Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 1 - Introdução à Teoria de Medida e Integração

Turma 01 - 01/2024

Março de 2024

1 Teoria de Conjuntos

Ex. 1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Mostre que

$$[a, b] \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}\,,\, b + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{e} \qquad (a, b) \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}\,,\, b - \frac{1}{n}\right].$$

Ex. 2. Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de um conjunto X. Seja $F_0 = \varnothing$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$F_n \equiv \bigcup_{k=1}^{n} E_k \qquad \text{e} \qquad G_n \equiv E_n \setminus F_{n-1}.$$

Mostre que

a) $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente de conjuntos;

b) $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos dois-a-dois disjuntos, isto é, $G_n \cap G_m = \varnothing$ se $m \neq n$.

c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

Ex. 3. Mostre que se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência de subconjuntos de um conjunto X que é monótona **crescente**, então

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

Ex. 4. Mostre que se $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um sequência de subconjuntos de um conjunto X que é monótona **decrescente**, então

$$\liminf_{n\to\infty} F_n \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} F_n.$$

Ex. 5. Seja $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitraria de subconjuntos de um conjunto X. Mostre que as seguintes continências são sempre válidas

$$\varnothing \subseteq \liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n \subseteq X.$$

Ex. 6. De um exemplo de uma sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de algum conjunto X satisfazendo

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \varnothing \qquad \text{e} \qquad \limsup_{n\to\infty} E_n = X.$$

Ex. 7. De um exemplo de uma sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de algum conjunto X que não é monótona crescente nem monótona decrescente e satisfaz

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

Ex. 8. Sejam X e Y conjuntos arbitrários e $f : X \to Y$ uma função. Se $E \subseteq Y$ definimos, de maneira usual, a imagem inversa do conjunto E pela função f, como sendo o conjunto $f^{-1}(E) \equiv \{x \in X : f(x) \in E\}$. Mostre que

a) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ e $f^{-1}(Y) = X$;

b) para quaisquer $E, F \subseteq Y$ temos $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$;

c) se Λ é um conjunto de índices arbitrário e $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma coleção de subconjuntos de Y, então

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(E_\alpha) \qquad \text{e} \qquad f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(E_\alpha).$$

2 Espaços Métricos

Ex. 9. Dê um exemplo de um espaço métrico (X, ρ), onde existe alguma bola aberta $B(x, r) \equiv \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$, para algum $x \in X$ e $r > 0$ tal que o fecho desta bola aberta, notação $\overline{B(x, r)}$, não coincide com a bola fechada $\{y \in X : \rho(x, y) \leqslant r\}$.

Ex. 10. Considere o espaço métrico $([0, 1], \rho)$, com a métrica ρ dada por $\rho(x, y) \equiv |x - y|$, para todo $x, y \in [0, 1]$. Mostre que todo intervalo aberto $(a, b) \subset [0, 1]$ é uma bola aberta neste espaço métrico. Vale a recíproca? Caso afirmativo, prove e caso negativo, dê um contra-exemplo.

Ex. 11. Sejam (X, ρ_1) um espaço métrico **compacto** e

$$C(X, \mathbb{C}) \equiv \{f : X \to \mathbb{C} \, : \, f \text{ é uma função contínua}\}$$

Considere a métrica ρ sobre $C(X, \mathbb{C})$, definida para cada par $f, g \in C(X, \mathbb{C})$ pela seguinte expressão

$$\rho(f, g) \equiv \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Mostre que $\big(C(X, \mathbb{C}), \rho\big)$ é um espaço métrico completo.

Ex. 12. Sejam (X, ρ) um espaço métrico **compacto** e $f : X \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Mostre que f é uniformemente contínua, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que se $\rho(x, y) < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ex. 13. Seja $X \equiv \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$, isto é, o produto cartesiano de "$\mathbb{N}$ cópias" do conjunto $\{0, 1, 2\}$. Note que podemos identificar X naturalmente com o espaço de sequências infinitas tomando valores no conjunto $\{0, 1, 2\}$, ou seja,

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \, : x_n \in \{0, 1, 2\} \; \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Dados dois elementos arbitrários de X, digamos, $x \equiv (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ e $y \equiv (y_1, y_2, y_3, \ldots)$, defina

$$\rho(x, y) \equiv \begin{cases} 0 & \text{, se } x = y; \\[2ex] \dfrac{1}{2^{N(x,y)}} & \text{, se } x \neq y, \end{cases}$$

onde para $x \neq y$ o número $N(x, y)$ é dado pela seguinte expressão

$$N(x, y) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } x_1 = y_1; \\[2ex] \inf\{k \in \mathbb{N} : x_1 = y_1, \ldots, x_{k-1} = y_{k-1} \text{ e } x_k \neq y_k\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que

a) a aplicação que leva o par $(x, y) \longmapsto \rho(x, y)$ define uma métrica em X;

b) Mostre que o espaço métrico (X, ρ) é um espaço métrico compacto.

Ex. 14. Considere o espaço métrico (X, ρ) definido no Ex.13 e seja $x \equiv (1, 1, 1, \ldots)$. Descreva quais são todos os elementos da bola aberta de centro x e raio $r = \frac{1}{20}$, ou seja, $B(x, \frac{1}{20})$.

Ex. 15. Sejam (X, ρ) o espaço métrico definido no Ex.13, $x \in X$ e $r > 0$. Mostre que:

a) a bola aberta $B(x, r)$ é um conjunto aberto e também um conjunto fechado;

b) fixados $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in \{0, 1, 2\}$ e índices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ o conjunto cilíndrico

$$\mathscr{C}_{i_1, \ldots, i_m}^{a_1, \ldots, a_m} \equiv \{x \in X \, : \, x_{i_1} = a_1, \ldots, x_{i_m} = a_m\}$$

é simultaneamente um conjunto aberto e fechado;

c)* os únicos subconjuntos conexos de X são os conjuntos unitários. Para definição de conexidade veja o capítulo sobre topologia geral da referência [1].

Referências

[1] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.