Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

O Conjunto dos Ordinais Enumeráveis e a Sigma-Álgebra Gerada por uma Coleção

Notas de Aula

L. Cioletti

Abril de 2024

Resumo

Sejam X um conjunto não-vazio e $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(X)$ uma coleção arbitrária não-vazia. Nestas notas introdutórias, mostramos como construir $\sigma(\mathscr{C})$, a σ-álgebra gerada por $\mathscr{C}$, usando o conjunto Ω dos ordinais enumeráveis e o Princípio da Indução Transfinita. Como aplicação mostramos que se a coleção $\mathscr{C}$ é infinita e enumerável, então a cardinalidade da σ-álgebra gerada por $\mathscr{C}$ é igual a cardinalidade de contínuo $(\mathrm{Card}(\mathbb{R}) \equiv \mathfrak{c})$.

1 Introdução

Esta notas são baseadas nas Seções 0.2, 0.4 e 1.6 da referência [3]. Apenas um conhecimento básico da teoria ingênua de conjuntos e alguns fatos elementares sobre σ-álgebras são pré-requisitos para a leitura deste texto. O objetivo principal é apresentar de maneira simples e detalhada, como podemos usar o conjunto Ω dos ordinais enumeráveis para construir, usando o princípio da indução transfinita, a σ-álgebra gerada por uma coleção $\mathscr{C}$ de subconjuntos de um certo conjunto X não-vazio. Tanto a construção do conjunto dos ordinais enumeráveis quanto à prova do princípio da indução transfinita são explicados em detalhes neste texto e nenhum pré-requisito além dos mencionados anteriormente são necessários para entender todos os argumentos apresentados aqui.

Embora o principal resultado destas notas se refira à uma construção. O leitor deve ter em mente que esta não é precisamente uma construção completamente explícita, no sentido, que nossos argumentos envolvem de maneira fundamental o uso do Axioma da Escolha ou qualquer um dos princípios equivalentes à ele, existentes na Teoria de Conjuntos. Aqui fizemos a escolha de adotar como axioma o chamado Princípio Maximal de Hausdorff (veja pagina 4). Após apresentação deste princípio mostramos que ele é equivalente ao Lema de Zorn e, em seguida, a validade do Princípio da Boa-Ordenação. Prosseguimos mostrando o Princípio da Indução Transfinita e uma caracterização de isomorfismos que preservam ordem entre dois conjuntos bem-ordenados. Após a obtenção destes resultados apresentamos o conjunto Ω dos ordinais enumeráveis e finalizamos o texto com a construção da σ-álgebra gerada por uma coleção. O último resultado mencionado, é precedido de uma discussão motivadora que esclarece bem a necessidade de se considerar o conjunto Ω neste tipo de construção. Além do mais, este tipo de caracterização da σ-álgebra gerada, permite mostrar que cardinalidade de qualquer σ-álgebra gerada por uma coleção enumerável infinita de conjuntos é igual a cardinalidade do contínuo, isto é feito em detalhes na Seção 6 de aplicações.

Para uma exposição mais completa e abrangente entre as equivalências dos princípios da Teoria Axiomática de conjuntos como, por exemplo, equivalência entre o Axioma da Escolha, Lema de Zorn, Princípio da Boa-Ordenação e outros, recomendamos a referência [2].

2 Relações de Ordem

Uma relação $\mathscr{R}$ em um conjunto X não-vazio é simplesmente um subconjunto $\mathscr{R} \subseteq X \times X$. Se um par ordenado $(x, y) \in \mathscr{R}$, dizemos que x está relacionado com y, segundo a relação $\mathscr{R}$. Frequentemente, usamos a notação $x\mathscr{R}y$ para indicar que x está relacionado com y.

Podemos definir relações de diversos tipos em um conjunto não vazio X. Na Teoria de Conjuntos, essas relações são classificadas de acordo com suas propriedades. Segundo essa classificação, uma relação em X pode ser, por exemplo, uma relação de equivalência, uma relação de ordem parcial ou uma relação de ordem total. As definições de cada um desses tipos especiais de relação são apresentadas abaixo.

Definição 1 (Ordem Parcial)**.** Uma relação de **ordem parcial** em um conjunto X não-vazio é um subconjunto $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ satisfazendo

a) $x\mathscr{R}x$, para todo $x \in X$;

b) se $x\mathscr{R}y$ e $y\mathscr{R}z$, então $x\mathscr{R}z$;

c) se $x\mathscr{R}y$ e $y\mathscr{R}x$, então $x = y$.

Um conjunto X equipado com uma relação de ordem parcial $\mathscr{R}$ é chamado de um conjunto parcialmente ordenado.

Um exemplo muito importante de ordem parcial pode ser construído da seguinte maneira. Primeiro consideramos um conjunto arbitrário X não-vazio e olhamos para a coleção $\mathscr{P}(X)$, das partes de X. Sobre a coleção $\mathscr{P}(X)$ defina a relação $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$, onde um par $A, B \in \mathscr{P}(X)$ está relacionado segundo $\mathscr{R}$, ou seja, $A\mathscr{R}B$ se, e somente se, $A \subseteq B$. Observe que segue diretamente das propriedades de inclusão de conjuntos, que $\mathscr{R}$ define uma relação de ordem parcial em $\mathscr{P}(X)$. De fato, para todo $A \in \mathscr{P}(X)$ temos $A\mathscr{R}A$ pois $A \subseteq A$ para todo $A \in \mathscr{P}(X)$. Se A, B e $C \in \mathscr{P}(X)$ são tais que $A\mathscr{R}B$ e $B\mathscr{R}C$, então temos que $A \subseteq B \subseteq C$ e consequentemente $A \subseteq C$ e portanto $A\mathscr{R}C$. Por último, se $A\mathscr{R}B$ e $B\mathscr{R}A$ então temos $A \subseteq B \subseteq A$ e logo $A = B$. O que conclui a prova de que $\mathscr{R}$ define uma relação de ordem parcial em $\mathscr{P}(X)$.

Definição 2 (Ordem Total)**.** Uma relação de **ordem total** em um conjunto X não-vazio é um subconjunto $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ satisfazendo:

a) $x\mathscr{R}x$, para todo $x \in X$;

b) se $x\mathscr{R}y$ e $y\mathscr{R}z$, então $x\mathscr{R}z$;

c) se $x\mathscr{R}y$ e $y\mathscr{R}x$, então $x = y$;

d) para quaisquer $x, y \in X$ temos que $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$.

Um conjunto X equipado com uma relação de ordem total $\mathscr{R}$ é chamado de um conjunto totalmente ordenado.

Observe que uma relação de ordem total em um conjunto X nada mais é do que uma relação de ordem parcial, onde para quaisquer $x, y \in X$, temos que $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$. Às vezes, nos referimos a esta última propriedade dizendo que quaisquer $x, y \in X$ são "comparáveis" (segundo a relação $\mathscr{R}$).

Se $\mathscr{R}$ denota uma relação de ordem parcial ou total em um conjunto X, costumamos substituir o símbolo $\mathscr{R}$, na notação $x\mathscr{R}y$, pelo símbolo $\preccurlyeq$ e escrever $x \preccurlyeq y$ ao invés de $x\mathscr{R}y$. Também é comum, neste contexto, usar a notação $x \prec y$, quando $x \preccurlyeq y$ e $x \neq y$.

Proposição 3. Sejam X um conjunto não-vazio, $\mathscr{R}$ uma relação de ordem parcial (resp. total) em X e $Y \subseteq X$ um subconjunto arbitrário. Então a restrição da relação $\mathscr{R}$ ao conjunto Y, isto é, $\mathscr{R} \cap (Y \times Y)$ induz uma relação de ordem parcial (resp. total) em Y.

Prova. Vamos mostrar que a afirmação da proposição é verdadeira para o caso em que $\mathscr{R}$ define uma relação de ordem total em X. De fato, denote por $\mathscr{D} \equiv \mathscr{R} \cap (Y \times Y)$. Já que para todo $a \in Y$, temos que o par ordenado $(a, a) \in \mathscr{R}$ e $(a, a) \in Y \times Y$, segue que $(a, a) \in \mathscr{R} \cap (Y \times Y) \equiv \mathscr{D}$. Ou seja, $a\mathscr{D}a$, para todo $a \in Y$. Sejam a, b e $c \in Y$ e suponha que $a\mathscr{D}b$ e $b\mathscr{D}c$, então por definição de $\mathscr{D}$ temos que $(a, b) \in \mathscr{R} \cap (Y \times Y)$ e $(b, c) \in \mathscr{R} \cap (Y \times Y)$. Logo $a\mathscr{R}b$ e $b\mathscr{R}c$. Como estamos assumindo que $\mathscr{R}$ é uma relação de ordem total, segue da última observação que $a\mathscr{R}c$. Ou seja, $(a, c) \in \mathscr{R}$. Já que $a, c \in Y$, então temos que $(a, c) \in Y \times Y$ de onde segue que $(a, c) \in \mathscr{R} \cap (Y \times Y)$ e portanto $a\mathscr{D}c$. Por último, dados quaisquer $a, b \in Y$, temos que $(a, b) \in \mathscr{R}$ ou $(b, a) \in \mathscr{R}$ pois $\mathscr{R}$ é uma relação de ordem total em X. Como ambos: (a, b) e $(b, a) \in Y \times Y$, concluímos que $(a, b) \in \mathscr{R} \cap (Y \times Y)$ ou $(b, a) \in \mathscr{R} \cap (Y \times Y)$, equivalentemente $a\mathscr{D}b$ ou $b\mathscr{D}a$. O que conclui a prova de que a relação induzida por $\mathscr{R}$ em Y é uma relação de ordem total. ■

Definição 4 (Isomorfismo que preserva ordem)**.** Sejam $(X, \preccurlyeq)$ e $(Y, \preceq)$ conjuntos não-vazios parcialmente ordenados. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ preserva ordem, se para todo par $x_1, x_2 \in X$ satisfazendo $x_1 \preccurlyeq x_2$, temos $f(x_1) \preceq f(x_2)$. Um isomorfismo entre X e Y que preserva ordem é uma bijeção $f : X \to Y$ tal que f e f^{-1} são funções que preservam ordem.

Definição 5 (Elemento Maximal e Minimal)**.** Seja $(X, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um elemento **maximal** de X é um elemento $x \in X$ que satisfaz: se $x \preccurlyeq y$, então $x = y$. Analogamente, um elemento **minimal** de X é um elemento $a \in X$ que satisfaz: se $b \preccurlyeq a$, então $b = a$.

Observamos que um conjunto parcialmente ordenado $(X, \preccurlyeq)$ não precisa necessariamente ter elemento maximal e ou minimal. Além do mais, mesmo que tais elementos existam eles podem não ser únicos, a menos que $\preccurlyeq$ seja uma relação de ordem total.

