Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 5 - Introdução à Teoria de Medida e Integração

Turma 01 - 01/2024

Abril de 2024

1 Medidas de Borel na Reta

Ex. 1. Usando o esboço de prova, apresentado na referência [1] (Teorema 1.19 - página 36) prove o seguinte teorema.

> **Teorema 1.19.** Seja $\mu \equiv \mu_F$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$, construída à partir de uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona não-decrescente e contínua à direita. Denote por $\mathscr{M}_\mu$ a σ-álgebra de Carathéodory dos conjuntos μ-mensuráveis. Para cada $E \subset \mathbb{R}$ fixado, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
>
> a) $E \in \mathscr{M}_\mu$;
>
> b) $E = V \setminus N_1$, onde V é um conjunto G_δ e $\mu(N_1) = 0$;
>
> c) $E = H \cup N_2$, onde H é um conjunto F_δ e $\mu(N_2) = 0$.

Ex. 2. Usando o Teorema 1.18 da referência [1] (enunciado abaixo), prove a Proposição 1.20 enunciada a seguir

> **Teorema 1.18.** Seja $\mu \equiv \mu_F$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$, construída à partir de uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona não-decrescente e contínua à direita. Denote por $\mathscr{M}_\mu$ a σ-álgebra de Carathéodory dos conjuntos μ-mensuráveis. Se $E \in \mathscr{M}_\mu$ então
>
> $$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\, \mu(U) \,:\, E \subset U \ \text{ e } \ U \text{ é um aberto}\} \\ &= \sup\{\, \mu(K) \,:\, K \subset E \ \text{ e } \ K \text{ é um compacto}\} \end{aligned}$$
>
> **Proposição 1.20.** Seja $\mu \equiv \mu_F$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$, construída à partir de uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona não-decrescente e contínua à direita. Denote por $\mathscr{M}_\mu$ a σ-álgebra de Carathéodory dos conjuntos μ-mensuráveis. Se $E \in \mathscr{M}_\mu$ é tal que $\mu(E) < +\infty$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto A que é uma união finita de intervalos abertos tal que $\mu(E\Delta A) < \varepsilon$.

Ex. 3. Seja $\mathbb{K} \subset [0,1]$ o conjunto clássico de Cantor, construído à partir da remoção dos terço-médios em cada etapa. Mostre que $\mathbb{K}$ é compacto, totalmente desconexo e não possui nenhum intervalo (dica: mostre que para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, com $x < y$, existe algum $z \in \mathbb{K}^c$ tal que $x < z < y$).

Ex. 4. Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona não-decrescente e contínua à direita, $\mu \equiv \mu_F$ a medida de Lebesgue-Stieltjes associada à F e definida sobre a σ-álgebra de Carathéodory, denotada por $\mathscr{M}_\mu$. Mostre que

a) $\mu(\{a\}) = F(a) - \lim_{x\uparrow a} F(x) \equiv F(a) - F(a-)$;

b) $\mu([a,b)) = \lim_{x\uparrow b} F(x) - \lim_{x\uparrow a} F(x) \equiv F(b-) - F(a-)$;

c) $\mu([a,b]) = F(b) - \lim_{x\uparrow a} F(x) \equiv F(b) - F(a-)$;

d) $\mu\big((a,b)\big) = \lim_{x\uparrow b} F(x) - F(a) \equiv F(b-) - F(a)$.

Ex. 5. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $F(x) \equiv \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor \equiv \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leqslant x\}$, isto é, o maior inteiro menor ou igual a x; também conhecido como "piso de x".

a) Mostre que F é uma função monótona não-decrescente e contínua à direita e, em seguida, faça um esboço do gráfico de F;

b) Seja $\mu \equiv \mu_F$ a medida de Lebesgue-Stieltjes associada à F. Mostre que para todo $m \in \mathbb{Z}$ temos $\mu(\{m\}) = 1$ e que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ temos $\mu(\{x\}) = 0$;

c) Se $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem $a < b$; $|a - b| < 1$ e $[a,b] \cap \mathbb{Z} = \varnothing$. Então $\mu([a,b]) = 0$ e consequentemente que $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = 0$;

d) Mostre que existe uma função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $A \in \mathscr{M}_\mu$ (σ-álgebra de Carathéodory) temos:
$$\mu(A) = \sum_{j \in A \cap \mathbb{Z}} f(j).$$

e) Conclua que, neste caso $F(x) = \lfloor x \rfloor$, $\mathscr{M}_\mu = \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Ex. 6. Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função identidade, isto é, $F(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu \equiv \mu_F$ a medida de Lebesgue-Stieltjes associada à função F (neste caso, mais comumente, chamada de Medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$) e $\mathscr{L}$ a σ-álgebra dos conjuntos μ-mensuráveis, que serão chamados simplesmente de Lebesgue-mensuráveis. Vamos usar a notação $\mathbb{V}$ para denotar o Conjunto de Vitali (a definição deste conjunto pode ser encontrada na página 20 da referência [1] ou nas notas de aula intitulada: O conjunto de Vitali).

Seja E um **conjunto Lebesgue-mensurável** arbitrário. Mostre que

a) se $E \subset \mathbb{V}$, então $\mu(E) = 0$;

b) se $\mu(E) > 0$, então $\mu(E)$ contém um conjunto não mensurável.

Dica: é suficiente assumir que $E \subset [0,1]$. Seguindo a notação das referências citadas acima olhe analise as consequências da seguinte identidade $E = \bigcup_{r \in R} E \cap N_r$.

Ex. 7. Seja $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mu)$ o espaço de medida, onde $\mathscr{L}$ é σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue-mensuráveis e μ é a medida de Lebesgue na reta. Seja $E \in \mathscr{L}$ tal que $\mu(E) > 0$. Mostre que para qualquer $\alpha \in [0, 1)$ fixado, existe algum intervalo aberto I tal que

$$\alpha\mu(I) < \mu(E \cap I).$$

Ex. 8. Sejam $(\mathbb{R}, \mathscr{L}, \mu)$ o espaço de medida do exercício anterior e $E \in \mathscr{L}$ satisfazendo $\mu(E) > 0$. Mostre que o conjunto

$$E \ominus E \equiv \{x - y \in \mathbb{R} : x, y \in E\}$$

contém um intervalo I, centrado na origem.

Sugestão. Mostre que se I denota o intervalo obtido no exercício anterior com α satisfazendo $\frac{3}{4} < \alpha < 1$, então o conjunto $E \ominus E$ contém o intervalo aberto

$$\left(-\frac{1}{2}\mu(I)\,,\ \frac{1}{2}\mu(I)\right).$$

Ex. 9. Seja $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência contida no intervalo aberto $(0, 1)$. Mostre que

a) o produtório infinito converge e satisfaz

$$0 < \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \alpha_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Dica. Use séries geométricas ou diretamente alguma expansão em séries de potencias para comparar $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - \alpha_n)$ com $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

b) Dado $\beta \in (0, 1)$ exiba uma sequência $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \beta$.

Ex. 10. Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Mostre que existe algum conjunto $A \subset [0, 1]$ tal que A é um elemento da σ-álgebra de Borel e satisfaz

$$0 < \mu(A \cap I) < \mu(I)$$

para qualquer intervalo $I \subset [0, 1]$.
Dica: todo subintervalo de $[0, 1]$ possui um conjunto do tipo-cantor de medida positiva.

Referências

[1] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.