|L\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}, C(\mathcal{X}))}$.

Definição 19 (Analiticidade). Considere $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Suponha que a cada $\lambda \in U$ seja possível associar um operador linear limitado $R(\lambda) : \mathcal{N} \to C(\mathcal{X})$, onde $\mathcal{N}$ é um subespaço de $C(\mathcal{X})$. Dizemos que a aplicação $\lambda \mapsto R(\lambda)$ é analítica em U se, para cada $\lambda_0 \in U$ fixado, existe um raio $r > 0$ (que pode depender de λ_0) e uma sequência de operadores lineares contínuos $A_k(\lambda_0) : \mathcal{N} \to C(\mathcal{X})$ tais que, para todo $\lambda \in U$ satisfazendo $|\lambda - \lambda_0| < r$, temos

$$\left\| R(\lambda) - \sum_{k=0}^{n} (\lambda - \lambda_0)^k A_k(\lambda_0) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{N}, C(\mathcal{X}))} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Teorema 20 (Analiticidade de $R(\lambda, T)$). *Considere $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ um operador fechado tal que $\rho(T) \neq \emptyset$. Se $\lambda_0 \in \rho(T)$, então*

$$B_{\lambda_0} \equiv \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|R(\lambda_0, T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(T), C(\mathcal{X}))}} \right\} \subset \rho(T)$$

e, além do mais, para todo $\lambda \in B_{\lambda_0}$ temos

$$\left\| R(\lambda, T) - \sum_{k=0}^{n} (\lambda - \lambda_0)^k R^{k+1}(\lambda_0, T) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(T), C(\mathcal{X}))} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Em particular, $\rho(T)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e a aplicação $\lambda \mapsto R(\lambda, T)$ é analítica em $\rho(T)$.

Demonstração. Para todo $\lambda_0 \in \rho(T)$ temos por definição que $R(\lambda_0, T)$ é um operador linear cuja a norma de operador $\|R(\lambda_0, T)\| > 0$. Para cada $\lambda \in B_{\lambda_0}$ fixado, definimos $q \equiv q(\lambda) \equiv |\lambda_0 - \lambda| \cdot \|R(\lambda_0, T)\| < 1$. Pela definição de q e pelas propriedades elementares da norma de operadores podemos ver que a sequência $\{\delta_k : k \geq 0\}$, definida por $\delta_k \equiv \|(\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T)\|$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$\delta_k \leqslant q^k \|R(\lambda_0, T)\|, \qquad \forall k \geq 0.$$

Logo temos para todo $n \in \mathbb{N}$ a seguinte estimativa uniforme

$$\sum_{k=0}^{n} \|(\lambda - \lambda_0)^k R^{k+1}(\lambda_0, T)\| \;=\; \sum_{k=0}^{n} \delta_k \;\leq\; \|R(\lambda_0, T)\| \sum_{k=0}^{n} q^k \;\leq\; \|R(\lambda_0, T)\| \frac{1}{1-q}.$$

Já que $\mathcal{L}(\mathcal{D}(T), C(\mathcal{X}))$ munido da norma de operadores $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(T), C(\mathcal{X}))}$ é um espaço de Banach (ver Teorema 30), segue da estimativa acima que, para cada $\lambda \in B_{\lambda_0}$, existe $L(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(T), C(\mathcal{X}))$ tal que

$$\left\| L(\lambda) - \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T) \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{2}$$

Como de costume vamos escrever

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T),$$

onde a convergência da série acima deve ser entendida no sentido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(T), C(\mathcal{X}))}$.

Para terminar a prova do teorema é suficiente mostrar que $L(\lambda) = R(\lambda, T)$, para todo $\lambda \in B_{\lambda_0}$. Vamos dividir a prova deste fato em duas partes. A primeira parte consistirá em mostrar que, para todos $f \in \mathcal{D}(T)$ e $\lambda \in B_{\lambda_0}$, vale a identidade $L(\lambda)(\lambda I - T)f = f$. Com efeito, fixado $f \in \mathcal{D}(T)$, temos

$$\|L(\lambda)(\lambda I - T)f - \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T)(\lambda I - T)f\|_\infty$$

$$\leq \left\| L(\lambda) - \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T) \right\| \cdot \|(\lambda I - T)f\|_\infty.$$

Da desigualdade acima e de (2) temos para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ que

$$L(\lambda)(\lambda I - T)f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T)(\lambda I - T)f,$$

onde a convergência acima deve ser entendida com respeito a norma $\| \cdot \|_\infty$.

Somando e subtraindo $\lambda_0 I$ na expressão $R^{k+1}(\lambda_0, T)(\lambda I - T)$, podemos verificar que

$$\begin{aligned} R^{k+1}(\lambda_0, T)(\lambda I - T)f &= R^{k+1}(\lambda_0, T)[(\lambda_0 I - T)f - (\lambda_0 - \lambda)f] \\ &= R^k(\lambda_0, T)f - (\lambda_0 - \lambda)R^{k+1}(\lambda_0, T)f \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{D}(T)$. Usando a identidade acima, um argumento de somas telescópicas e a desigualdade $\|(\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R^{n+1}(\lambda_0, T)f\|_\infty \leq q^{n+1}\|f\|_\infty$, podemos verificar que

$$\begin{aligned} L(\lambda)(\lambda I - T)f &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T)(\lambda I - T)f \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^k(\lambda_0, T)f - \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^{k+1} R^{k+1}(\lambda_0, T)f \right) \\ &= f - \lim_{n\to\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R^{n+1}(\lambda_0, T)f \\ &= f. \end{aligned}$$

Portanto, $L(\lambda)(\lambda I - T)f = f$.

A segunda parte do argumento consistirá em provar que, dada $f \in C(\mathcal{X})$, a identidade $(\lambda I - T)L(\lambda)f = f$ é válida. De fato, denote por $s_n(L(\lambda))$ a soma parcial da série que define $L(\lambda)$, isto é,

$$s_n(L(\lambda)) \equiv \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^{k+1}(\lambda_0, T) = R(\lambda_0, T) \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^k(\lambda_0, T).$$

Pela definição de resolvente temos que $\mathrm{Im}(R(\lambda_0, T)) = \mathcal{D}(T)$. Assim, uma consequência da igualdade acima é que, para toda $f \in C(\mathcal{X})$, temos $s_n(L(\lambda))f \in \mathcal{D}(T)$. Somando e subtraindo $\lambda_0 I$, usando a definição de $s_n(L(\lambda))$ e um argumento de somas telescópicas, temos para toda $f \in C(\mathcal{X})$ que

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)s_n(L(\lambda))f &= [(\lambda_0 I - T) - (\lambda_0 - \lambda)]s_n(L(\lambda))f \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R^k(\lambda_0, T)f - \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^{k+1} R^{k+1}(\lambda_0, T)f \\ &= f - (\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R^{n+1}(\lambda_0, T)f. \end{aligned}$$

Usando novamente a estimativa $\|(\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R^{n+1}(\lambda_0, T)f\|_\infty \leq q^{n+1}\|f\|_\infty$, concluímos que o último termo acima converge para f, quando $n \to \infty$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \|(\lambda I - T)s_n(L(\lambda))f - f\|_\infty = 0. \tag{3}$$

