Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 4 - Introdução à Teoria de Medida e Integração

Turma 01 - 01/2024

Março de 2024

1 Medida Exterior

Ex. 1. Se μ^* é uma medida exterior em X e $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos dois-a-dois disjuntos e μ^*-mensuráveis, então

$$\mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n), \qquad \forall E \in \mathscr{P}(X).$$

Ex. 2. Seja $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ uma álgebra de subconjuntos de algum conjunto X não-vazio. Vamos denotar por $\mathscr{A}_\sigma$ a coleção de todas as uniões enumeráveis de conjuntos em $\mathscr{A}$. A coleção de todas as interseções enumeráveis de conjuntos em $\mathscr{A}_\sigma$ será denotada por $\mathscr{A}_{\sigma\delta}$. Seja μ_0 uma pré-medida definida sobre $\mathscr{A}$ e μ^* a medida exterior induzida por μ_0. Mostre que

a) para qualquer $E \subseteq X$ e $\varepsilon > 0$, existe $A \in \mathscr{A}_\sigma$ tal que $E \subseteq A$ e $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon$;

b) se $\mu^*(E) < +\infty$, então E é μ^*-mensurável se, e somente se, existe algum conjunto $B \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ satisfazendo $E \subset B$ e $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

c) se a pré-medida μ_0 é σ-finita, mostre que a restrição $\mu^*(E) < +\infty$ imposta no ítem anterior é supérflua.

Ex. 3. Seja μ^* uma medida exterior em X induzida por uma pré-medida μ_0 **finita**. Para cada $E \in \mathscr{P}(X)$ defina a medida interior de E, pela seguinte expressão

$$\mu_*(E) \equiv \mu_0(X) - \mu^*(E^c).$$

Mostre que E é μ^*-mensurável se, e somente se, $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Ex. 4. Sejam X um conjunto não-vazio, μ^* uma medida exterior, $\mathscr{M}^*$ a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis. Considere a medida $\bar{\mu} \equiv \mu^*|_{\mathscr{M}^*}$ e seja μ^+ a medida exterior induzida por $\bar{\mu}$, ou seja, $\mu^+(E)$ é definida para cada $E \in \mathscr{P}(X)$ pela seguinte expressão:

$$\mu^+(E) \equiv \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) \,:\, E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \;\text{ e } A_n \in \mathscr{M}^*, \;\; \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) para cada $E \in \mathscr{P}(X)$ temos $\mu^*(E) \leqslant \mu^+(E)$ e a igualdade vale se, e somente se, existe algum $A \in \mathscr{M}^*$ tal que $E \subseteq A$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

b) Se μ^* é uma medida exterior induzida por alguma pré-medida, então $\mu^* = \mu^+$ (dica use o item a) do Ex.2).

c) se $X = \{0, 1\}$ existe alguma medida exterior μ^* em X tal que $\mu^* \neq \mu^+$.

Ex. 5. Seja X um conjunto não-enumerável e $\mathscr{A}$ a coleção dos subconjuntos de X que são finito ou que possuem complementar finito. Mostre que $\mathscr{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de X e que $\mu_0 : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu_0(E) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é finito;} \\ +\infty, & \text{se } E^c \text{ é finito,} \end{cases}$$

é uma pré-medida em $\mathscr{A}$.

a) se μ^* denota a medida exterior induzida por μ_0. Calcule $\mu^*(E)$ para cada $E \in \mathscr{P}(X)$;

b) seja μ_1 a medida de contagem definida em $\sigma(\mathscr{A})$ e considere a medida $\mu_2 \equiv 2\mu_1$, também definida sobre $\sigma(\mathscr{A})$. Mostre que $\mu_1 = \mu_2$ sobre $\mathscr{A}$, mas que $\mu_1 \neq \mu_2$ sobre $\sigma(\mathscr{A})$. Por que isto não contraria o Teorema de Extensão de Carathéodory?

Ex. 6. Seja $\mathscr{A}$ a coleção das uniões finitas de conjuntos da forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, onde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Mostre que

a) a coleção $\mathscr{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de $\mathbb{Q}$;

b) a σ-álgebra gerada por $\mathscr{A}$, isto é, $\sigma(\mathscr{A})$ coincide com $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$;

c) se $\mu_0 : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ é dada por $\mu_0(\varnothing) = 0$ e $\mu_0(A) = +\infty$, para todo $A \in \mathscr{A}$. Então μ_0 é uma pré-medida em $\mathscr{A}$ e existe mais de uma medida em $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ cujas restrições à álgebra $\mathscr{A}$ coincidem com μ_0.

Ex. 7.* Sejam X um conjunto não-vazio, $\mathscr{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X e μ_0 uma pré-medida sobre $\mathscr{A}$. Um conjunto B é μ^*-mensurável se existem conjuntos $A, C \in \sigma(\mathscr{A})$ tais que

$$A \subseteq B \subseteq C \qquad \text{e} \qquad \mu^*(C \setminus A) = 0.$$