Por exemplo, o conjunto dos números inteiros com sua ordem usual $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ é um conjunto totalmente ordenado que não possui nem elemento minimal nem elemento maximal.

Definição 6 (Cotas Superior e Inferior)**.** Sejam $(X, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $E \subseteq X$. Uma **cota superior** para E é um elemento $x \in X$ tal que $y \preccurlyeq x$, para todo $y \in E$. Analogamente, dado um subconjunto $E \subseteq X$ dizemos que um elemento $a \in X$ é um **cota inferior** para E se $a \preccurlyeq y$, para todo $y \in E$.

Observe que podemos ter um elemento maximal de um conjunto parcialmente ordenado $(X, \preccurlyeq)$ que pertence a um subconjunto $E \subseteq X$ e que não é uma cota superior para E. Isto ocorre, por exemplo, quando E não é um conjunto unitário e existe um ponto $x \in E$ que se relaciona, segundo a relação de ordem parcial $\preccurlyeq$, apenas consigo mesmo. Neste caso x é um elemento maximal de X, mas ele não satisfaz a condição de ser uma cota superior já que não é nem sequer possível compará-lo ao demais elementos de E.

Por outro lado, se $(X, \preccurlyeq)$ é totalmente ordenado e X possui algum elemento maximal x, então para qualquer $E \subseteq X$ fixado, temos que x é uma cota superior para E. De fato, por $(X, \preccurlyeq)$ ser totalmente ordenado, podemos afirmar que para cada $y \in E$ só podem ocorrer dois casos: primeiro $x \preccurlyeq y$; e segundo $y \preccurlyeq x$. Se ocorre o primeiro caso para algum elemento $y \in E$, como estamos também assumindo que x é um elemento maximal de X, podemos concluir que $y = x$. Observamos inclusive que este caso ocorre se, e somente se, $x \in E$. Se o primeiro caso não ocorre para nenhum elemento de E, então temos $y \preccurlyeq x$, para todo $y \in E$, mostrando, em ambos casos, temos $y \preccurlyeq x$, para todo $y \in E$ e portanto x é uma cota superior de E.

Como vimos na Proposição 3 se $(X, \preccurlyeq)$ é um conjunto totalmente ordenado e $Y \subseteq X$ é um subconjunto arbitrário então a restrição da relação de ordem $\preccurlyeq$ ao conjunto Y, induz uma relação de ordem total em Y. Às vezes, podemos abusar da notação e denotar este conjunto totalmente ordenado simplesmente por $(Y, \preccurlyeq)$ ou, alternativamente, por $(Y, \preccurlyeq|_Y)$.

Definição 7 (Conjuntos Bem-Ordenados)**.** Dizemos que um conjunto não-vazio X, munido da relação de ordem total $\preccurlyeq$, é um **conjunto bem-ordenado** se para todo subconjunto não-vazio $Y \subseteq X$ existe $y \in Y$ (necessariamente único) tal que y é um elemento minimal em $(Y, \preccurlyeq|_Y)$.

O conjunto dos números naturais com sua relação de ordem usual $(\mathbb{N}, \leqslant)$, fornece um dos exemplos mais simples de um conjunto infinito bem-ordenado.

Se $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado, dizemos, às vezes, que $\preccurlyeq$ é uma boa-ordem em X. O restante desta seção é dedicado aos preparativos para a apresentação de um resultado conhecido como Princípio da Boa-Ordenação. Este resultado afirma que qualquer conjunto X não vazio pode ser munido de uma relação de ordem total $\preccurlyeq$, onde $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado. Neste texto, este resultado será obtido, a seguir, como um teorema. Para isto vamos assumir como axioma o chamado Princípio Maximal de Hausdorff, cujo enunciado é formulado abaixo.

Princípio Maximal de Hausdorff. Todo conjunto não-vazio X, parcialmente ordenado por uma relação de ordem $\preccurlyeq$ possui um subconjunto **maximal** Y tal que $(Y, \preccurlyeq|_Y)$ é totalmente ordenado, ou seja, se Z é um subconjunto de X contendo propriamente Y, ou seja, $Y \subsetneq Z$, então $(Z, \preccurlyeq|_Z)$ não é totalmente ordenado.

Como veremos abaixo o Princípio Maximal de Hausdorff é equivalente ao chamado Lema de Zorn. Isto significa que assumindo qualquer um dos dois como axioma, podemos deduzir o outro como consequência.

Lema 8 (Lema de Zorn)**.** Seja X um conjunto não-vazio e $\preccurlyeq$ uma relação de ordem parcial em X. Se para todo subconjunto Y tal que $(Y, \preccurlyeq|_Y)$ é totalmente ordenado, existe algum $z \in X$ tal que z é uma cota superior para Y, então X possui pelo menos um elemento maximal.

Prova. Pelo Princípio Maximal de Hausdorff podemos afirmar que X contem um subconjunto maximal Y satisfazendo: $(Y, \preccurlyeq|_Y)$ é totalmente ordenado. Pela hipótese do Lema de Zorn, Y possui uma cota superior, isto é, existe algum $z \in X$ tal que $y \preccurlyeq z$, para todo $y \in Y$. Afirmamos que $z \in Y$ e além do mais, z é um elemento maximal de X.

De fato, para verificar a validade da primeira afirmação basta observar que $Y \cup \{z\}$, munido da ordem $\preccurlyeq|_{Y\cup\{z\}}$ é totalmente ordenado. Portanto, segue da maximalidade de Y que $Y \cup \{z\} \subseteq Y$, mostrando que $z \in Y$. Para verificar a validade da segunda afirmação, suponha que $z \preccurlyeq w$, para algum $w \in X$. Então $Y \cup \{w\}$, munido da relação de ordem $\preccurlyeq|_{Y\cup\{w\}}$ é um conjunto totalmente ordenado. Novamente, pela maximalidade de Y, podemos concluir que $w \in Y$. Como z é um cota superior para Y podemos garantir que $w \preccurlyeq z$. Mas como assumimos que $z \preccurlyeq w$ então concluímos que $w = z$, mostrando que z é um elemento maximal de X. ■

Vamos mostrar agora que se assumimos o Lema de Zorn como verdadeiro, então podemos concluir que vale o Princípio Maximal de Hausdorff. Seja X um conjunto não-vazio e $\preccurlyeq$ uma ordem parcial em X. Considere a família

$$\mathscr{F} \equiv \{(Z, \preccurlyeq|_Z) : \varnothing \subsetneq Z \subseteq X \text{ e } (Z, \preccurlyeq|_Z) \text{ é totalmente ordenado}\}.$$

Agora vamos olhar para $\mathscr{F}$ como um conjunto parcialmente ordenado por uma nova relação de ordem que será chamada de $\preceq$ e que é definida da seguinte maneira. Dados $(Z_1, \preccurlyeq|_{Z_1})$ e $(Z_2, \preccurlyeq|_{Z_2}) \in \mathscr{F}$ vamos dizer que

$$(Z_1, \preccurlyeq|_{Z_1}) \preceq (Z_2, \preccurlyeq|_{Z_2}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Z_1 \subset Z_2.$$

Observe a (pequena) diferença na notação de cada uma das relações de ordem usadas até o momento. A relação de ordem em X é denotada por $\preccurlyeq$ enquanto que em $\mathscr{F}$ a relação de ordem é denotada por $\preceq$.

Seja $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{F}$ um subconjunto arbitrário satisfazendo $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado. Vamos mostrar que $\mathscr{N}$ possui alguma cota superior.

Seja Γ um conjunto abstrato de índices que está em bijeção com $\mathscr{N}$ e reescreva, com auxilio de Γ, o conjunto $\mathscr{N}$ como uma união de todos os seus elementos, como segue

$$\mathscr{N} = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} \{(Z_\alpha, \preccurlyeq|_{Z_\alpha})\}.$$

Agora considere o seguinte subconjunto de X, definido por

$$W \equiv \bigcup_{\alpha\in\Gamma} Z_\alpha.$$

Afirmamos que $(W, \preccurlyeq|_W) \in \mathscr{F}$ e além do mais, é uma cota superior para $\mathscr{N}$. Para verificar que $(W, \preccurlyeq|_W)$ é totalmente ordenado, precisamos mostrar que são satisfeitas as quatro condições da Definição 2. As três primeiras seguem diretamente do fato de $\preccurlyeq$ ser uma relação de ordem parcial em X. Para verificar a validade da última condição, tomamos um par arbitrário $x, y \in W$. Como W é a união dos Z_α's, sabemos que existem índices α_1 e $\alpha_2 \in \Gamma$ tais que $x \in Z_{\alpha_1}$ e $y \in Z_{\alpha_2}$. Como $(\mathscr{N}, \preceq)$ é totalmente ordenado uma das seguintes alternativas se verificam:

$$(Z_{\alpha_1}, \preccurlyeq|_{Z_{\alpha_1}}) \preceq (Z_{\alpha_2}, \preccurlyeq|_{Z_{\alpha_2}}) \qquad \text{ou} \qquad (Z_{\alpha_2}, \preccurlyeq|_{Z_{\alpha_2}}) \preceq (Z_{\alpha_1}, \preccurlyeq|_{Z_{\alpha_1}}).$$

Se ocorre o primeiro caso temos, pela definição de $\preceq$ que $Z_{\alpha_1} \subseteq Z_{\alpha_2}$ e portanto $x, y \in Z_{\alpha_2}$. Como $(Z_{\alpha_2}, \preccurlyeq|_{Z_{\alpha_2}})$ é totalmente ordenado temos que $x \preccurlyeq|_{Z_{\alpha_2}} y$ ou $y \preccurlyeq|_{Z_{\alpha_2}} x$. Como $Z_2 \subset W$ segue da última observação que $x \preccurlyeq|_W y$ ou $y \preccurlyeq|_W x$. A análise do segundo caso é completamente análoga. Desta forma temos que $(W, \preccurlyeq|_W)$ é totalmente ordenado e portanto um elemento de $\mathscr{F}$. Afirmamos que $(W, \preccurlyeq|_W)$ é uma cota superior de $\mathscr{N}$. De fato, para todo $\alpha \in \Gamma$ temos que $Z_\alpha \subseteq W$ e portanto

$$(Z_\alpha, \preccurlyeq|_{Z_\alpha}) \preceq (W, \preccurlyeq|_W), \qquad \forall \alpha \in \Gamma.$$

Em resumo, mostramos acima que se $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{F}$ um subconjunto arbitrário satisfazendo $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado, então $\mathscr{N}$ possui pelo menos uma cota superior. Portanto segue do Lema de Zorn que $\mathscr{F}$ possui um elemento maximal $(Y, \preccurlyeq|_Y)$ e consequentemente que o Princípio Maximal de Hausdorff pode ser obtido como consequência do Lema de Zorn.