Pela definição do operador $L(\lambda)$, sabemos que $\|s_n(L(\lambda))f - L(\lambda)f\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$. Este fato juntamente com (3) implica que, na topologia de $C(\mathcal{X}) \times C(\mathcal{X})$,

$$\big(s_n(L(\lambda))f\,,\, (\lambda I - T)s_n(L(\lambda))f\big) \xrightarrow{n\to\infty} (L(\lambda)f, f).$$

Já que T é fechado, sabemos (Exercício 10) que $\lambda I - T$ é fechado para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Portanto, da convergência acima, podemos concluir que $L(\lambda)f \in \mathcal{D}(\lambda I - T) = \mathcal{D}(T)$ e também que $\|(\lambda I - T)s_n(L(\lambda))f - (\lambda I - T)L(\lambda)f\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$. Usando este fato e (3) temos finalmente que $(\lambda I - T)L(\lambda)f = f$, para todos $f \in C(\mathcal{X})$ e $\lambda \in B_{\lambda_0}$. Assim, para todo $\lambda \in B_{\lambda_0}$ temos que

$$R(\lambda, T) = L(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R^{n+1}(\lambda_0, T),$$

o que conclui a demonstração. □

7 O Teorema de Hille-Yosida

Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de Markov o operador linear $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ definido por

$$Tf = \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(T) \equiv \left\{ f \in C(\mathcal{X}) : \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \ \text{ existe} \right\}$$

é chamado de *gerador infinitesimal* do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Observação 21. O domínio do gerador infinitesimal T de um semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$ é sempre não vazio pois, a igualdade $S(t)1 = 1$, para todo $t \geq 0$, implica que $1 \in \mathcal{D}(T)$.

Vamos apresentar a seguir um resultado que será de extrema utilidade na prova do teorema mais importante desta seção (Teorema 23) que é conhecido como Teorema de Hille-Yosida.

Teorema 22. *Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de Markov e $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ seu gerador infinitesimal. Então*

1. *Para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ e $t \geq 0$ temos que $S(t)f \in \mathcal{D}(T)$ e a aplicação $t \mapsto S(t)f$ é diferenciável com*
$$\frac{d}{dt} S(t)f = TS(t)f = S(t)Tf.$$

2. *Supondo adicionalmente que o gerador infinitesimal $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ é um pré-gerador de Markov, então temos que* $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$. *Além do mais, para toda $g \in C(\mathcal{X})$ e $\lambda \geq 0$, a solução do problema $f - \lambda Tf = g$ é dada por*

$$f = \int_0^\infty e^{-t} S(\lambda t) g \, dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad (I - \lambda T)^{-1} g = \int_0^\infty e^{-t} S(\lambda t) g \, dt. \tag{4}$$

Demonstração. **Prova do item 1.** Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de Markov e $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ seu gerador infinitesimal. Lembramos que uma dada função $f \in C(\mathcal{X})$ pertencente ao domínio do gerador infinitesimal se existe o limite

$$Tf := \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}.$$

Para verificar que a aplicação $t \longmapsto S(t)f$ é diferenciável em t, para cada $f \in \mathcal{D}(T)$ fixada, basta usar a continuidade de $S(t)$ as propriedades elementares de semigrupo como segue

$$\begin{aligned} S(t)Tf = S(t) \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(S(s)f) - f) &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big[S(t)(S(s)f) - S(t)f\Big] \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big[S(t+s)f - S(t)f\Big] \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big[S(s)S(t)f - S(t)f\Big]. \end{aligned}$$

As igualdades acima são bastante sutis. Por exemplo, a existência do limite que aparece na última igualdade, mostra que $S(t)f \in \mathcal{D}(T)$. Além do mais, a existência do limite aparecendo na penúltima expressão prova que aplicação $t \mapsto S(t)f$ é diferenciável. Feitas estas observações é imediato verificar, a partir das igualdades acima, que

$$S(t)Tf = \frac{d}{dt}S(t)f = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\Big[S(s)S(t)f - S(t)f\Big] = TS(t)f.$$

Prova do item 2. Já que estamos assumindo que o gerador infinitesimal T do semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um pré-gerador de Markov, segue do Exercício 2 que a aplicação linear $G_\alpha : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$, dada por $f \longmapsto \alpha f - Tf$ é injetiva, para todo $\alpha > 0$. Vamos agora obter uma expressão explicita para a inversa de G_α sobre sua imagem. Para simplificar a notação, vamos denotar esta inversa por $U_\alpha \equiv G_\alpha^{-1}$. Afirmamos que para cada $f \in \mathrm{Im}(G_\alpha)$ que

$$U_\alpha f \ = \ \int_0^\infty e^{-\alpha s} S(s)f \ ds.$$

Primeiro observamos que $U_\alpha f$ está bem definida para qualquer que seja $f \in C(\mathcal{X})$. Em particular, esta aplicação linear está bem definida em $\mathrm{Im}(G_\alpha)$. Além do mais para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
U_\alpha T f &= \int_0^\infty e^{-\alpha s} S(s) T f \; ds = \int_0^\infty e^{-\alpha s} T S(s) f \; ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha s} \; \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (S(h) S(s) f - S(s) f) \; ds \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha s} \frac{1}{h} (S(h) S(s) f - S(s) f) \; ds \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} S(h) S(s) f \; ds - \int_0^\infty e^{-\alpha s} S(s) f \; ds \right] \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left[S(h) \int_0^\infty e^{-\alpha s} S(s) f \; ds - \int_0^\infty e^{-\alpha s} S(s) f \; ds \right] \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} (S(h) U_\alpha f - U_\alpha f) \\
&= T U_\alpha f
\end{aligned}$$

e portanto $U_\alpha f \in \mathcal{D}(T)$ sempre que $f \in \mathcal{D}(T)$. Para verificar que G_α é uma inversa à direita de U_α, tomamos $f \in \mathcal{D}(T)$, usamos as propriedades elementares da integral e o item 1 deste teorema como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
U_\alpha G_\alpha(f) = U_\alpha(\alpha f - T f) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} S(t)(\alpha f - T f) \; dt \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} S(t) f \; dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t} S(t)(T f) \; dt \\
&= \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} S(t) f \; dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d}{dt}(S(t) f) \; dt.
\end{aligned}$$

Aplicando uma integração por partes na última integral, temos

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d}{dt}(S(t) f) dt = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} S(t) f \; dt - f.$$

Combinando as duas expressões acima concluímos que $U_\alpha G_\alpha(f) = f$ para toda $f \in \mathcal{D}(T)$.

