Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 6 - Introdução à Teoria de Medida e Integração

Turma 01 - 01/2024

Abril de 2024

1 A Função de Cantor

Ex. 1. Seja (M, d) um espaço métrico completo. Dizemos que uma função $T : M \to M$ é contração forte, se para algum $\alpha \in (0, 1)$ fixado, temos $d(T(x), T(y)) < \alpha\, d(x, y)$, para todo $x, y \in M$. Mostre que se $T : M \to M$ é uma contração, então existe algum $x_0 \in M$ tal que $T(x_0) = x_0$, isto é, x_0 é um ponto fixo para T.

Dica: fixe um ponto $x_1 \in M$ arbitrário e mostre que a sequência $\{T^n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $T^n(x_1) \equiv T \circ T \circ \ldots \circ T(x_1)$ é uma sequência de Cauchy.

Seja $(C([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$ o espaço de Banach das funções reais, contínuas e definidas no intervalo compacto $[0, 1]$ munido da norma do supremo, isto é,

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Considere o subespaço fechado

$$V \equiv \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(0) = 0 \text{ e } f(1) = 1\}$$

e a transformação $T : V \to V$ que leva uma função $f \in V$ em uma função $Tf \in V$ que por sua vez é definida para cada $x \in [0, 1]$ por

$$Tf(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} f(3x) & \text{, se } x \in [0, \frac{1}{3}]; \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{, se } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]; \\[2ex] \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} f(3x - 2) & \text{, se } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Ex. 2. Mostre que o espaço métrico (V, d), onde V é o conjunto de funções definido acima e para cada par de funções $f, g \in V$

$$d(f, g) \equiv \sup_{x \in [0,1]} \|f - g\|_\infty$$

é um espaço métrico completo.

Ex. 3. Mostre que para cada $f \in V$ que $Tf(x)$ está bem definida em $x = \dfrac{1}{3}$ e $x = \dfrac{2}{3}$.

Ex. 4. Considere o espaço métrico (V, d), onde d é a métrica definida no Ex.2 Mostre que $T : V \to V$ é uma contração, isto é, para quaisquer par de funções $f, g \in V$ temos

$$\|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty.$$

Ex. 5. Usando o Ex.1 (Teorema do Ponto Fixo para Contrações de Banach) conclua que existe alguma função contínua $\mathcal{C} : [0,1] \to [0,1]$ com $\mathcal{C} \in V$ tal que $T\mathcal{C} = \mathcal{C}$.

Ex. 6. Se $f_0 : [0,1] \to [0,1]$ denota a função identidade, isto é, $f_0(x) = x$. Mostre que $f_n \equiv Tf_{n-1}$, pode ser definida indutivamente para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 7. Faça o esboço do gráfico das funções f_1 e f_2 do item anterior.

Ex. 8. Entre outras coisas, o Teorema do Ponto Fixo para Contrações de Banach afirma que para qualquer $h \in V$ temos $\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} T^n h$, onde $\mathcal{C}$ é o ponto fixo fornecido no Ex.5 e $T^n h$ é a n-ésima iterada da transformação T calculada em h, para cada $n \in \mathbb{N}$. Use este fato e o Ex.5 para mostrar que a função $\mathcal{C} : [0,1] \to [0,1]$ é uma função contínua e monótona não-decrescente. A função $\mathcal{C}$ é conhecida como *Função de Cantor*.

Ex. 9. A sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apresentada no Ex.6 pode ser usada para construir o conjunto de Cantor como segue. Fixado $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$, defina

$$A_{n,j} \equiv \operatorname{int}\left((f_n)^{-1}\left(\left\{\frac{j}{2^n}\right\}\right)\right),$$

onde $\operatorname{int}(A)$ denota o conjunto dos pontos interiores de A. Mostre que a coleção de conjuntos $A_{n,1}, A_{n,2}, \ldots, A_{n,2^n-1}$ forma uma coleção de subintervalos abertos disjuntos de $[0,1]$ que são removidos na n-ésima etapa da construção do conjunto ternário de Cantor. Isto é, se definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n \equiv [0,1] \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{2^n-1} A_{n,j}\right)$$

então o conjunto

$$\mathbb{K} \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

é precisamente o conjunto de Cantor.

Ex. 10. Assumindo como verdadeira as afirmações feitas acima, mostre que a função de Cantor $\mathcal{C} : [0,1] \to [0,1]$ é constante ao longo de qualquer intervalo aberto contido no complementar do conjunto Ternário de Cantor, isto é, para qualquer intervalo não-vazio $(a,b) \subset [0,1] \setminus \mathbb{K}$ temos que $\mathcal{C}|_{(a,b)}$ é uma função constante.
Dica. Se $(a,b) \subset [0,1] \setminus \mathbb{K}$, então existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que (a,b) não está contido em K_{n_0}. Em seguida, use a caracterização de K_{n_0} fornecida acima e que $\mathcal{C}(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$.