Em alguns dos argumento apresentados acima, trabalhamos com $(X, \preccurlyeq)$ parcialmente ordenado e com vários subconjuntos $Y \subseteq X$ munidos da relação de ordem parcial induzida por $\preccurlyeq$ em Y, que era simplesmente a restrição da relação $\preccurlyeq$ ao conjunto Y, definida por $\preccurlyeq \cap (Y \times Y)$ e denotada por $\preccurlyeq|_Y$. A barra vertical, que aparece na notação ao lado, é usada para lembrar que esta relação deriva da restrição de uma relação $\preccurlyeq$ definida em algum conjunto "maior" contendo Y. A seguir, vamos trabalhar com a notação $(Z, \preccurlyeq_Z)$. Observamos que, embora esta nova notação $\preccurlyeq_Z$ guarde alguma semelhança com $\preccurlyeq|_Z$, elas não devem ser confundidas. A razão é que a notação $\preccurlyeq_Z$ pode ser usada para denotar uma ordem parcial arbitraria em um conjunto Z, enquanto $\preccurlyeq|_Z$ deve ser usada apenas no caso em que Z é tratado como subconjunto de algum conjunto X, onde temos definida a ordem parcial $\preccurlyeq$ e além do mais, a relação de ordem $\preccurlyeq|_Z$ é necessariamente a restrição à Z da relação de ordem $\preccurlyeq$.

Teorema 9 (Princípio da Boa-Ordenação)**.** Seja X é um conjunto não-vazio arbitrário. Então existe alguma relação de ordem $\preccurlyeq$ em X tal que $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado.

Prova. Para cada $Z \subseteq X$ não-vazio, considere a coleção (que em alguns casos pode ser vazia) de todas as relações de boa-ordem em Z, isto é,

$$\mathscr{B}(Z) \equiv \{\mathscr{R} \subset Z \times Z \,:\, (Z, \mathscr{R}) \text{ é bem-ordenado}\}.$$

Para cada $Z \subseteq X$ tal que $\mathscr{B}(Z) \neq \varnothing$, escolha (arbitrariamente) uma relação $\mathscr{R}(Z) \in \mathscr{B}(Z)$. Assim temos que $(Z, \mathscr{R}(Z))$ é bem-ordenado. Por questão de simplicidade, às vezes, vamos usar a notação $(Z, \preccurlyeq_Z)$ ao invés de $(Z, \mathscr{R}(Z))$.

Usando as escolhas feitas acima podemos definir o seguinte conjunto

$$\mathcal{W} \equiv \{(Z, \preccurlyeq_Z) \,:\, \varnothing \subsetneq Z \subseteq X \text{ e } (Z, \preccurlyeq_Z) \text{ é bem-ordenado}\}.$$

A ideia principal da demonstração do teorema consiste em equipar o conjunto $\mathcal{W}$ com uma relação de ordem parcial e demonstrar que as hipóteses do Lema de Zorn são válidas. Portanto, nosso próximo passo será construir uma relação de ordem parcial $\preceq$ em $\mathcal{W}$.

Se $W \subseteq Z \subseteq X$ são subconjuntos não-vazios, então podemos escrever, usando as identificações naturais, que $W \times W \subseteq Z \times Z$. Assim, podemos olhar para uma relação $\mathscr{R} \subseteq W \times W$ como um subconjunto de $Z \times Z$ e consequentemente como uma relação em Z. Este tipo de identificação permite, por exemplo, comparar uma relação $\mathscr{S} \subset Z \times Z$ com a relação $\mathscr{R} \subseteq W \times W$, olhando para ambas como subconjuntos de $Z \times Z$. Estas identificações, permitem interpretar a continência de relações $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{S}$, como se a relação $\mathscr{S}$ fosse uma extensão da relação $\mathscr{R}$. Esta é uma das ideias por trás da relação de ordem que vamos introduzir no conjunto $\mathcal{W}$.

Dados $(W, \preccurlyeq_W)$ e $(Z, \preccurlyeq_Z) \in \mathcal{W}$, vamos dizer que

$$(W, \preccurlyeq_W) \preceq (Z, \preccurlyeq_Z) \iff \begin{array}{l} W \subseteq Z, \quad \mathscr{R}(W) \subseteq \mathscr{R}(Z) \quad \text{e} \\ \text{se } z \in Z \setminus W, \text{ então } w \preccurlyeq_Z z, \ \forall w \in W. \end{array}$$

onde $\mathscr{R}(W) \equiv \preccurlyeq_W$ e $\mathscr{R}(Z) \equiv \preccurlyeq_Z$.

Seja $\mathscr{N} \subset \mathcal{W}$ tal que $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado. Observe que aqui não há erro de notação $\preceq|_{\mathscr{N}}$ é realmente a restrição da ordem $\preceq$ ao conjunto $\mathscr{N}$.

De maneira análoga à feita na prova de que o Lema de Zorn implica o Princípio Maximal de Hausdorff, vamos olhar para $\mathscr{N}$ como sendo o conjunto formado pela união de cada um de seus elementos, isto é, para algum conjunto de índices Γ que está em bijeção com $\mathscr{N}$, podemos escrever

$$\mathscr{N} \equiv \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}).$$

Considere o subconjunto $U \subseteq X$ definido por

$$U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z_\alpha.$$

Considere também a relação $\mathscr{R}(U) \subset U \times U$, definida por

$$\mathscr{R}(U) \equiv \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \mathscr{R}(Z_\alpha).$$

Afirmamos que $(U, \mathscr{R}(U))$ é bem-ordenado. De fato, para cada $x \in U$, sabemos que existe algum $\alpha \in \Gamma$ tal que $x \in Z_\alpha$. Logo $(x, x) \in \mathscr{R}(Z_\alpha) \subset \mathscr{R}(U)$, ou seja, $x\mathscr{R}(U)x$.

Suponha que $x\mathscr{R}(U)y$ e $y\mathscr{R}(U)z$. Então, pela definição de $\mathscr{R}(U)$, podemos afirmar que existem índices α e $\beta \in \Gamma$ tais que $x\mathscr{R}(Z_\alpha)y$ e $y\mathscr{R}(Z_\beta)z$. Como $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado podemos afirmar que: $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \preceq (Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta})$ ou $(Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta}) \preceq (Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha})$. Vamos considerar estas duas alternativas separadamente. Se ocorre a primeira alternativa, isto é, $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \preceq (Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta})$, segue da definição da relação de ordem $\preceq$ que $Z_\alpha \subset Z_\beta$ e que $\mathscr{R}(Z_\alpha) \subseteq \mathscr{R}(Z_\beta)$. Portanto se $x\mathscr{R}(Z_\alpha)y$, então temos que $x\mathscr{R}(Z_\beta)y$. Já que $y\mathscr{R}(Z_\beta)z$ e $\mathscr{R}(Z_\beta)$ é uma relação de ordem em Z_β podemos concluir que $x\mathscr{R}(Z_\beta)z$ e consequentemente $x\mathscr{R}(U)z$. A análise do caso $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha})$ é análoga, bastando trocar os papeis de α e β.

Vamos supor agora que $x\mathscr{R}(U)y$ e $y\mathscr{R}(U)x$. Argumentando como no parágrafo anterior podemos afimar que existem índices α e β tais que $x\mathscr{R}(Z_\alpha)y$ e $y\mathscr{R}(Z_\beta)x$. Usando mais uma vez que $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado podemos concluir que: $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \preceq (Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta})$ ou $(Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta}) \preceq (Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha})$. Vamos supor que $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \preceq (Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta})$. O outro caso é tratado de maneira semelhante. Neste caso segue da definição da relação de ordem $\preceq$ que $Z_\alpha \subset Z_\beta$ e que $\mathscr{R}(Z_\alpha) \subseteq \mathscr{R}(Z_\beta)$. Portanto se $x\mathscr{R}(Z_\alpha)y$, então temos que $x\mathscr{R}(Z_\beta)y$. Já que $y\mathscr{R}(Z_\beta)x$ e $\mathscr{R}(Z_\beta)$ é uma relação de ordem em Z_β podemos concluir que $x = y$.

Dados $x, y \in U$ vamos mostrar que $x\mathscr{R}(U)y$ ou $y\mathscr{R}(U)x$. O argumento aqui também é análogo ao dos dois parágrafos anteriores. Começamos observando que devem existir índices α e $\beta \in \Gamma$ tais que $x \in Z_\alpha$ e $y \in Z_\beta$. Usamos novamente que $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado para concluir que: $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \preceq (Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta})$ ou $(Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta}) \preceq (Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha})$. Suponha que seja verdadeira a primeira alternativa. Então pela definição da relação de ordem $\preceq$ concluímos que $Z_\alpha \subseteq Z_\beta$ e assim temos que $x, y \in Z_\beta$. Já que $\mathscr{R}(Z_\beta)$ é uma ordem total em Z_β temos que $x\mathscr{R}(Z_\beta)y$ ou $y\mathscr{R}(Z_\beta)z$ e consequentemente, pela definição de $\mathscr{R}(U)$ temos que $x\mathscr{R}(U)y$ ou $y\mathscr{R}(U)x$.

Vamos mostrar agora que $\mathscr{R}(U)$ é uma boa-ordem em U. Seja $V \subseteq U$ um conjunto não-vazio. Fixe um elemento arbitrário $v_0 \in V$. Pela definição de U existe algum índice $\alpha \in \Gamma$, tal que $v_0 \in Z_\alpha$. Logo $V \cap Z_\alpha$ é um subconjunto não vazio de Z_α. Como $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha})$ é bem-ordenado, sabemos que existe algum elemento $m \in Z_\alpha \cap V$ tal que $m \preccurlyeq_{Z_\alpha} v$, para todo $v \in V \cap Z_\alpha$. Ou seja, existe $m \in V$ tal que

$$(m, v) \in \mathscr{R}(Z_\alpha) \subseteq \mathscr{R}(U),\ \forall v \in V \cap Z_\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\mathscr{R}(U)v,\ \forall v \in V \cap Z_\alpha.$$

Agora, seja $v \in V$, um elemento arbitrário. Se $v \in Z_\alpha$, então temos pela definição de m que $m \preccurlyeq_{Z_\alpha} v$. Caso contrário, existe algum índice $\beta \in \Gamma$, tal que $v \in Z_\beta \setminus Z_\alpha$. Mas já que $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado segue da definição da ordem parcial $\preceq$ que temos necessariamente $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \preceq (Z_\beta, \preccurlyeq_{Z_\beta})$. Além do mais, segue da terceira condição da definição de $\preceq$ que $m \preccurlyeq_{Z_\beta} v$, para todo $v \in Z_\beta \setminus Z_\alpha$. Portanto segue dos resultados obtidos neste parágrafo que

$$(m, v) \in \mathscr{R}(Z_\beta) \subseteq \mathscr{R}(U) \iff m\mathscr{R}(U)v, \qquad \forall v \in V.$$

Destas relações e do fato de $m \in V$, segue que m é um elemento minimal de V. Já que V é um subconjunto arbitrário não-vazio de U concluímos que $(U, \mathscr{R}(U))$ é bem-ordenado, ou seja, usando a notação $\mathscr{R}(U) \equiv \preccurlyeq_U$ mostramos que

$$(U, \preccurlyeq_U) \in \mathcal{W}.$$

Próximo passo é verificar que $(U, \preccurlyeq_U)$ é uma cota superior para $\mathscr{N}$ em $(\mathcal{W}, \preceq)$. Dado $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \in \mathscr{N}$, temos pelas definições de U e $\mathscr{R}(U)$ que $Z_\alpha \subseteq U$ e $\mathscr{R}(Z_\alpha) \subset \mathscr{R}(U)$. Para cada $z \in U \setminus Z_\alpha$, existe algum $\beta \in \Gamma$ tal que $z \in Z_\beta \setminus Z_\alpha$, mas já que $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado temos que da definição de $\preceq$ que $Z_\alpha \subseteq Z_\beta$ e que $w \preccurlyeq_{Z_\beta} z$, para todo $w \in Z_\alpha$. Já que $\mathscr{R}(Z_\beta) \subset \mathscr{R}(U)$ temos $w \preccurlyeq_U z$, para todo $w \in Z_\alpha$. O que mostra que $(Z_\alpha, \preccurlyeq_{Z_\alpha}) \preceq (U, \preccurlyeq_U)$ e portanto que $(U, \preccurlyeq_U)$ é uma cota superior para $\mathscr{N}$.