Para ver G_α também é uma inversa à esquerda de U_α, tomamos primeiro $f \in \mathcal{D}(T)$ e usamos novamente o item 3 deste teorema, como segue

$$U_\alpha T f \;=\; \int_0^\infty e^{-\alpha t} S(t) T f \; dt \;=\; \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} S(t) f \; dt. \tag{5}$$

Integrando por partes o lado direito da igualdade acima e usando a identidade $U_\alpha T f = T U_\alpha f$ (provada acima), podemos verificar que $T U_\alpha f = \alpha U_\alpha f - f$. Logo

$$(\alpha I - T) U_\alpha f = f. \tag{6}$$

Ou seja, $G_\alpha \circ U_\alpha(f) = f$, para toda $f \in \mathcal{D}(T)$. Já que $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$ e U_α está bem definido para qualquer $f \in C(\mathcal{X})$ podemos concluir que a igualdade acima pode ser estendida para toda $f \in C(\mathcal{X})$, finalizando a prova de que U_α é uma inversa de G_α e que $\mathrm{Im}(G_\alpha) = C(\mathcal{X})$.

Para finalizar a prova do item 2, basta observar que

$$(\alpha I - T)^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} S(t) f \, dt, \tag{7}$$

ou, equivalentemente,

$$(I - \alpha^{-1} T)^{-1} f \; = \; \alpha U_\alpha f = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha r} S(r) f \, dr. \tag{8}$$

Tomando $\lambda = \alpha^{-1}$ e fazendo a mudança de variáveis $r = \lambda t$ em (8), obtemos

$$(I - \lambda T)^{-1} f \; = \int_0^\infty e^{-t} S(\lambda t) f \, dt,$$

o que completa a demonstração do item 2.

□

Agora temos todo terreno preparado para provar o resultado mais importante desta seção.

Teorema 23 (Teorema de Hille-Yosida)**.** *Existe uma correspondência um a um entre geradores de Markov em $C(\mathcal{X})$ e semigrupos de Markov em $C(\mathcal{X})$, dada da seguinte maneira:*

1. *Para cada semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$ a expressão*

$$Tf = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(T) \equiv \left\{ f \in C(\mathcal{X}) : \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \ \text{ existe} \right\}$$

   define um gerador de Markov $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$.

2. *Para cada gerador de Markov $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ existe um semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$ tal que T é o gerador infinitesimal do semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$. Além de mais vale a seguinte fórmula exponencial*

$$S(t)f = \lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{t}{n} T \right)^{-n} f, \quad \forall \ f \in C(\mathcal{X}) \text{ e } t \geq 0.$$

Demonstração. **Prova da item 1.** A demonstração do item 1 será divida em duas etapas. Primeiro mostramos que o operador T é um pré-gerador de Markov. Em seguida, provamos que T é um gerador de Markov.

Vamos começar verificando que T é um pré-gerador de Markov. Primeiro, observamos que $1 \in \mathcal{D}(T)$ e $T(1) = 0$, pois $S(t)1 = 1$, para todo $t \geq 0$.

Para mostrar que $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$, vamos precisar considerar os seguintes operadores

$$A_h f = \frac{1}{h}\left(S(h)f - f\right) \quad \text{e} \quad B_t f = \frac{1}{t}\int_0^t S(s)f\ ds,$$

definidos para toda $f \in C(\mathcal{X})$.

Note que se $f \in \mathcal{D}(T)$ então $A_h f \to Tf$, quando $h \to 0$. Além disso, os operadores A_h e B_t são limitados.

Afirmamos que $A_h B_t = B_t A_h$ e que a restrição de tais operadores, à $\mathcal{D}(T)$, comutam com o gerador infinitesimal T. Primeiro vamos mostrar que $A_h B_t f = B_t A_h f$ para toda $f \in C(\mathcal{X})$. De fato, para cada $f \in C(\mathcal{X})$ temos

$$\begin{aligned}
A_h B_t f &= \frac{1}{h}\left(S(h)B_t f - B_t f\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(S(h)\left[\frac{1}{t}\int_0^t S(s)f\ ds\right] - \frac{1}{t}\int_0^t S(s)f\ ds\right) \\
&= \frac{1}{th}\left(\int_0^t S(s+h)f\ ds - \int_0^t S(s)f\ ds\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_0^t S(s)\left[\frac{1}{h}(S(h)f - f)\right]\ ds\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\int_0^t S(s)A_h f\ ds\right) \\
&= B_t A_h f.
\end{aligned}$$

Usando a segunda e a última expressões acima e a continuidade de B_t, temos para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ que existe

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(S(h)B_t f - B_t f\right) = \lim_{h\downarrow 0} B_t A_h f = B_t \lim_{h\downarrow 0} A_h f = B_t T f.$$

Em particular, $B_t f \in \mathcal{D}(T)$ para toda $f \in \mathcal{D}(T)$. Como T é um gerador infinitesimal de $\{S(t) : t \geq 0\}$ temos diretamente do item 1 do Teorema 22 que as retrições de A_h e B_t à $\mathcal{D}(T)$, comutam com T.

Agora vamos mostrar que também é possível permutar os índices do produto $A_t B_h$, isto é,

$$A_t B_h f = A_h B_t f \quad \forall f \in C(\mathcal{X}). \tag{9}$$

Já que $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$ e os operadores $A_t B_h$ e $A_h B_t$ são limitados é suficiente mostrar que (9) vale em $\mathcal{D}(T)$. Vamos então provar esta última afirmação. Dada $f \in \mathcal{D}(T)$, sabemos do Teorema Fundamental do Cálculo e do item 3 do Teorema de Hille-Yosida que

$$S(t)f - f = \int_0^t \frac{d}{ds}S(s)f\ ds = \int_0^t S(s)Tf\ ds \tag{10}$$

Este fato junto com as observações feitas acima garantem que

$$A_h B_t f = \frac{1}{h}\left(S(h)B_t f - B_t f\right) = \frac{1}{h}\int_0^h S(s)TB_t f\ ds = B_h(TB_t f). \tag{11}$$

Agora resta mostrar que $TB_t f = A_t f$. Este fato segue das definições dos operadores T e B_t, da propriedade de semigrupo, do Teorema da Convergência Dominada e da igualdade (10) como mostrado abaixo

$$\begin{aligned}
TB_t f &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(S(h)B_t f - B_t f)\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(S(h)\left[\frac{1}{t}\int_0^t S(s)f\ ds\right] - \frac{1}{t}\int_0^t S(s)f\ ds\right)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(S(s+h)f - S(s)f)\ ds\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t S(s)Tf\ ds\\
&= \frac{1}{t}(S(t)f - f)\\
&= A_t f.
\end{aligned}$$

Esta igualdade juntamente com (11) estabelece a validade de (9) para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ e como mencionado acima (9) vale para toda $f \in C(\mathcal{X})$, por densidade.

Por fim, tendo em mente a igualdade (9), podemos afirmar que dada $f \in C(\mathcal{X})$, temos

$$\lim_{h\to 0} A_h(B_t f) \ = \ \lim_{h\to 0} A_t(B_h f) = A_t f, \tag{12}$$

pois B_t é limitado e $\lim_{h\to 0} B_h f = f$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Tal relação mostra que $B_t f \in \mathcal{D}(T)$ para qualquer que seja $f \in C(\mathcal{X})$. Portanto, escolhendo qualquer sequência (t_n) que converge a zero, temos que dada $f \in C(\mathcal{X})$, a sequência $(B_{t_n} f)$ está contida em $\mathcal{D}(T)$ e converge a f, quando $n \to \infty$. Deste fato concluímos que $\mathcal{D}(T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$.

