Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 7 - Introdução à Teoria de Medida e Integração

Turma 01 - 01/2024

Abril de 2024

1 Regularidade de Medidas em Espaços Métricos

Ex. 1. Sejam (X,d) um espaço métrico e $F \subseteq X$ um subconjunto fechado. Mostre que a função $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \equiv d(x,F) \equiv \inf_{y \in F} d(x,y),$$

é uma função contínua.
Dica: mostre que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de pontos de X tal que $x_n \to x_0$, quando $n \to \infty$, então $f(x_n) \to f(x_0)$, quando $n \to \infty$.

Ex. 2. Seja (X,d) um espaço métrico arbitrário. Mostre que todo subconjunto fechado $F \subseteq X$ é um G_δ e que todo subconjunto aberto $A \subseteq X$ é um F_σ.
Dica. Olhe para os conjuntos da forma $\{x \in X \,:\, d(x,F) < \frac{1}{n}\}$ e use o Ex.1.

Definição 1. Sejam (X,d) um espaço métrico, $\mathscr{B}_X$ a σ-álgebra de Borel de X e μ uma medida sobre os borelianos de X. Dizemos que um boreliano $B \subseteq X$ é μ-regular se

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \sup\{\mu(F) \,:\, F \subseteq B \text{ e } F \text{ é um fechado}\} \\ &= \inf\{\mu(A) \,:\, B \subseteq A \text{ e } A \text{ é um aberto}\}.\end{aligned}$$

Se todo boreliano de X é μ-regular, então dizemos que μ é regular.

Ex. 3. Seja (X,d) um espaço métrico e μ uma medida definida na σ-álgebra de Borel de X, isto é, $\mathscr{B}_X$ e satisfazendo $\mu(X) = 1$. Mostre que um boreliano $B \in \mathscr{B}_X$ é μ-regular se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem um aberto A_ε e um fechado F_ε tais que:

a) $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$;

b) $\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Ex. 4. Sejam (X, d) um espaço métrico e μ uma medida definida na σ-álgebra de Borel de X, satisfazendo $\mu(X) = 1$. Mostre que a coleção

$$\mathscr{R} \equiv \{B \in \mathscr{B}_X \ : \ B \text{ é } \mu\text{-regular}\}$$

contém os conjuntos $\varnothing$ e X e além do mais, é fechada para complementos.

Ex. 5. Sob as mesmas hipóteses do Ex. 4, mostre que a coleção $\mathscr{R}$ é fechada para uniões enumeráveis.
Dica: use o Ex. 3 item b) para argumentar que existem abertos e fechados $\{A_{n,\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{F_{n,\varepsilon}\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, tais que $\mu(A_{n,\varepsilon} \setminus F_{n,\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{3^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida, para tratar a união enumerável de fechados use a continuidade da medida.

Ex. 6. Sob as mesmas hipótese do Ex.4, mostre que a coleção $\mathscr{R}$ contém todos os fechados de (X, d).
Dica: use o Ex.2, em particular, que todo fechado é um G_δ e a continuidade da medida μ.

Ex. 7. Use Ex.4, Ex.5 e Ex.6 e conclua que: se (X, d) é um espaço métrico e μ é uma medida definida em $\mathscr{B}_X$ e tal que $\mu(X) = 1$, então μ é regular.

Ex. 8. O Teorema 1.18 da referência [1] pode ser obtido como caso particular do Ex.7, onde $X = \mathbb{R}$ e d é a métrica usual da reta?

Referências

[1] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.