Em resumo, acabamos de mostrar que para cada subconjunto $\mathscr{N} \subset \mathcal{W}$ tal que $(\mathscr{N}, \preceq|_{\mathscr{N}})$ é totalmente ordenado, temos que $\mathscr{N}$ possui uma cota superior. Portanto podemos aplicar o Lema de Zorn para garantir que $(\mathcal{W}, \preceq)$ possui um elemento maximal $(Y, \preccurlyeq_Y)$.

Se $Y = X$ não há mais nada a fazer pois pela definição de $\mathcal{W}$ a relação $\preccurlyeq_Y$ é uma boa-ordem em X.

Caso contrário, existe algum $z \in X \setminus Y$. Portanto o conjunto $Z \equiv Y \cup \{z\}$ contém propriamente o conjunto Y e e podemos considerar em Z a relação de ordem $\preccurlyeq_Z$, que é uma extensão $\preccurlyeq_Y$, e dada por

- $x \preccurlyeq_Z y$ se $x, y \in Y$ e $x \preccurlyeq_Y y$;

- $y \preccurlyeq_Z z$, para todo $y \in Y$.

Usando que $(Y, \preccurlyeq_Y)$ é bem-ordenado é imediato verificar que $(Z, \preccurlyeq_Z)$ também é bem-ordenado e pela construção da relação de ordem $\preccurlyeq_Z$ temos também que $(Y, \preccurlyeq_Y) \preceq (Z, \preccurlyeq_Z)$ o que contraria a maximalidade de $(Y, \preccurlyeq_Y)$ o que é um absurdo. Logo $Y = X$ e assim temos que $(X, \preccurlyeq_X)$ é bem-ordenado. ■

Seja X um conjunto não-vazio e $\preccurlyeq$ uma relação de ordem em X tal que $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado. Seja $B \subset X$ um subconjunto não-vazio arbitrário. Então por definição de boa-ordem B possui um elemento minimal(necessariamente único), isto é, existe $a \in B$ tal que se $b \preccurlyeq a$, para algum $b \in B$, então $b = a$. Além do mais, se $a' \in X$ é uma cota inferior de B, então $a' \preccurlyeq a$. Portanto a é um elemento maximal entre as cotas inferiores de B. Este elemento a será denotado por $\inf(B)$ e chamado de **ínfimo de** B. Portanto, se

$$\text{se } (X, \preccurlyeq) \text{ é bem-ordenado e } \varnothing \subsetneq B \subset X \Longrightarrow \exists \inf(B) \in B.$$

Vamos dizer que um conjunto não-vazio $B \subseteq X$ é limitado superiormente, se existe algum $m \in X$ tal que $b \preccurlyeq m$, para todo $b \in B$. É claro que se B é limitado superiormente, então o conjunto das cotas superiores de B, ou seja, $\{m \in X : b \preccurlyeq m \ \ \forall b \in B\}$ é não-vazio. Neste caso, o elemento minimal do conjunto das cotas superiores é denotado por $\sup(B)$ e chamado de **supremo de** B.

Observamos que em um conjunto bem ordenado $(X, \preccurlyeq)$ não é possível garantir, em geral, nem a existência de $\sup(B)$ nem que $\sup(B) \in B$.

Definição 10 (Segmento Inicial)**.** Seja X um conjunto não-vazio e $\preccurlyeq$ uma relação de ordem em X tal que $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado. Para cada $x \in X$ definimos o **segmento inicial** de x como sendo o conjunto

$$I_x \equiv \{y \in X : \ y \prec x\}.$$

Os elementos de I_x são chamados de **predecessores** de x.

É bem conhecido que o princípio da indução é equivalente ao fato de que $\mathbb{N}$, com sua ordem usual, é bem ordenado. Como veremos a seguir, este tipo de caracterização pode ser estendido a quaisquer conjuntos bem-ordenados.

Teorema 11 (Princípio de Indução Transfinita)**.** Seja X um conjunto não-vazio e $\preccurlyeq$ uma relação de ordem em X tal que $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado. Se $A \subseteq X$ é tal que: para todo segmento inicial $I_x \subseteq A$ temos que $x \in A$, então $A = X$.

Prova. Se $A \subsetneq X$. Então $X \setminus A$ é um subconjunto não-vazio. Como $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado sabemos que $x \equiv \inf(X \setminus A) \in X \setminus A$. Além do mais, para qualquer $y \prec \inf(X \setminus A)$, temos por definição de ínfimo que $y \notin X \setminus A$, ou seja, $y \in A$. Portanto, todo os pontos do segmento inicial

$$I_x \equiv \{y \in X : \ y \prec \inf(X \setminus A)\} \subseteq A.$$

Mas se $I_x \subseteq A$, então segue da hipótese que $x \in A$, o que é um absurdo pois sabemos que $x \equiv \inf(X \setminus A) \in X \setminus A$. Isto mostra que $A \subsetneq X$ não ocorre e portanto $A = X$. ■

Proposição 12. Seja X um conjunto não-vazio e $\preccurlyeq$ uma relação de ordem em X tal que $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado. Para qualquer subconjunto não-vazio $A \subseteq X$ temos que

$$\bigcup_{x\in A} I_x = I_b, \text{ para algum } b \in X \qquad \text{ou} \qquad \bigcup_{x\in A} I_x = X.$$

Prova. Considere o conjunto

$$J \equiv \bigcup_{x\in A} I_x.$$

Se $J \neq X$, então podemos afirmar que $X \setminus J$ é não-vazio, como $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado, sabemos que existe $b \equiv \inf(X \setminus J) \in X \setminus J$. Se existe algum $y \in J$ tal que $b \prec y$, então temos pela definição de J que $y \in I_x$, para algum $x \in A$. Como estamos assumindo que $b \prec y$, e $y \in I_x$, então temos que $y \prec x$. Portanto $b \prec x$ e consequentemente $b \in I_x \subseteq J$. O que é um absurdo. Portanto, caso $J \neq X$ temos, para todo $y \in J$, que $y \preceq b$. Como $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado e $b \in X \setminus J$ podemos concluir que $y \prec b$, para todo $y \in J$. Mostrando que $J \subseteq I_b$. Por outro lado, segue da definição de b e de ínfimo que $I_b \subseteq J$, o que mostra finalmente que $J = I_b$. ■

3 Isomorfismos entre Conjuntos Bem-Ordenados

Teorema 13. Sejam $(X, \preccurlyeq)$ e $(Y, \leqslant)$ conjuntos bem-ordenados. Então vale uma das seguintes afirmações:

a) existe um isomorfismo que preserva ordem $f : X \to Y$;

b) existe algum elemento $y \in Y$ e um isomorfismo que preservar ordem $f : X \to I_y$, onde $I_y \equiv \{z \in Y : z < y\}$

c) existe algum elemento $x \in X$ e um isomorfismo que preserva ordem $f : I_x \to Y$, onde $I_x \equiv \{z \in X : z \prec x\}$.

Prova. Uma função f definida em algum subconjunto $X' \subseteq X$ e tomando valores em Y, pode ser identificada de maneira única com o subconjunto, chamado de gráfico de f,

$$\mathscr{G}(f) \equiv \big\{\big(x, f(x)\big) \in X \times Y : x \in X' \quad \text{e} \quad f(x) \in Y'\big\}.$$

Lembramos que uma função $g : X'' \to Y''$ é chamada de extensão de f se

$$\text{dom}(f) \equiv X' \subseteq X'' \equiv \text{dom}(g) \qquad \text{e} \qquad \mathscr{G}(f) \subseteq \mathscr{G}(g).$$

Considere a coleção $\mathcal{F}$ de todos os isomorfismos que preservam ordem e cujos domínios são segmentos iniciais em X ou o próprio X e a imagem são segmentos iniciais em Y ou o próprio Y, ou seja,

$$\mathcal{F} \equiv \left\{ \mathscr{G}(f) \subset X \times Y \quad : \quad \begin{array}{l} f : X' \to Y' \text{ é um isomorfismo que preserva ordem,} \\ X' = I_x, \text{para algum } x \in X \text{ ou } X' = X \quad \text{e} \\ Y' = I_y \text{ para algum } y \in Y \text{ ou } Y' = Y. \end{array} \right\}.$$

Observe que o elemento $\inf(X) \in X$ pode ser visto como um segmento inicial. De fato, se x_0 denota o elemento minimal de $X \setminus \{\inf(X)\}$ temos que $I_{x_0} \equiv \{x \in X : x \prec x_0\} = \{\inf(X)\}$.

Analogamente, podemos afirmar que $\inf(Y) = I_{y_0}$, onde $y_0 = \inf(Y \setminus \{\inf(Y)\})$. Portanto a função f definida no conjunto unitário $\{\inf(X)\}$ e que toma o valor $\{\inf(Y)\}$ é uma bijeção que preserva ordem (embora neste caso pareça que a definição de preservar ordem fique meio degenerada, veremos que mesmo neste caso ela é atendida) já que se $x_1, x_2 \in \{\inf(X)\}$ são tais que $x_1 \preccurlyeq x_2$ temos $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Ou seja, $\mathscr{G}(f)$, onde $f : \{\inf(X)\} \to \{\inf(Y)\}$ é um elemento da coleção $\mathcal{F}$.