Para encerrar a prova de T é um pré-gerador de Markov devemos provar que é válida a condição 3 da definição de um pré-gerador de Markov. Para isto podemos usar a Proposição 3. Dada $f \in C(\mathcal{X})$ seja x_0 um ponto de mínimo global de f. Então a função $f - 1f(x_0) \geq 0$. Como $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de Markov podemos afirmar, para todo $h \geq 0$, que a seguinte desigualdade é valida

$$0 \leq S(h)(f - 1f(x_0)) = S(f) - S(h)(1f(x_0)) = S(h)f - f(x_0).$$

Observamos que a desigualdade acima diz que a função do lado direito é pontualmente não-negativa. Portanto esta função avaliada no ponto $x = x_0$ é um número não negativo e daí segue que

$$Tf(x_0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)f(x_0) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

provando que T satisfaz a condição 3 da definição de pré-gerador de Markov.

Para finalizar a prova do item 1 é necessário mostrar que T é fechado e que para algum $\varepsilon > 0$, temos $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$ para todo $0 < \lambda < \varepsilon$.

Vamos mostrar que T é um operador fechado. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ uma sequência tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ e $\|Tf_n - g\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$. Então segue das propriedades de continuidade e de comutatividade estabelecidas para os operadores A_h e B_t que

$$\begin{aligned}
B_t g = B_t \left(\lim_{n\to\infty} Tf_n \right) &= \lim_{n\to\infty} B_t T f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} B_t \left(\lim_{h\downarrow 0} A_h f_n \right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{h\downarrow 0} (B_t A_h f_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{h\downarrow 0} (A_h B_t f_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{h\downarrow 0} (A_t B_h f_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (A_t f_n) = A_t f.
\end{aligned}$$

Já que podemos tomar o limite quando t tende a zero no lado esquerdo da igualdade acima (e sabemos para onde ele converge!) temos

$$g \ = \ \lim_{t\to 0} B_t g \ = \ \lim_{t\to 0} A_t f \ = \ Tf.$$

Mostrando que $f \in \mathcal{D}(T)$, $Tf = g$ e portanto que T é fechado.

Para finalizar a prova do item 1 basta observar que $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$ para todo $\lambda \geq 0$, é consequência imediata de T ser pré-gerador de Markov e do item 2 do Teorema 22.

Prova do item 2. Se T é um gerador de Markov, sabemos do Exercício 2 que, para toda $f \in \mathcal{D}(T)$, a seguinte desigualdade é válida $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, onde $g = f - \lambda T(f) = (I - \lambda T)f$. Desta desigualdade e da definição de gerador de Markov temos para todo $\lambda > 0$ que o operador linear $(I - \lambda T) : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ define uma bijeção tal que $\|(I - \lambda T)^{-1} g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ para toda $g \in C(\mathcal{X})$ e portanto $\|(I - \lambda T)^{-1}\| \leq 1$.

Para todo $\lambda > 0$, temos da definição de inversa que $(I - \lambda T)(I - \lambda T)^{-1} = I$ e portanto podemos deduzir que a seguinte identidade é válida

$$(I - \lambda T)^{-1} - I = \lambda T (I - \lambda T)^{-1}.$$

Já que T comuta com $(I - \lambda T)^{-1}$ podemos mostrar $\forall\, f \in \mathcal{D}(T)$ que é válida a seguinte igualdade $T(I - \lambda T)^{-1} f = (I - \lambda T)^{-1} T f$. Usando as duas últimas igualdades e a limitação do operador $(I - \lambda T)^{-1}$, podemos afirmar para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ que

$$\|(I - \lambda T)^{-1} f - f\|_\infty = \|\lambda T(I - \lambda T)^{-1} f\|_\infty \|\lambda (I - \lambda T)^{-1} T f\|_\infty \leq \lambda \|T f\|_\infty.$$

De onde concluímos que

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|(I - \lambda T)^{-1} f - f\|_\infty = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(T).$$

Usando a convergência estabelecida logo acima, podemos verificar que o mapa

$$\mathcal{D}(T) \ni f \longmapsto \lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda T)^{-1} f$$

está bem definido e coincide com a identidade em $\mathcal{D}(T)$. Já que o limite acima define um operador linear limitado em $\mathcal{D}(T)$ que é um subespaço denso de $C(\mathcal{X})$ é possível mostrar a existência do limite acima para toda $f \in C(\mathcal{X})$. De fato, sejam $f \in C(\mathcal{X})$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(T)$ tal que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$ e $\lambda > 0$ arbitrário. Usando a desigualdade triangular temos imediatamente para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned}
\|(I - \lambda T)^{-1} f - f\|_\infty &\leq \|(I - \lambda T)^{-1} (f - f_n)\|_\infty + \|(I - \lambda T)^{-1} f_n - f\|_\infty \\
&\leq \|f - f_n\|_\infty + \|(I - \lambda T)^{-1} f_n - f\|_\infty
\end{aligned}$$

Já que a desigualdade acima é válida para todo $\lambda > 0$ e para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\limsup_{\lambda \downarrow 0} \|(I - \lambda T)^{-1} f - f\|_\infty &\leq \|f - f_n\|_\infty + \limsup_{\lambda \downarrow 0} \|(I - \lambda T)^{-1} f_n - f\|_\infty \\
&= \|f - f_n\|_\infty + \lim_{\lambda \downarrow 0} \|(I - \lambda T)^{-1} f_n - f\|_\infty \\
&= \|f - f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \\
&= 2\|f_n - f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$ segue da desigualdade acima que existe o limite

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|(I - \lambda T)^{-1} f - f\|_\infty = 0, \quad \forall f \in C(\mathcal{X}). \tag{13}$$

Vamos definir agora para cada $\lambda > 0$ um operador linear limitado $T_\lambda : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$, conhecido como *aproximação de Yosida*, da seguinte forma

$$T_\lambda \equiv T(I - \lambda T)^{-1}.$$

Como mencionado acima, temos $(I - \lambda T)^{-1} - I = \lambda T(I - \lambda T)^{-1}$ e portanto T_λ é de fato um operador linear limitado. Da desigualdade triangular segue que

$$\|T_\lambda\| = \|T(I - \lambda T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}(\|(I - \lambda T)^{-1}\| + \|I\|) = \frac{2}{\lambda}.$$

Usando novamente que T comuta com a restrição de $(I - \lambda T)^{-1}$ a $\mathcal{D}(T)$ e a identidade (13), podemos verificar para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ que

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|T_\lambda f - Tf\|_\infty = \lim_{\lambda \downarrow 0} \|T(I - \lambda T)^{-1} f - Tf\|_\infty = \lim_{\lambda \downarrow 0} \|(I - \lambda T)^{-1} Tf - Tf\|_\infty = 0.$$

No que segue vamos usar as aproximações de Yosida para definir uma família de semigrupos que auxiliará na construção do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ gerado por T.

