Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 2 - Introdução à Teoria de Medida e Integração

Turma 01 - 01/2024

Março de 2024

1 σ-Álgebras

Ex. 1. Sejam $a, b > 0$ fixados. Mostre que a região abaixo (delimitada por uma elipse)

$$E \equiv \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}$$

é um elemento de $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$, isto é, esta região é um conjunto Borel mensurável de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 2. Seja (X, d) um espaço métrico separável e $U \subseteq X$ um aberto da topologia τ_d, que é a topologia induzida pela métrica d. Seja $D \subset X$ um conjunto enumerável denso. Mostre que U pode ser escrito como uma união **enumerável** de bolas abertas da forma $B(d, r)$, onde $d \in D$ e $r \in \mathbb{Q} \cap (0 + \infty)$.

Ex. 3. Sejam $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ espaços métricos separáveis e $D_j \subseteq X_j$ um subconjunto enumerável denso, para cada $j = 1, \ldots, n$. Considere o espaço produto

$$X \equiv \prod_{j=1}^{n} X_j,$$

munido da métrica produto $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que é definida para cada par de pontos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ por

$$d(x, y) \equiv \max_{1 \leqslant j \leqslant n} d(x_j, y_j).$$

Mostre que:

a) Mostre que para todo $x \in X$ e $r > 0$ temos

$$B(x, r) = \prod_{j=1}^{n} B_j(x_j, r),$$

onde $B_j(x_j, r) \equiv \{y_j \in X_j : d_j(x_j, y_j) < r\}$.

b) Mostre que a coleção $\mathscr{C} \equiv \{B(x, r) \subset X : x \in D_1 \times \ldots \times D_n \text{ e } r \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)\}$ gera a σ-álgebra de Borel de X, isto é, $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}_X$.

Ex. 4. Complete a prova da Proposição 1.2 da referência [1].

Ex. 5. Dizemos que uma coleção $\mathscr{L}$ de subconjuntos de X é um λ-sistema se satisfaz:

a) $X \in \mathscr{L}$ e $\varnothing \in \mathscr{L}$;

b) se $E \in \mathscr{L}$ então $E^c \in \mathscr{L}$;

c) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathscr{L}$ de conjuntos dois-a-dois disjuntos, então $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{L}$.

Seja $\mathscr{C}$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de X e $\{\mathscr{L}_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ a família de todos λ-sistemas, de subconjuntos de X, contendo $\mathscr{C}$. Mostre que

$$\bigcap_{\beta\in\Gamma} \mathscr{L}_\beta$$

é o menor (no sentido da inclusão) λ-sistema contendo $\mathscr{C}$.

Ex. 6. Uma coleção $\mathscr{P}$ de subconjuntos de um conjunto X é chamada de π-sistema, se $\mathscr{P}$ é fechada por interseções, isto é, para todo $E, F \in \mathscr{P}$ temos que $E \cap F \in \mathscr{P}$. Mostre que uma coleção $\mathscr{C}$, de subconjuntos de X, que é simultaneamente um π-sistema e λ-sistema é uma σ-álgebra.

Ex. 7. Uma família de conjuntos $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(X)$ é chamada de **anel** se $\mathscr{R}$ é fechada por uniões finitas e diferenças, isto é,

$$E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{R} \implies \bigcup_{j=1}^{n} E_j \in \mathscr{R} \qquad \text{e} \qquad E, F \in \mathscr{R} \implies E \setminus F \in \mathscr{R}.$$

Um anel que é fechado para uniões enumeráveis é chamado de σ-anel. Mostre que:

a) todo anel é fechado por interseções finitas.

b) todo σ-anel é fechado por interseções enumeráveis.

c) se $\mathscr{R}$ é um anel, então $\mathscr{R}$ é uma álgebra se, e somente se, $X \in \mathscr{R}$.

d) se $\mathscr{R}$ é um σ-anel, então $\mathscr{R}$ é uma σ-álgebra se, e somente se, $X \in \mathscr{R}$.

e) se $\mathscr{R}$ é um σ-anel, então a coleção $\mathscr{C} \equiv \{E \subseteq X \,:\, E \in \mathscr{R} \text{ ou } E^c \in \mathscr{R}\}$ é uma σ-álgebra.

f) se $\mathscr{R}$ é um σ-anel, então $\{E \subseteq X \,:\, E \cap F \in \mathscr{R},\ \forall F \in \mathscr{R}\}$ é uma σ-álgebra.

Ex. 8. Considere o espaço métrico (X, d), onde $X \equiv [0,1]$ e $d(x,y) = |x - y|$. Seja τ a topologia induzida por d e denote por $\mathscr{B}([0,1])$ a σ-álgebra gerada por τ.

a) Mostre que a coleção dos intervalos semi-abertos $\mathscr{C}_1 \equiv \{(a,b] \subset [0,1] \, : \, 0 \leqslant a < b \leqslant 1\}$ gera $\mathscr{B}([0,1])$.

b) Mostre que a coleção dos intervalos abertos $\mathscr{C}_2 \equiv \{(a,b) \subset [0,1] \, : \, 0 \leqslant a < b \leqslant 1\}$ **não** gera $\mathscr{B}([0,1])$. (Dica: Considere a coleção de todos os subconjuntos de $[0,1]$ que possuem ambos pontos 0 e 1 ou que seu complementar possuem ambos pontos. Mostre que esta coleção é um σ-álgebra).

Ex. 9. Seja $(X, \mathscr{F})$ um espaço mensurável. Suponha que $\mathscr{F}$ possua infinitos elementos. Mostre que:

a) a σ-álgebra $\mathscr{F}$ contém pelo menos uma sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos não vazios distintos e dois-a-dois disjuntos.

b) Mostre que $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant \mathfrak{c}$.

Ex. 10. Mostre que uma álgebra $\mathscr{A}$ é uma σ-álgebra se, e somente se, $\mathscr{A}$ é fechada por uniões enumeráveis crescentes (isto é, se $\{E_n\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ e $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$, então $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}$).

Ex. 11. Construa um conjunto X não-vazio, e duas σ-álgebras $\mathscr{M}_1$ e $\mathscr{M}_2$ de subconjuntos de X, tais que $\mathscr{M}_1 \cup \mathscr{M}_2$ **não** é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Ex. 12. Seja X um conjunto arbitrário e $\mathscr{M}$ a σ-álgebra, de subconjuntos de X, gerada por uma coleção $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Mostre que $\mathscr{M}$ é a união de todas as σ-álgebras geradas por todas as coleções $\mathscr{B}$, que são sub-coleções enumeráveis de $\mathscr{C}$ (dica: mostre que última coleção citada acima é uma σ-álgebra).

Referências

[1] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.