Note que a coleção $\mathcal{F}$ pode ser munida de uma relação de ordem parcial $\preceq$, onde dizemos que $\mathscr{G}(f) \preceq \mathscr{G}(g)$, se g é uma extensão de f.

Para construir o isomorfismo que o teorema afirma existir, a ideia é mostrar que $\mathcal{F}$ possui um elemento maximal. Para isto vamos mostrar que são válidas as hipóteses do Lema de Zorn.

Seja $(\mathcal{N}, \preceq)$ um subconjunto de $\mathcal{F}$ totalmente ordenado. Defina $X_{\mathcal{N}} \subseteq X$ da seguinte maneira

$$X_{\mathcal{N}} \equiv \bigcup_{f \in \mathcal{N}} \operatorname{dom}(f).$$

Se existe algum isomorfismo f que preserva ordem com $\mathscr{G}(f) \in \mathcal{N}$ e tal que $\operatorname{dom}(f) = X$, então não há mais nada a fazer. Caso contrário, podemos afirmar que para cada isomorfismo f tal que $\mathscr{G}(f) \in \mathcal{N}$ temos que $\operatorname{dom}(f) = I_{x_f}$ e portanto

$$X_{\mathcal{N}} \equiv \bigcup_{f \in \mathcal{N}} \operatorname{dom}(f) = \bigcup_{f \in \mathcal{N}} I_{x_f}$$

Aplicando a Proposição 12 podemos garantir que

$$X_{\mathcal{N}} = I_{x'}, \text{ para algum } x' \in X \qquad \text{ou} \qquad X_{\mathcal{N}} = X.$$

No que segue, vamos mostrar como construir um isomorfismo $F : X_{\mathcal{N}} \to Y' \subseteq Y$ que preserva ordem, $F \in \mathcal{F}$ e além do mais, satisfaz $\mathscr{G}(f) \preceq \mathscr{G}(F)$, para todo $f \in \mathcal{N}$.

Para cada $x \in X_{\mathcal{N}}$, sabemos que existe alguma função $f \in \mathcal{N}$, tal que $x \in \operatorname{dom}(f)$. Defina $F(x) \equiv f(x)$. Para verificar que F está bem-definida, basta observar que se $x \in \operatorname{dom}(f)$ e $x \in \operatorname{dom}(g)$, então segue do fato de $(\mathcal{N}, \preceq)$ ser totalmente ordenado que $\mathscr{G}(f) \subseteq \mathscr{G}(g)$ ou $\mathscr{G}(g) \subseteq \mathscr{G}(f)$. Como em ambos os casos temos $f(x) = g(x)$ segue que F está bem-definida.

Vamos verificar que F preserva ordem. Para isto sejam $x_1, x_2 \in X_{\mathcal{N}}$ com $x_1 \preccurlyeq x_2$. Já que $\operatorname{dom}(f_2) = I_{x_{f_2}}$ é um segmento inicial possuindo x_2 e $x_1 \preccurlyeq x_2$, podemos concluir que $x_1 \in \operatorname{dom}(f_2)$. Como f_2 é um isomorfismo que preserva ordem temos temos que $f_2(x_1) \leqslant f_2(x_2)$. Daí segue diretamente da definição de F que $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

Para verificar que F é uma bijeção entre $X_{\mathcal{N}}$ e sua imagem, basta observar que se $F(x) = F(y)$, para $x, y \in X_{\mathcal{N}}$, então existem $f, g \in \mathcal{N}$ tais que $x \in \operatorname{dom}(f)$ e $y \in \operatorname{dom}(g)$ tais que $x \in \operatorname{dom}(f)$ e $y \in \operatorname{dom}(g)$. Já que estes dois domínios são segmentos inicias podemos argumentar como acima que um destes domínios contém o outro. Supondo que $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ temos temos que $x, y \in \operatorname{dom}(g)$ e $g(x) = F(x) = F(y) = g(y)$. Mas como $g \in \mathcal{N}$ g é uma bijeção e assim concluímos que $x = y$, mostrando finalmente que $F : X_{\mathcal{N}} \to F(X_{\mathcal{N}})$ é uma bijeção.

Já sabemos que $F : X_{\mathcal{N}} \to F(X_{\mathcal{N}})$ é uma bijeção que preserva ordem e que seu domínio é um segmento inicial. Para mostrar que F é um cota superior para $\mathcal{N}$ ainda temos duas tarefas pela frente. A primeira é mostrar que o conjunto imagem $F(X_{\mathcal{N}})$ é igual a um segmento inicial ou a todo o conjunto Y e a segunda, mostrar que $F \in \mathcal{F}$ e que $\mathscr{G}(f) \preceq \mathscr{G}(F)$, para toda $f \in \mathcal{N}$.

Vamos mostrar primeiro que $F(X_{\mathcal{N}})$ é um segmento inicial ou todo o conjunto Y. Para isto note que segue das propriedades elementares da imagem direta de uma função que

$$X_{\mathcal{N}} = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} I_{x_f} \qquad \Longrightarrow \qquad F(X_{\mathcal{N}}) \equiv F\left(\bigcup_{f\in\mathcal{N}} I_{x_f}\right) = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} F(I_{x_f}) \tag{1}$$

Se para algum $f \in \mathcal{N}$ temos $F(I_{x_f}) = Y$, Por outro lado, sabemos que para cada $f \in \mathcal{N}$ fixada, temos $F(I_{x_f}) = f(I_{x_f}) = I_{y_f}$, onde a última igualdade segue da definição de $\mathcal{F}$. Portanto temos de (1), de $(Y, \leqslant)$ ser bem-ordenado e da Proposição 12 que

$$F(X_{\mathcal{N}}) \equiv F\left(\bigcup_{f\in\mathcal{N}} I_{x_f}\right) = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} F(I_{x_f}) = \bigcup_{f\in\mathcal{N}} I_{y_f} = I_{y'} \quad \text{ou} \quad Y.$$

O que finaliza a prova de que $F \in \mathcal{F}$. Além do mais, segue diretamente da definição da função F que esta função é uma extensão de f para qualquer $f \in \mathcal{N}$ e portanto $\mathscr{G}(f) \subseteq \mathscr{G}(F)$. Fato este que encerra a prova que $(\mathcal{N}, \preceq)$ possui uma cota superior.

Assim podemos aplicar o Lema de Zorn para garantir que em $(\mathcal{F}, \preceq)$ existe pelo menos um elemento maximal que vamos denotar por f^*. Caso $\mathrm{dom}(f^*) = X$ ou $\mathrm{Im}(f^*) = Y$, não há mais nada a fazer pois, f^* é o isomorfismo que preserva ordem, desejado. Caso contrário, o elemento maximal de $(\mathcal{F}, \preceq)$ define uma função $f^* : I_{x^*} \to I_{y^*}$. Mas neste caso, a função $F^* : I_{x^*} \cup \{x^*\} \to I_{y^*} \cup \{y^*\}$ definida por $F^*(x^*) = y^*$ e $F^*(x) = f^*(x)$, para todo $x \in I_{x^*}$, seria um isomorfismo que preserva ordem e $\mathscr{G}(f^*) \prec \mathscr{G}(F^*)$ o que contradiz a maximalidade de f^*.

Resulta dos argumentos apresentados acima que em qualquer caso se verifica pelo menos uma das três alternativas: a), b) ou c) do enunciado do teorema, e assim finalizamos a demonstração. ■

4 O Conjunto dos Ordinais Enumeráveis

Proposição 14. Existe um conjunto não-enumerável e bem-ordenado $(\Omega, \preccurlyeq)$ tal que para todo $x \in \Omega$ o segmento inicial I_x é enumerável. Além do mais, se Ω' é também um conjunto não-enumerável, $(\Omega', \preceq)$ é bem-ordenado e todos seus segmentos iniciais são enumeráveis então existe um isomorfismo que preserva ordem levando Ω em Ω'.

Prova. A existência de conjuntos não-enumeráveis bem-ordenados segue do Teorema 9. Seja $(X, \preccurlyeq)$ qualquer um destes conjuntos. Se para todo $x \in X$ temos que I_x é enumerável, então tomamos $(\Omega, \preccurlyeq) \equiv (X, \preccurlyeq)$. Caso contrário, podemos garantir que o seguinte conjunto

$$\{x \in X \,:\, \mathrm{Card}(I_x) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})\} \neq \varnothing.$$

Já que $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado podemos afirmar que existe

$$x_0 \equiv \inf(\{x \in X \,:\, \mathrm{Card}(I_x) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})\})$$

e que $x_0 \in \{x \in X \,:\, \mathrm{Card}(I_x) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})\}$, ou seja, I_{x_0} é não-enumerável. Por outro lado, segue da definição de ínfimo que se $x \prec x_0$, então $\mathrm{Card}(I_x) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Portanto $\Omega \equiv I_{x_0}$, munido da relação de ordem $\preccurlyeq$ (induzida) é bem-ordenado, não-enumerável e cada um de seus segmentos iniciais são enumeráveis.

Suponha que Ω' seja um conjunto tal que $(\Omega', \preceq)$ é bem-ordenado, não enumerável e cada um de seus segmentos iniciais são enumeráveis. Aplicando o Teorema 13 à $(\Omega, \preccurlyeq)$ e $(\Omega', \preceq)$ concluímos que vale uma das seguintes alternativas:

- existe um isomorfismo que preserva ordem entre Ω e Ω';
- Ω é isomorfo à algum segmento inicial de Ω';
- Ω' é isomorfo à algum segmento inicial de Ω.

As duas últimas alternativas não podem ocorrer já que em ambos casos, quaisquer dos segmentos iniciais são enumeráveis, enquanto Ω e Ω' são não-enumeráveis. Portanto existe um isomorfismo que preserva ordem entre Ω e Ω'; ■

O conjunto Ω fornecido pela Proposição 14 é essencialmente único (a menos de isomorfismo que preserva ordem). Este conjunto é chamado de **conjunto dos ordinais enumeráveis**. Um fato interessante e muito importante a respeito deste conjunto é enunciado na seguinte proposição.

Proposição 15. Todo subconjunto enumerável de Ω possui uma cota superior.