Primeiro observamos que para todo $\lambda > 0$ e $t \geq 0$ é válida a seguinte limitação uniforme

$$\begin{aligned} \|\exp(tT_\lambda)\| &= \|\exp(t\lambda^{-1}(I - \lambda T)^{-1} - t\lambda^{-1} I)\| \\ &\leq \|\exp(t\lambda^{-1}(I - \lambda T)^{-1}) \exp(-t\lambda^{-1} I)\| \\ &\leq \|\exp(t\lambda^{-1}(I - \lambda T)^{-1})\| \cdot \|\exp(-t\lambda^{-1} I)\| \\ &\leq \exp(t\lambda^{-1}) \exp(-\lambda^{-1} t) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Como consequência da identidade do resolvente, para todo $\lambda, \xi > 0$ e $t \geq 0$ temos que os operadores lineares $\exp(tT_\lambda), \exp(tT_\xi), T_\lambda$ e T_ξ comutam entre si. Portanto para toda $f \in \mathcal{D}(T)$ temos

$$\begin{aligned} \|\exp(tT_\lambda) f - \exp(tT_\xi) f\|_\infty &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{dx} [\exp(xtT_\lambda) \exp(t(1-x)T_\xi) f] \, dx \right\|_\infty \\ &= \left\| \int_0^1 t \exp(xtT_\lambda) \exp(t(1-x)T_\xi)(T_\lambda f - T_\xi f) \, dx \right\|_\infty \\ &\leq t \int_0^1 \|(T_\lambda f - T_\xi f)\|_\infty \, dx \\ &= t \|(T_\lambda f - T_\xi f)\|_\infty. \end{aligned}$$

Para cada $f \in \mathcal{D}(T)$ e $t \geq 0$ fixados, segue da desigualdade acima que existe o seguinte limite

$$S(t) f \equiv \lim_{\lambda \downarrow 0} \exp(tT_\lambda) f.$$

Observamos que a convergência acima é uniforme em t, sempre que t tomar valores em um intervalo fechado e limitado.

Vamos mostrar agora que a familia $\{S(t) : t \geq 0\}$ define um semigrupo de Markov. Primeiro observamos que

$$S(0) f = \lim_{\lambda \downarrow 0} \exp(0 T_\lambda) f = f.$$

Usando a expansão em série de Taylor da exponencial (será aplicada ao operador limitado T_λ) podemos verificar, para todo $t \geq 0$, que

$$
\begin{aligned}
S(t)1 = \lim_{\lambda \downarrow 0} \exp(tT_\lambda)(1) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n T_\lambda^n(1)}{n!} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (T(I-\lambda T)^{-1})^n(1)}{n!} \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n ((I-\lambda T)^{-1}T)^n(1)}{n!} \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} \left(I(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n ((I-\lambda T)^{-1}T)^n(1)}{n!} \right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Para todo $t, s \geq 0$e $f \in C(\mathcal{X})$ temos

$$
S(t+s)f = \lim_{\lambda \downarrow 0} \exp((t+s)T_\lambda)f = \lim_{\lambda \downarrow 0} \exp(tT_\lambda)\exp(sT_\lambda)f.
$$

Vamos agora mostrar que o limite a direita é igual a $S(t)S(s)f$. De fato, para todo $\lambda > 0$ temos

$$
\begin{aligned}
\|\exp(tT_\lambda)\exp(sT_\lambda)f - S(t)S(s)f\|_\infty &= \|\exp(tT_\lambda)\exp(sT_\lambda)f - \exp(tT_\lambda)S(s)f\|_\infty \\
&\quad + \|\exp(tT_\lambda)S(s)f - S(t)S(s)f\|_\infty \\
&\leq \|\exp(tT_\lambda)(\exp(sT_\lambda)f - S(s)f)\|_\infty \\
&\quad + \|\exp(tT_\lambda)S(s)f - S(t)S(s)f\|_\infty \\
&\leq \|\exp(sT_\lambda)f - S(s)f\|_\infty \\
&\quad + \|\exp(tT_\lambda)S(s)f - S(t)S(s)f\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Tomando o limite quando $\lambda \uparrow 0$, em ambos lados da desigualdade acima, concluímos que para toda $f \in C(\mathcal{X})$

$$
S(t+s)f = \lim_{\lambda \downarrow 0} \exp(tT_\lambda)\exp(sT_\lambda)f = S(t)S(s)f.
$$

Para completar a prova que a família $\{S(t) : t \geq 0\}$ define um semigrupo de Markov, precisamos mostrar apenas que a aplicação $f \longmapsto S(t)f$ é contínua a direita. Isto é, fixada $f \in C(\mathcal{X})$, $t \geq 0$ temos que mostrar para todo $\varepsilon > 0$ dado, que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < s - t < \delta$, então $\|S(s)f - S(t)f\|_\infty < \varepsilon$.

Antes de mostrar este fato, observamos que para qualquer $f \in \mathcal{D}(T)$ e $\lambda > 0$ temos

$$
\|\exp(sT_\lambda)f - f\|_\infty = \left\| \int_0^s \frac{d}{dt} \exp(tT_\lambda)f \, dt \right\|_\infty = \left\| \int_0^s \exp(tT_\lambda)T_\lambda f \, dt \right\|_\infty \leq s\|T_\lambda f\|_\infty.
$$

Tomando limite na desigualdade acima quando $\lambda \to 0$ ficamos com

$$
\|S(s)f - f\|_\infty \leq s\|Tf\|_\infty. \tag{15}
$$

Voltamos agora a prova da continuidade a direita da aplicação $t \longmapsto S(t)f$. Primeiro passo é observar que a desigualdade acima permite escolher $g \in \mathcal{D}(T)$ e $\delta > 0$ tais que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon/3$ e $\|S(s-t)g - g\|_\infty < \varepsilon/3$, para $0 < s - t < \delta$. Em seguida, usamos a propriedade de semigrupo $S(t+s) = S(t)S(s)$ e a escolha de g para verificar que dado $\varepsilon > 0$ e $0 < s - t < \delta$ a seguintes desigualdades são verdadeiras

$$\begin{aligned}
\|S(s)f - S(t)f\|_\infty &= \|S(t)(S(s-t)f - f)\|_\infty \\
&= \|S(t)[S(s-t)(f-g) + (S(s-t)g - g) + (g - f)]\|_\infty \\
&\leq \|(S(s-t)(f-g) + (S(s-t)g - g) + (g - f)\|_\infty \\
&\leq \|(S(s-t)(f-g)\|_\infty + \|S(s-t)g - g\|_\infty + \|f - g\|_\infty \\
&\leq 2\|(f-g)\|_\infty + \|S(s-t)g - g\|_\infty \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim está provada a continuidade a direita e também que a família $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de Markov.