Prova. Seja $A \subset \Omega$ um subconjunto enumerável de Ω. Como todo segmento inicial em Ω é enumerável, então temos que a seguinte união

$$\bigcup_{x\in A} I_x$$

é enumerável pois, este conjunto é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis. Como $(\Omega, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado segue da Proposição 12 que existe algum $y \in \Omega$ tal que

$$\bigcup_{x\in A} I_x = I_y \qquad \text{ou} \qquad \bigcup_{x\in A} I_x = \Omega.$$

A segunda alternativa não pode ocorrer já que Ω é não-enumerável e a união no lado esquerdo da última igualdade é enumerável. Portanto temos

$$\bigcup_{x\in A} I_x = I_y.$$

Afirmamos que y é um cota superior para A. De fato, se para algum $x \in A$, temos que $y \prec x$, então segue diretamente da definição de segmento inicial que

$$I_y \cup \{y\} \subset I_x \subseteq \bigcup_{x\in A} I_x = I_y.$$

o que é um absurdo já que $y \notin I_y$. Portanto $x \preccurlyeq y$, para todo $x \in A$. ■

Vamos mostrar abaixo como o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser identificado com um subconjunto de Ω. Para isto, vamos construir uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to \Omega$. Definimos $f(1) = \inf(\Omega)$ e para cada $n \geqslant 2$, definimos indutivamente

$$f(n) = \inf\Big(\Omega \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\}\Big).$$

Note que segue diretamente da definição que f é uma função injetiva e que preserva ordem. Para caracterizar o conjunto imagem de f, considere o conjunto $\Omega \setminus F$, onde o conjunto F é dado por $F \equiv \{x \in X : \mathrm{Card}(I_x) < \mathrm{Card}(\mathbb{N})\}$. Segue das Proposição 14 que F é enumerável e portanto $\Omega \setminus F$ é não-vazio. Já que $(\Omega, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado, podemos afirmar que existe $\omega \equiv \inf(\Omega \setminus F)$ e que este ínfimo satisfaz $\omega \in \Omega \setminus F$. Note que ω é o elemento minimal de Ω tal que I_ω é infinito. Além do mais, podemos verificar que $f(\mathbb{N}) = I_\omega$. De fato, se $x \in I_\omega$, então $x \in F$ e logo existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Card}(I_x) = m$. Segue das definições de ínfimo e de segmento inicial que $\{f(1), \ldots, f(m)\} \subset I_x$, e consequentemente $I_x = \{f(1), \ldots, f(m)\}$. Já que $x \notin I_x$, temos que $\mathrm{Card}(I_x \cup \{x\}) = m + 1$. Além do mais, se $y \equiv \inf(\Omega \setminus (I_x \cup \{x\}))$, temos que $I_x \cup \{x\} = I_y$ e $\mathrm{Card}(I_y) = m + 1$. Como $\{f(1), \ldots, f(m+1)\} \subseteq I_y$ e I_y tem exatamente $m+1$ elementos segue que $\{f(1), \ldots, f(m+1)\} = I_y$. Em particular, $f(m) = x$. O que encerra a prova de que f é sobrejetiva. Como f é claramente injetiva e preserva ordem, podemos concluir finalmente $f : \mathbb{N} \to I_\omega$ é um isomorfismo que preserva ordem.

Às vezes, é conveniente adicionar um elemento extra ω_1 ao conjunto Ω. Este novo conjunto comumente denotado por $\Omega^* \equiv \Omega \cup \{\omega_1\}$. Também consideramos em Ω^* a relação de ordem $\preceq$ que é simplesmente a extensão da relação de ordem em $(\Omega, \preccurlyeq)$, que é obtida declarando que $x \prec \omega_1$, para cada $x \in \Omega$. O elemento ω_1 é conhecido como o **primeiro ordinal não-enumerável**.

5 Caracterização da σ-Álgebra Gerada

Sejam X um conjunto não-vazio e $\mathscr{C}$ um coleção arbitrária de subconjuntos de X. Como de maneira usual, definimos a σ-álgebra gerada pela coleção $\mathscr{C}$ como sendo a interseção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{C}$, normalmente denotamos esta σ-álgebra por $\sigma(\mathscr{C})$. Embora não seja construtiva, esta definição é muito útil no desenvolvimento da Teoria da Medida e Integração e com pouco de treino torna-se também bastante conveniente. Porém, esta definição pode não ser a mais adequada para lidar com alguns tipos questões. Por exemplo, se estamos interessados em saber qual a cardinalidade de uma determinada σ-álgebra, outras abordagens acabam sendo um pouco mais efetivas.

Nesta seção, vamos mostrar como construir a σ-álgebra gerada, por uma coleção $\mathscr{C}$. Como subproduto desta construção, vamos mostrar que para toda coleção $\mathscr{C}$ satisfazendo

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{C}) \leqslant \mathfrak{c} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Card}(\sigma(\mathscr{C})) = \mathfrak{c}.$$

Em particular, o resultado acima afirma que qualquer σ-álgebra gerada por uma coleção enumerável de conjuntos, é uma coleção de cardinalidade igual a cardinalidade do contínuo.

Para dar início à nossa discussão, vamos adotar uma abordagem inicialmente ingênua, inspirada no caso de coleções possuindo uma quantidade finita de subconjuntos. Esta abordagem, embora não apropriada para o tratamento do caso geral, auxilia na compreensão dos mecanismos envolvidos na construção rigorosa da σ-álgebra gerada por uma coleção arbitrária.

A ideia seria iniciar a construção à partir de um conjunto X não-vazio e de uma coleção não-vazia $\mathscr{C}$ de subconjuntos de X. Em seguida, acrescentamos à esta coleção, a coleção dos complementares de cada um dos conjuntos de $\mathscr{C}$, isto é,

$$\mathscr{C}_1 \equiv \mathscr{C} \cup \{E^c : E \in \mathscr{C}\}.$$

Prosseguimos, definindo a coleção $\mathscr{C}_2$ que é composta por todas as uniões enumeráveis de conjuntos em $\mathscr{C}_1$, bem como pelos complementos de cada uma destas tais uniões, ou seja,

$$\mathscr{C}_2 \equiv \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ : \ E_n \in \mathscr{C}_1, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right)^c \ : \ E_n \in \mathscr{C}_1, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Em geral, definimos $\mathscr{C}_j$ como sendo composta por todas as uniões enumeráveis de conjuntos em $\mathscr{C}_{j-1}$ e os complementos destes conjuntos, isto é,

$$\mathscr{C}_j \equiv \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \ : \ E_n \in \mathscr{C}_{j-1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right)^c \ : \ E_n \in \mathscr{C}_{j-1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Descritas esta etapas podemos no perguntar se, em geral, a reunião destas coleções é realmente a σ-álgebra gerada por $\mathscr{C}$, ou seja

$$\text{se} \ \ \mathscr{C}_\infty \equiv \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_j, \quad \text{então podemos afirmar que} \ \ \mathscr{C}_\infty = \sigma(\mathscr{C}) \ ?$$

Como o leitor já deve estar esperando a resposta, em geral, é não. Embora a coleção $\mathscr{C}_\infty$ seja fechada por complementos, não há como (sem hipóteses adicionais) descartar a possibilidade de existir uma sequência de conjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $E_n \in \mathscr{C}_n \setminus \mathscr{C}_{n-1}$ e

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \notin \mathscr{C}_\infty.$$

Se realmente existe tal sequência, a construção da σ-álgebra gerada não estaria finalizada. Neste caso, a alternativa mais natural que nos restaria seria recomeçar a construção à partir da coleção $\mathscr{D}_0 \equiv \mathscr{C}_\infty$. Em seguida, definir uma nova coleção $\mathscr{D}_1$, possuindo todos os membros de $\mathscr{D}_0$ e seus complementares, isto é, $\mathscr{D}_1 \equiv \mathscr{D}_0 \cup \{E^c : E \in \mathscr{D}_0\}$. Seguindo o procedimento adotado anteriormente, construiríamos, indutivamente, $\mathscr{D}_j$ como sendo a coleção de todas as uniões enumeráveis de conjuntos em $\mathscr{D}_{j-1}$ e seus complementos e assim por diante. Realizadas estas etapas definimos a coleção $\mathscr{D}_\infty$, como a reunião de todas as coleções $\mathscr{D}_j$'s. Mas, como no caso de $\mathscr{C}_\infty$ esta nova coleção, embora fechada para complementos, poderia não ser fechada para uniões enumeráveis. Indicando que este processo, em geral, poderia não ter fim. E consequentemente ser incapaz de fornecer uma construção para σ-álgebra gerada por $\mathscr{C}$.

Um exemplo, explícito, onde a construção acima falha de nos fornecer uma σ-álgebra pode ser obtido usando $X = (0, 1]$ e a σ-álgebra sendo a σ-álgebra de Borel de $(0, 1]$. Os detalhes desta construção estão na página 32 da referência [1].

A ideia que será usada para contornar o problema descrito acima será considerar as coleções $\mathscr{C}_j$'s com índices j's tomando valores em Ω ao invés de $\mathbb{N}$.

Antes de prosseguir precisamos introduzir mais uma definição. Se $(X, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado, vamos dizer que $\alpha \in X$ possui um **predecessor imediato** se existe $\beta \in X$ com as seguintes propriedades: $i)$ $\beta \prec \alpha$ e $ii)$ se $\gamma \in X$ é tal que $\gamma \prec \alpha$, então $\gamma \prec \beta$.

Como $(\Omega, \preccurlyeq)$ é bem-ordenado sabemos que Ω possui um único elemento minimal. Vamos chamar este elemento de $\alpha_0 \equiv \inf(\Omega)$. Defina $\mathscr{C}_{\alpha_0} \equiv \mathscr{C}$ e usando uma **indução transfinita** vamos definir $\mathscr{C}_\alpha$, para cada ordinal enumerável $\alpha \in \Omega$. Esta construção é feita da seguinte maneira:

- se $\alpha \in \Omega$ possui um predecessor imediato β definimos $\mathscr{C}_\alpha$ como sendo a coleção de todas as uniões enumeráveis de elementos de $\mathscr{C}_\beta$ e de todos os complementos de cada uma destas uniões enumeráveis, isto é,

$$\mathscr{C}_\alpha \equiv \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right)^c \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- se α não possui um predecessor imediato definimos

$$\mathscr{C}_\alpha \equiv \bigcup_{\beta \prec \alpha} \mathscr{C}_\beta$$

Considere o conjunto $A \subset \Omega$ dado por

$$A \equiv \{\alpha \in \Omega \,:\, \text{a coleção } \mathscr{C}_\alpha \text{ está bem-definida}\}.$$

Sabemos que A é não-vazio pois, $\inf(\Omega) \in A$. Observe que seguindo as instruções da construção apresentada acima temos que se $I_\alpha \in A$, então α pertence ao conjunto A. Portanto segue do Princípio da Indução Transfinita (Teorema 11) que $A = \Omega$.

Proposição 16. Seja Ω o conjunto dos ordinais enumeráveis e para cada $\alpha \in \Omega$ seja $\mathscr{C}_\alpha$ a família construída acima. Então

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathscr{C}_\alpha.$$

Prova. Considere o conjunto

$$B \equiv \{\alpha \in \Omega \,:\, \mathscr{C}_\alpha \subseteq \sigma(\mathscr{C})\}.$$

Já que $\alpha_0 \equiv \inf(\Omega)$ é tal que $\mathscr{C}_{\alpha_0} = \mathscr{C}$, segue que $\alpha_0 \in B$. Suponha que $I_\alpha \subset B$. Pela construção da coleção $\{\mathscr{C}_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, sabemos que se α possui um predecessor imediato β, então $\beta \in I_\alpha \subset B$ e

$$\mathscr{C}_\alpha \equiv \left\{ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right)^c \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como $\beta \in B$ temos que $\mathscr{C}_\beta \subseteq \sigma(\mathscr{C})$. Desta continência e das propriedades elementares de σ-álgebras temos que as uniões enumeráveis de elementos de $\mathscr{C}_\beta$ e seus respectivos complementos pertencem à $\sigma(\mathscr{C})$, o que mostra que $\mathscr{C}_\alpha \subseteq \sigma(\mathscr{C})$.