Vamos verificar agora que o operador T é o gerador infinitesimal do semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$. Como vimos acima para todo $s \geq 0$ e $\lambda > 0$ temos

$$\exp(sT_\lambda)f - f = \int_0^s \frac{d}{dt}\exp(tT_\lambda)f\,dt = \int_0^s \exp(tT_\lambda)T_\lambda f\,dt.$$

Se $f \in \mathcal{D}(T)$ podemos tomar o limite quando $\lambda \downarrow 0$, em ambos lados da igualdade acima, ficando com

$$S(s)f - f = \int_0^s S(t)Tf\,dt \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{s}(S(s)f - f) = \frac{1}{s}\int_0^s S(t)Tf\,dt$$

Usando agora o Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que existe o limite, quando $s \downarrow 0$, do lado direito da igualdade acima e que

$$\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}(S(s)f - f) = \lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}\int_0^s S(t)Tf\,dt = S(0)Tf = Tf.$$

Mostrando assim que T é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Para completar a prova do item 2 resta mostrar a validade da *fórmula exponencial*

$$S(t)f = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n} f, \quad \forall\ f \in C(\mathcal{X}) \text{ e } t \geq 0.$$

Já que $\|(I - \lambda T)^{-1}\| \leq 1$ e que a Proposição 16 permite concluir que $\mathrm{Im}(I - \lambda T) = C(\mathcal{X})$ para todo $\lambda \geq 0$, segue que $[0, \infty) \subset \rho(T)$. Assim podemos aplicar o Teorema 20 para garantir que a aplicação $\alpha \longmapsto (\alpha - T)^{-1}$ é analítica em $(0, +\infty)$, pois T é fechado.

Derivando implicitamente a Equação (7) com respeito a α, temos para cada $f \in C(\mathcal{X})$ que

$$(\alpha I - T)^{-2} f = \int_0^\infty t e^{-\alpha t} S(t)f\ dt.$$

Procedendo de maneira análoga e derivando sucessivamente os dois lados da equação acima, obtemos as iteradas da Transformada de Laplace, isto é,

$$n!\,(\alpha I - T)^{-n-1} f = \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} S(t) f \; dt,$$

que pode ser reescrito como

$$(\alpha I - T)^{-n-1} f = \int_0^\infty \frac{s^n}{n!} e^{-\alpha s} S(s) f \; ds. \tag{16}$$

Combinando a Equação (16) com a expressão $(\alpha I - T)^{-1} = \alpha^{-1}(I - \alpha^{-1}T)^{-1}$, temos

$$(I - \alpha^{-1}T)^{-n-1} f = \alpha^{n+1} \int_0^\infty \frac{s^n}{n!}\, e^{-\alpha s} S(s) f \; ds.$$

Fixado $t \in [0, \infty)$ e fazendo $\alpha = n/t$, com $n \in \mathbb{N}$ segue da igualdade acima que

$$\left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n-1}(f) \; = \; \frac{n^{n+1}}{t^{n+1}} \int_0^\infty \frac{s^n}{n!}\, e^{-\frac{n}{t}s} S(s) f \; ds. \tag{17}$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = rt$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n-1}(f) \; &= \; \frac{n^{n+1}}{t^{n+1}} t \int_0^\infty \frac{(rt)^n}{n!}\, e^{-nr} S(rt) f \; dr \\ &= \; \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty r^n\, e^{-nr} S(rt) f \; dr. \end{aligned}$$

Já que $t \geq 0$ está fixado podemos definir para cada $n \in \mathbb{N}$ um operador linear limitado $I_n : C(\mathcal{X}) \to C(\mathcal{X})$ pela seguinte expressão

$$I_n(f) := \left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n-1}(f) - S(t)f \; = \; \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty r^n\, e^{-nr} [S(rt)f - S(t)f] \; dr. \tag{18}$$

Afirmamos que para cada f fixada $I_n(f) \to 0$ uniforme em t, em intervalos compactos, quando $n \to \infty$. De fato, considere $\varepsilon > 0$. Como $t \longmapsto S(t)f$ é contínua para cada $f \in C(\mathcal{X})$, segue que existem constantes $0 < a < 1 < b < \infty$ tais que, para $t \geq 0$ fixado, vale

$$\|S(rt) - S(t)\| < \varepsilon, \qquad \text{com } a \leqslant r \leqslant b. \tag{19}$$

Para facilitar a obtenção das estimativas, vamos decompor o operador I_n em uma soma de três operadores como segue

$$\begin{aligned} I_n(f) \; &= \; \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^a r^n\, e^{-nr} [S(rt)f - S(t)f] \; dr \\ &+ \; \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b r^n\, e^{-nr} [S(rt)f - S(t)f] \; dr \\ &+ \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty r^n\, e^{-nr} [S(rt)f - S(t)f] \; dr \\ &\equiv I_n^1(f) + I_n^2(f) + I_n^3(f). \end{aligned}$$

Analisando separadamente os termos $I_n^1(f), I_n^2(f)$ e $I_n^3(f)$, vamos mostrar abaixo que são válidas as seguintes limitações para suas normas de operador:

$$\|I_n^1\| \leqslant \frac{n^{n+1}}{n!}(ae^{-a})^n \int_0^a \|S(rt)f - S(r)f\|\ dr, \tag{20}$$

$$\|I_n^2\| \leqslant \varepsilon\ \frac{n^{n+1}}{n!} \int_a^b r^n e^{-rn}\ dr < \varepsilon, \tag{21}$$

$$\|I_n^3\| \leqslant \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty r^n\, e^{-nr} \|S(rt)f - S(t)f\|\ dr. \tag{22}$$

A estimativa de $\|I_n^1\|$ dada em (20) é obtida usando que a função $x \longmapsto xe^{-x}$ é crescente no intervalo $[0,1]$. Usando que $\|S(rt)f - S(r)f\| \leq 2\|f\|_\infty$, a aproximação de Stirling

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} \leq n! \leq e\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$$

e que a função $a \longmapsto 1 - a + \log a$, é negativa para todo $a \in (0,1)$ segue imediatamente que $\|I_n^1\| \to 0$ uniformemente em t, em intervalos compactos, quando $n \to \infty$.

Para estimar $\|I_n^2\|$, vamos usar a famosa função Gama, definida para todo $\lambda > 0$ por

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty r^{\lambda - 1} e^{-r}\ dr$$

e sua seguinte propriedade elementar $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para estimar $\|I_2\|$ basta observar que, se consideramos a mudança de variáveis $x = nr$, na integral abaixo, então temos

$$\int_0^\infty r^n e^{-rn}\ dr = \frac{1}{n^{n+1}} \int_0^\infty x^n e^{-x}\ dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n^{n+1}} = \frac{n!}{n^{n+1}}.$$

Ou seja,

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty r^n e^{-nr}\ dr = 1.$$

Da identidade acima e da desigualdade (19) concluímos que (21) é verdadeira.

Vamos mostrar que I_n^3 também converge a zero uniformemente em compactos. De fato, dado $c \geqslant b$, temos

$$\begin{aligned}
\|I_n^3\| &\leqslant \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^\infty r^n\, e^{-nr} \|S(tr)f - S(t)f\|\ dr \\
&= \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^c r^n\, e^{-nr} \|S(tr)f - S(t)f\|\ dr + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_c^\infty r^n\, e^{-nr} \|S(tr)f - S(t)f\|\ dr \\
&\equiv I_n^4 + I_n^5.
\end{aligned}$$

Afirmamos que I_n^4 e I_n^5 convergem a zero uniformemente em compactos. Com efeito, como $r^n\, e^{-nr} = (r\, e^{-r})^n$ e a função xe^{-x} é decrescente para $x > 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|I_n^4\| &\leqslant 2\|f\|_\infty \frac{n^{n+1}}{n!} \int_b^c r^n\, e^{-nr}\, dr \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \frac{n^{n+1}}{n!} b^n e^{-nb}(c-b). \end{aligned}$$

Observe que

$$x_n \equiv \frac{n^{n+1}}{n!} b^n e^{-nb} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

De fato, da aproximação de Stirling para $n!$ temos que $n\ln(n) - n < \ln(n!) < n\ln(n)$. Assim,

$$\ln(x_n) < \ln(n) - n(b - \ln(b) - 1).$$

Como $b > 1$, segue que $(b - \ln(b) - 1) > 0$, e portanto $\ln(x_n) \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Logo, $x_n \to 0$, o que significa que $\|I_n^4\|$ converge a zero quando $n \to \infty$. Por fim, para I_n^5, podemos escolher c de tal forma que para todo $r \geqslant c$ tenhamos $r \leqslant e^{\frac{r}{2}-1}$. Assim sendo, concluímos que

$$\begin{aligned} \|I_n^5\| &= \frac{n^{n+1}}{n!} \int_c^\infty r^n\, e^{-nr} \|S(tr)f - S(t)f\|\, dr \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \frac{n^{n+1}}{n!} \int_c^\infty r^n\, e^{-nr}\, dr \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \frac{n^{n+1}}{n!} e^{-n} \int_c^\infty e^{-\frac{nr}{2}}\, dr \\ &= 2\|f\|_\infty \frac{n^{n+1}}{n!} \frac{e^{-n-\frac{nr}{2}}}{n\, c} \;\equiv\; y_n. \end{aligned}$$

Argumentando analogamente ao caso da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, podemos mostrar que $y_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Logo $\|I_n^5\| \to 0$, como desejado.

Já que ε é um número positivo arbitrário, fazendo $n \to \infty$ na expressão (18) segue que

$$S(t)f = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n} f. \tag{23}$$

$\square$

7.1 Prova Alternativa da Fórmula Exponencial

Nesta seção vamos apresentar uma prova alternativa para a fórmula exponencial que aparece no item 2 do Teorema de Hille-Yosida. Vamos contornar a parte técnica envolvida no final da seção anterior usando alguns resultados clássicos da Teoria de Probabilidade.

Antes de prosseguir, vamos recordar alguns resultados elementares da Teoria de Probabilidade que serão usados ao longo desta seção.

Seja X é uma variável aleatória em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\ ds, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

para alguma $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ contínua. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função borel mensurável tal que $\mathbb{E}[|g(X)|] < +\infty$, então segue da fórmula de mudança de variáveis para integrais que

$$\mathbb{E}[g(X)] \equiv \int_{\Omega} g(X) d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) f_X(s)\ dx. \tag{24}$$

Uma variável aleatória Y em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é dita ter distribuição exponencial de parâmetro $\alpha > 0$ se

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \int_{0}^{x} \alpha e^{-\alpha s}\ ds, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para indicar que Y é uma variável aleatória com distribuição exponencial, de parâmetro $\alpha > 0$, vamos usar a notação $Y \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$. Note que se $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ e $Y \equiv \alpha^{-1} X$, então $Y \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$.

Se $Y_1, \ldots, Y_n$ são variáveis aleatórias independentes, com distribuição exponencial de parâmetro α, então podemos mostrar que

$$\mathbb{P}(Y_1 + \ldots + Y_n \leq x) = \int_{0}^{x} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\ \alpha^n e^{-\alpha s}\ ds. \tag{25}$$

Dizemos que uma sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a.'s em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uniformemente integrável, se para todo $\varepsilon > 0$ dado existe, $M > 0$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n \cdot 1_{\{|X_n| \geq K\}}] \leq \varepsilon$$

Definição 24 (Convergência em Probabilidade)**.** Dizemos que uma sequência de v.a.'s $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, converge em probabilidade para uma constante $m \in \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$ fixado, temos $\mathbb{P}\left(|Z_n - m| \geq \varepsilon\right) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Teorema 25 (Lei Fraca dos Grandes Números)**.** *Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência i.i.d, em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, com $\mathbb{E}[X_1] = m$. Então para qualquer $\varepsilon > 0$ fixado temos*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Teorema 26. *Seja $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d, em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Suponha que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente integrável e converge em probabilidade para uma constate $m \in \mathbb{R}$. Então $\mathbb{E}[|Z_n - m|] \to 0$, quando $n \to \infty$.*

Agora estamos prontos para enunciar e provar o principal resultado desta seção.

Teorema 27. *Se* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *um semigrupo de Markov e seu gerador infinitesimal* $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ *é um gerador de Markov. Então para toda* $f \in C(\mathcal{X})$ *temos*

$$S(t)f = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n} f, \quad \forall\, f \in C(\mathcal{X}) \text{ e } t \geq 0.$$

Demonstração. Seja $(X_n)_n$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ com distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 1$. Fixe $\alpha > 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $Y_n \equiv \alpha^{-1}X_n$. Então $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. e $Y_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. Usando (25) e (24) temos para toda $f \in C(\mathcal{X})$ a seguinte igualdade

$$\mathbb{E}\left[S(\alpha^{-1}X_1 + \ldots + \alpha^{-1}X_n)f\right] = \int_0^\infty \frac{\alpha^n s^{n-1} e^{-\alpha s}}{(n-1)!} S(s)f\ ds. \tag{26}$$

As hipótese do teorema nos permite usar a expressão (4). Já que T é fechado podemos aplicar o Teorema 20 e por derivação dos dois lados da igualdade (4), $n-1$ vezes, obter a seguinte igualdade

$$\left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n} f \ = \ \frac{n^n}{t^n} \int_0^\infty \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\frac{n}{t}s} S(s)f\ ds.$$

Tomando $\alpha = n/t$ em (26) e comparando com esta última igualdade, podemos concluir que

$$\mathbb{E}\left[S\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}t\right)f\right] = \left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n} f.$$

Logo para toda $f \in C(\mathcal{X})$ temos

$$\left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n} f - S(t)f = \mathbb{E}\left[S\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}t\right)f - S(t)f\right].$$

Para $t \geq 0$ e $s \geq 0$ dados num compacto, segue da fórmula de integração por partes e do item 1 do Teorema 22 que

$$\frac{\|S(t)f - S(s)f\|_\infty}{|t-s|} \leq \left\|\frac{d}{dt}S(t)f\right\|_\infty = \|Tf\|_\infty,$$

para toda $f \in \mathcal{D}(T)$. Ou seja,

$$\|S(t)f - S(s)f\|_\infty \leqslant \|Tf\|_\infty\, |t-s|. \tag{27}$$

Da desigualdade acima obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left\|\left(I - \frac{t}{n}T\right)^{-n} f - S(t)f\right\|_\infty &\leqslant \mathbb{E}\left|S\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}t\right)f - S(t)f\right| \\
&\leqslant \|Tf\|_\infty\, \mathbb{E}\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}t - t\right| \\
&\leqslant |t|\|Tf\|_\infty\, \mathbb{E}\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - 1\right|.
\end{aligned} \tag{28}$$