Por outro lado, se α não possui um predecessor imediato, então temos para cada $\beta \prec \alpha$ que $\beta \in I_\alpha \subset B$. Além do mais, como todo segmento inicial em Ω é enumerável temos que a coleção

$$\mathscr{C}_\alpha \equiv \bigcup_{\beta \prec \alpha} \mathscr{C}_\beta$$

é formada por uma coleção enumerável de coleções contidas em $\sigma(\mathscr{C})$, já que $\beta \in B$ implica $\mathscr{C}_\beta \subseteq \sigma(\mathscr{C})$. Portanto podemos verificar que $\mathscr{C}_\alpha \subseteq \sigma(\mathscr{C})$. De fato, se $E \in \mathscr{C}_\alpha$, então $E = \cup_{\beta \in I_\alpha} E_\beta$, onde $E_\beta \in \mathscr{C}_\beta$, para cada $\beta \in I_\alpha$. Como, por construção de Ω, o segmento inicial I_α é enumerável e cada $E_\beta \in \mathscr{C}_\beta \subseteq \sigma(\mathscr{C})$, segue que $E = \cup_{\beta \in I_\alpha} E_\beta \in \sigma(\mathscr{C})$, mostrando que $\mathscr{C}_\alpha \subseteq \sigma(\mathscr{C})$ e consequentemente que $\alpha \in B$. Desta forma, o que acabamos de mostrar é que se $I_\alpha \subseteq B$, então $\alpha \in B$. Já que B é não-vazio, segue do Princípio da Indução Transfinita (Teorema 11) que $B = \Omega$. Deste fato concluímos imediatamente que

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha \subseteq \sigma(\mathscr{C}).$$

Para finalizar a prova basta mostrar que a coleção

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha \tag{2}$$

é uma σ-álgebra. Para isto será útil o seguinte fato. Se $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sequência arbitrária em Ω, então esta sequência possui um supremo que também é um ponto de Ω, isto é, $\alpha^* \equiv \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \in \Omega$. Para verificar a validade desta afirmação basta aplicar a Proposição 15 ao conjunto enumerável $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Agora, vamos prosseguir com a prova de que a coleção (2) é uma σ-álgebra. A verificação de que esta coleção é fechada para complementação pode ser feita da seguinte maneira. Se $E \in \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha$, então $E \in \mathscr{C}_\alpha$, para algum $\alpha \in \Omega$. Como cada $\mathscr{C}_\alpha$ é fechado por complementação segue que $E^c \in \mathscr{C}_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha$.

Resta mostrar que a coleção (2) é fechada para uniões enumeráveis. Seja $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sequência em $\bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe algum $\alpha_n \in \Omega$ tal que $E_n \in \mathscr{C}_{\alpha_n}$. Seja $\alpha^* \equiv \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Pela construção da família $\{\mathscr{C}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ e pela definição de supremo podemos afirmar que

$$\mathscr{C}_{\alpha_n} \subseteq \mathscr{C}_{\alpha^*}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad E_n \in \mathscr{C}_{\alpha^*}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathscr{C}_{\alpha^*}$ é uma coleção fechada para uniões enumeráveis segue que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathscr{C}_{\alpha^*} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha.$$

Finalizando a prova de que a coleção (2) é uma σ-álgebra.

Como $\mathscr{C} \equiv \mathscr{C}_{\alpha_0}$ está contida na coleção (2) segue da definição de σ-álgebra gerada que

$$\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha.$$

Mas como a continência reversa havia sido estabelecida anteriormente, podemos finalmente concluir que

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha. \qquad \blacksquare$$

6 Aplicações

Antes de apresentar o principal resultado desta seção vamos necessitar de vários preparativos e também recordar alguns fatos elementares sobre cardinalidade de conjuntos. A principal aplicação ou resultado desta seção é o Corolário 19. Três resultados sobre cardinalidade de conjuntos, apresentados nesta seção foram enunciados mas não provados. A razão disto é que eles ou são de muito apelo intuitivo ou bem-conhecidos. De qualquer forma indicamos precisamente, após cada um destes enunciados, aonde na literatura as respectivas provas são apresentadas.

Para simplificar a exposição, **não** vamos definir o conceito de cardinal para um único conjunto (embora existam várias maneiras de se fazer isto, este conceito é irrelevante para este texto), exceto o caso de conjuntos finitos, cuja a cardinalidade é obviamente o número de elementos do conjunto. O que vamos fazer é o seguinte: dados **um par** de conjuntos X e Y, vamos dizer que

$$\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathrm{Card}(X) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Card}(Y) = \mathrm{Card}(X)$$

caso exista uma injeção, sobrejeção ou bijeção $f : X \to Y$, respectivamente.

Se X e Y são conjuntos tais que existe uma função $f : X \to Y$ injetiva, mas não existe nenhuma função $g : X \to Y$ sobrejetiva, então vamos dizer que

$$\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(Y).$$

Vamos usar a convenção $\mathrm{Card}(\varnothing) \leqslant \mathrm{Card}(X)$, para todo conjunto $X \neq \varnothing$.

Podemos mostrar que: para quaisquer dois conjuntos X e Y, temos necessariamente que uma das alternativas ocorre: $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y)$ ou $\mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathrm{Card}(X)$. A prova deste fato pode ser encontrada na página 7 da referência [3]. Outro fato que é importante mencionar é o seguinte teorema

Teorema 17 (Schröder-Bernstein)**.** If X e Y são conjuntos tais que $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y)$ e $\mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathrm{Card}(X)$, então $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y)$.

Por questão de brevidade; pelo fato do enunciado ser de simples compreensão e muito intuitivo, decidimos omitir a prova deste fato. O leitor interessado pode encontrar a prova do Teorema de Schröder-Bernstein na página 7 da referência [3].

Como consequência do Teorema de Schröder-Bernstein podemos mostrar que para todo $X \neq \varnothing$, temos que $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathscr{P}(X))$.

Um conjunto X é chamado de um **conjunto enumerável** se $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Observe que, em particular, todo conjunto finito é enumerável e como mencionado anteriormente para este é conveniente definir "$\mathrm{Card}(X)$" como $\mathrm{Card}(X) = n$, se somente se, $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\{1, \ldots, n\})$.

Dizemos que um conjunto X tem **a cardinalidade do contínuo** se $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Seguindo a tradição da literatura de Teoria de Conjuntos vamos usar a letra $\mathfrak{c}$ para abreviar a expressão $\mathrm{Card}(\mathbb{R})$. Desta forma

$$\mathrm{Card}(X) = \mathfrak{c} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}).$$

Um fato importante que vamos usar à frente é que através da representação de um número real em base 2, podemos mostrar que

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = \mathfrak{c}.$$

Uma prova detalhada deste fato pode ser encontrada na página 8 da referência [3].

Proposição 18. Sejam X, Y conjuntos arbitrário e não-vazios, e $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de conjuntos arbitrários não-vazios, indexada sobre um conjunto de índices arbitrário $A \neq \varnothing$.

a) $\mathrm{Card}(\Omega) \leqslant \mathfrak{c}$;

b) $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathfrak{c}$ e $\mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathfrak{c}$, então $\mathrm{Card}(X \times Y) \leqslant \mathfrak{c}$;

c) se $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathfrak{c}$ e $\mathrm{Card}(X_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$, para todo $\alpha \in A$, então $\mathrm{Card}\left(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\right) \leqslant \mathfrak{c}$;

d) se $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathfrak{c}$, então $\mathrm{Card}(X^{\mathbb{N}}) \leqslant \mathfrak{c}$.

Prova. Prova do item a). Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ qualquer subconjunto não-enumerável satisfazendo $\mathrm{Card}(X) = \mathfrak{c}$, por exemplo, $X \equiv (0, 1)$. Pelo Princípio da Boa-Ordenação sabemos que é possível encontrar uma relação de ordem $\preceq$ em X tal que $(X, \preceq)$ é bem-ordenado. Considere o conjunto $A \equiv \{y \in X : \mathrm{Card}(I_y) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})\}$. Se para todo $y \in X$, temos que $\mathrm{Card}(I_y) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbb{N})$, ou seja, todos os segmentos iniciais em $(X, \preceq)$ são enumeráveis. Então sabemos da Proposição 14 que existe um isomorfismo que preserva ordem entre $(X, \preceq)$ e $(\Omega, \preccurlyeq)$. Portanto temos $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(X) \leqslant \mathfrak{c}$. Neste caso, a última desigualdade é na verdade uma igualdade.

Caso exista algum $y \in X$ tal que $\mathrm{Card}(I_y) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ isto significa que $A \neq \varnothing$. Como $(X, \preceq)$ é bem-ordenado, podemos afirmar que existe $x \equiv \inf(A) \in A$. Assim, segue das definições de segmento inicial e de ínfimo que, para todo $y \in I_x$, temos que $\mathrm{Card}(I_y) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. Portanto podemos aplicar novamente a Proposição 14 para verificar que existe um isomorfismo que preserva ordem entre $(I_x, \preceq)$ e $(\Omega, \preccurlyeq)$. Deste fato segue que $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{Card}(I_x) \leqslant \mathrm{Card}(X) \leqslant \mathfrak{c}$. Portanto podemos finalmente concluir que $\mathrm{Card}(\Omega) \leqslant \mathfrak{c}$.