Já que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência i.i.d. de variáveis aleatórias com $\mathbb{E}[X_1] = 1$, segue da Lei Fraca do Grandes Números que a sequência de v.a.'s

$$Z_n \equiv \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

converge em probabilidade para a constante $m = 1$. Já que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é i.i.d. e $\mathbb{E}[|X_1|] = 1$ segue imediatamente que a sequência $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente integrável. Como todas as hipóteses do Teorema 26 estão satisfeitas podemos garantir que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - 1\right| = 0.$$

Esta igualdade junto com a estimativa (28), finalizam a prova do teorema. □

O Teorema de Hille-Yosida será usado, na próxima parte, da seguinte maneira. Primeiro usamos a *descrição infinitesimal do processo* (este conceito será definido mais a frente) para definir um pré-gerador de Markov T. Nesta etapa as condições 1, 2 e 3 da definição de pré-gerador de Markov (Definição 1) são geralmente fáceis de se verificar com ajuda da Proposição 3. Em seguida, precisamos provar que $\mathrm{Im}(I - \lambda T)$ é denso em $C(\mathcal{X})$ para λ suficientemente pequeno. Esta parte normalmente é a mais difícil e feita considerando hipóteses adequadas nas chamadas *taxas de transições*, que serão definidas mais a frente. Vencida esta etapa, podemos aplicar as Proposições 11 e 12 para garantir a existência de $\overline{T}$ e que o mesmo é um gerador de Markov. Finalmente usamos o gerador de Markov $\overline{T}$ para gerar um semigrupo de Markov via Teorema de Hille-Yosida.

8 Uma caracterização das Medidas Invariantes

Nesta seção apresentamos uma aplicação do Teorema de Hille-Yosida para caracterizar o conjunto das medidas invariantes $\mathscr{I}$ de um processo de Markov associado a um semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$. Antes de apresentar esta caracterização introduzimos o conceito de cerne de um gerador de Markov.

Definição 28 (Cerne)**.** Seja $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ um gerador de Markov. Um subespaço linear D de $\mathcal{D}(T)$ é chamado de cerne de T, se T é o fecho de sua restrição a D, isto é, $T = \overline{T|_D}$.

Note que T é unicamente determinado por seus valores em um cerne. Na maior parte das vezes não é possível exibir explicitamente o domínio de um gerador por completo. Por outro lado, se um gerador é obtido via o procedimento explicado logo após a demostração do Teorema de Hille-Yosida, então o domínio do pré-gerador é um cerne para o gerador. Desta forma, pelo menos o cerne é explicitamente descrito.

Proposição 29. *Suponha que D é um cerne do gerador infinitesimal $T : \mathcal{D}(T) \to C(\mathcal{X})$ de um semigrupo de Markov $\{S(t) : t \geq 0\}$. Então*

$$\mathscr{I} = \left\{ \mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X}) : \int_{\mathcal{X}} Tf \, d\mu = 0, \quad \forall \ f \in D \right\}.$$

Demonstração. Suponha que $\mu \in \mathscr{I}$. Fixada $f \in \mathcal{D}(T)$, segue do Teorema de Hille-Yosida que

$$Tf = \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t}.$$

Já que $\|Tf\|_\infty < +\infty$ segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\int_{\mathcal{X}} Tf \, d\mu \ = \ \int_{\mathcal{X}} \lim_{t \downarrow 0} \frac{S(t)f - f}{t} \, d\mu \ = \ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\mathcal{X}} S(t)f \, d\mu - \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu \right). \tag{29}$$

Como $\mu \in \mathscr{I}$, segue da Proposição 13 da Parte 3 que

$$\int_E S(t)f \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

Usando a igualdade acima em (29) concluímos que para toda $\mu \in \mathscr{I}$ e $f \in D$, temos

$$\int_{\mathcal{X}} Tf \, d\mu = 0.$$

Reciprocamente, seja $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathcal{X})$ tal que

$$\int_{\mathcal{X}} Tf \, d\mu = 0, \quad \forall \ f \in D.$$

Afirmamos que, para toda $g \in C(\mathcal{X})$, temos

$$\int_{\mathcal{X}} S(t)g \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} g \, d\mu.$$

De fato, fixe $g \in C(\mathcal{X})$. Segue da definição de gerador de Markov que, dado $\lambda \geq 0$, existe uma única $f \in \mathcal{D}(T)$ tal que $f - \lambda Tf = g$. Pela definição de cerne, segue que existe uma sequência $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset D$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ e $\|Tf_n - Tf\|_\infty \to 0$. Aplicando novamente o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_{\mathcal{X}} Tf \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{X}} Tf_n \, d\mu = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{X}} g \, d\mu \ = \ \int_{\mathcal{X}} (f - \lambda Tf) \, d\mu \ = \ \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu.$$

Como T é um gerador de Markov, o operador $(I - \lambda T)^{-1} : C(\mathcal{X}) \to \mathcal{D}(T)$ está bem definido, para todo $\lambda \geq 0$. Aplicando esta inversa em ambos os lados da igualdade,

$f - \lambda T f = g$, temos que $f = (I - \lambda T)^{-1} g$. Usando este fato na igualdade acima ficamos com

$$\int_{\mathcal{X}} (I - \lambda T)^{-1} g \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} g \, d\mu, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Como $(I - \lambda T)^{-1} g \in C(\mathcal{X})$, repetindo o argumento acima obtemos

$$\int_{\mathcal{X}} (I - \lambda T)^{-2} g \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} (I - \lambda T)^{-1} g \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} g \, d\mu.$$

Procedendo uma indução formal concluímos que

$$\int_{\mathcal{X}} (I - \lambda T)^{-n} g \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} g \, d\mu,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, escolhendo $\lambda = t/n$, utilizando o Teorema da Convergência Dominada e a fórmula exponencial dada no Teorema de Hille-Yosida, obtemos

$$\int_{\mathcal{X}} g \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{X}} (I - \frac{t}{n} T)^{-n} g \, d\mu = \int_{\mathcal{X}} S(t) g \, d\mu, \quad \forall t \geq 0,$$

conforme afirmamos. Pelo item 1 da Proposição 13 da Parte 3, podemos finalmente concluir que $\mu \in \mathscr{I}$. $\square$

Apêndice

Teorema 30. *Seja* $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de operadores lineares limitados, com* $L_n : \mathcal{N} \to \mathcal{B}$*, onde* $\mathcal{N}$ *é um espaço normado e* $\mathcal{B}$ *um espaço de Banach. Se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n\| < +\infty$$

Então existe o limite $L = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} L_n$ *e além do mais* L *define um operador linear limitado em* $\mathcal{N}$*.*

Agradecimentos

Agradecemos ao Daniel Smania do ICMC-USP São Carlos, por comentários esclarecedores sobre o item 2 do Teorema 23, e por apontar uma pequena falha na prova deste teorema, na primeira versão destas notas.

Referências

[1] L. Cioletti, P. H. Costa, L. R. Lucinger, and R. P. Silva. Processos de markov a tempo contínuo e sistemas de partículas. *Notas manuscritas - Universidade de Brasília*, 2016.

[2] T. M. Liggett. *Interacting particle systems.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.

[3] T. M. Liggett. *Continuous time Markov processes*, volume 113 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. An introduction.