Prova do item b). Como estamos assumindo que $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathfrak{c}$ e $\mathrm{Card}(Y) \leqslant \mathfrak{c}$, então é suficiente mostrar que $\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = \mathfrak{c}$, já que

$$\mathrm{Card}(X \times Y) \leqslant \mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})\big).$$

Para isto considere as funções $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dadas por

$$\phi(n) = 2n \qquad \text{e} \qquad \psi(n) = 2n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e a função $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ dada por

$$f(A, B) \equiv \phi(A) \cup \psi(B), \qquad \forall (A, B) \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}).$$

Afirmamos que a função f é bijetiva. De fato, se $f(A', B') = f(A, B)$, então temos $\phi(A) \cup \psi(B) = \phi(A') \cup \psi(B')$. Como o conjunto ψ está contido no conjunto dos números pares e

ψ está condito no conjunto dos números ímpares, então concluímos da igualdade acima que $\phi(A) = \phi(A')$ e $\psi(B) = \psi(B')$. Usando a expressão explícita de ϕ temos que

$$A = \frac{1}{2}\phi(A) = \frac{1}{2}\phi(A') = A'.$$

Analogamente, verificamos que $B = B'$ e logo que f é injetiva. Portanto podemos afirmar que $\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})\big) \leqslant \mathfrak{c}$. Como o conjunto $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \{1\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$ temos imediatamente que $\mathfrak{c} \leqslant \mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})\big)$. Desta forma segue do Teorema de Schröder-Bernstein que

$$\mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = \mathfrak{c}.$$

Prova do item c). Para cada $\alpha \in A$, segue da hipótese que existe uma função sobrejetiva $f_\alpha : \mathbb{R} \to X_\alpha$. Com auxílio desta família de funções podemos definir uma nova função

$$f : \mathbb{R} \times A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \qquad \text{dada por} \quad f(x, \alpha) = f_\alpha(x), \quad \forall (x, \alpha) \in \mathbb{R} \times A.$$

Da sobrejetividade de cada f_α, segue imediatamente que f é sobrejetiva. Juntando esta informação com o fato mostrado no item anterior concluímos que

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbb{R} \times A) \leqslant \mathfrak{c}.$$

Prova do item d). A ideia da prova deste item é semelhante à empregada na prova do item b). O argumento aqui é um pouco mais delicado por que temos uma quantidade enumerável de fatores no produto cartesiano e não apenas dois como era o caso do item b). O argumento da prova do item b) era baseado na possibilidade de criar uma partição do conjunto $\mathbb{N}$ em dois subconjuntos infinitos e disjuntos, que no caso eram os conjuntos dos números pares e ímpares. Agora, precisamos criar um partição com infinitas coleções (uma quantidade enumerável delas) de conjuntos infinitos e disjuntos. Para isto vamos utilizar o conjunto dos números primos, que será chamado de $\mathcal{P} \equiv \{p_1, p_2, \ldots\}$. As funções auxiliares ϕ e ψ do item b) vão dar lugar à seguinte família de funções auxiliares $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, onde para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, a função ϕ_m é definida por $\phi_m(n) \equiv p_m^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Analogamente ao item b) observamos que

$$\mathrm{Card}(X^{\mathbb{N}}) \leqslant \mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}\big) \tag{3}$$

Portanto, para concluir a prova do item d) é suficiente mostrar que existe alguma função injetiva $f : \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Para facilitar a notação vamos representar um elemento genérico do $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, da seguinte forma $A \equiv (A_1, A_2, \ldots)$, onde $A_j \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Afirmamos que a função f dada por

$$f(A) \equiv f(A_1, A_2, \ldots) \equiv \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \phi_m(A_m)$$

define uma função injetiva de $\mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ para $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. De fato, segue do Teorema Fundamental da Aritmética que para cada par de números naturais $m \neq n$, temos que $\phi_m(A) \cap \phi_n(B) = \varnothing$, para quaisquer $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Desta forma, temos que se $A, A' \in \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ e

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \phi_m(A_m) \equiv f(A) = f(A') \equiv \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \phi_m(A'_m)$$

então temos que $\phi_m(A_m) = \phi_m(A'_m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Além do mais, segue diretamente da expressão explícita das funções ϕ_m's que

$$A_m = \log_{p_m}(\phi_m(A_m)) = \log_{p_m}(\phi_m(A'_m)) = A'_m, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Mostrando que $A = A'$ e consequentemente que f é injetiva. Deste fato e de (3) segue que

$$\mathrm{Card}(X^{\mathbb{N}}) \leqslant \mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}\big) \leqslant \mathrm{Card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = \mathfrak{c}.$$

o que encerra a prova do item d). ■

Corolário 19. Sejam X um conjunto não-vazio arbitrário e $\mathscr{C}$ uma coleção de subconjuntos de X. Se $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{C}) \leqslant \mathfrak{c}$, então

$$\mathrm{Card}(\sigma(\mathscr{C})) = \mathfrak{c}.$$

Prova. Sabemos da Proposição 16 que

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha. \tag{4}$$

Pelo item c) da Proposição 18 sabemos que $\mathrm{Card}(\Omega) \leqslant \mathfrak{c}$. Portanto, se mostramos que para todo $\alpha \in \Omega$, temos $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$, então segue do item b) da Proposição 18 que

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathscr{C}_\alpha\right) \leqslant \mathfrak{c}. \tag{5}$$

No que segue vamos mostrar que $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$, para cada $\alpha \in \Omega$. Para isto vamos utilizar o Princípio de Indução Transfinita para mostrar que o conjunto

$$A \equiv \{\alpha \in \Omega : \mathrm{Card}(\mathscr{C}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}\} = \Omega.$$

Como estamos assumindo que $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{C}) \leqslant \mathfrak{c}$ e que por construção da coleção $\{\mathscr{C}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ temos $\mathscr{C}_{\alpha_0} \equiv \mathscr{C}$, onde $\alpha_0 = \inf(\Omega)$, então temos que $\alpha_0 \in A$ e portanto $A \neq \varnothing$. Suponha, por hipótese de indução, que $I_\alpha \subseteq A$. Se α possui um predecessor imediato β, $\beta \in I_\alpha$ e segue da construção da coleção $\{\mathscr{C}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ que

$$\mathscr{C}_\alpha \equiv \left\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right)^c \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Note que a função

$$f : (\mathscr{C}_\beta)^{\mathbb{N}} \to \left\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \text{dada por} \quad f(E_1, E_2, \ldots, \ldots) \equiv \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n,$$

define uma função sobrejetiva. Já que, por hipótese de indução, $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_\beta) \leqslant \mathfrak{c}$, segue da sobrejetividade da função f definida acima e do item d) da Proposição 18 que

$$\mathrm{Card}\left(\left\{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \,:\, E_n \in \mathscr{C}_\beta,\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}\right) \leqslant \mathrm{Card}\left((\mathscr{C}_\beta)^{\mathbb{N}}\right) \leqslant \mathfrak{c}.$$

Argumentando de maneira completamente análoga, concluímos que a segunda coleção que aparece na definição de $\mathscr{C}_\alpha$ também tem cardinalidade menor ou igual que $\mathfrak{c}$. E assim, segue do item c) da Proposição 18 que $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$. Mostrando que neste caso $\alpha \in A$.

Para completar a prova que $\alpha \in A$, precisamos verificar que $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$ é valida quando α não possui um predecessor imediato. Neste caso, temos que

$$\mathscr{C}_\alpha = \bigcup_{\beta \prec \alpha} \mathscr{C}_\beta$$

Como estamos assumindo que $I_\alpha \subset A$, todas as coleções $\mathscr{C}_\beta$'s que aparecem na união acima são tais que $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_\beta) \leqslant \mathfrak{c}$. Pela construção de Ω temos que I_α é enumerável, logo a união que aparece acima é uma união enumerável de conjuntos que possui cardinalidade menor ou igual a cardinalidade do contínuo, portanto de mais uma aplicação do item c) da Proposição 18 que $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_\alpha) \leqslant \mathfrak{c}$. O que completa a prova que $\alpha \in A$ sempre que $I_\alpha \subset A$. Portanto segue do Princípio da Indução Transfinita que $A = \Omega$. Este fato completa a prova de (5).

Próximo passo é mostrar que $\mathfrak{c} \leqslant \sigma(\mathscr{C})$. Para isto vamos precisar do seguinte resultado auxiliar. Se $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{C}) \leqslant \mathfrak{c}$, então existe alguma sequência infinita $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contida em $\sigma(\mathscr{C})$ tal que $E_n \neq \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $E_n \cap E_m = \varnothing$, sempre que $m \neq n$.

Vamos considerar $\sigma(\mathscr{C})$ munido da relação de ordem parcial $\preccurlyeq$, onde para cada par de conjuntos $E, F \in \sigma(\mathscr{C})$, dizemos que $E \preccurlyeq F$ se $E \subseteq F$. Pelo Princípio Maximal de Hausdorff (página 4) existe um subconjunto maximal $\mathscr{D} \subset \sigma(\mathscr{C})$ tal que $(\mathscr{D}, \preccurlyeq|_{\mathscr{D}})$ é totalmente ordenado. Por questão de simplicidade, podemos pensar em $\mathscr{D} \equiv \{E_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$. Suponha, por contradição, que Γ é finito, digamos $\Gamma = \{1, \ldots, n\}$ e $\mathscr{D} \equiv \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. A menos de uma permutação dos índices, podemos assumir que $E_1 \prec E_2 \prec \ldots \prec E_n$. Observe que a σ-álgebra gerada por esta coleção de conjuntos, que denotaremos por $\sigma(E_1, \ldots, E_n)$ é uma σ-álgebra composta por uma quantidade finita de elementos. Além do mais, $\sigma(E_1, \ldots, E_n) \subsetneq \sigma(\mathscr{C})$ pois, $\mathrm{Card}(\mathbb{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{C}) \leqslant \mathrm{Card}(\sigma(\mathscr{C}))$. Portanto, existe algum conjunto $E \in \sigma(\mathscr{C}) \setminus \sigma(E_1, \ldots, E_n)$ que é não-vazio. Afirmamos que a maximalidade de $(\mathscr{D}, \preccurlyeq|_{\mathscr{D}})$ implica $E \subset E_n$. Caso contrário, a família de conjuntos $\{E_1, \ldots, E_n, (E_n \cup E)\}$ seria uma família em $\sigma(\mathscr{C})$ totalmente ordenada, com respeito à $\preccurlyeq$, com $E_1 \prec E_2 \prec \ldots \prec E_n \prec (E \cup E_n)$, e contendo propriamente $\mathscr{D}$. Mas isto é impossível pois, contraria a maximalidade da família $\mathscr{D}$.

Para a sequência do argumento será conveniente introduzir a notação $E_0 = \varnothing$. Lembrando do último fato provado acima, isto é, $E \subset E_n$ e usando as propriedades elementares de conjuntos podemos escrever

$$E = E \cap E_n = E \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} (E_j \setminus E_{j-1}) \right) = \bigcup_{j=1}^{n} E \cap (E_j \setminus E_{j-1}).$$

Já que $E \notin \sigma(E_1, \ldots, E_n)$, deve existir pelo menos um índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que o conjunto

$$E \cap (E_j \setminus E_{j-1}) \notin \sigma(E_1, \ldots, E_n),$$

caso contrário, a união do lado direito da igualdade acima pertenceria $\sigma(E_1, \ldots, E_n)$ e logo $E \in \sigma(E_1, \ldots, E_n)$ o que é um absurdo. Em particular, podemos afirmar que o conjunto $E \cap (E_j \setminus E_{j-1}) \neq \varnothing$ e também que este conjunto é diferente de todos os conjuntos da coleção $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, isto é, $E \cap (E_j \setminus E_{j-1}) \neq E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Afirmamos que

$$E_{j-1} \subsetneq E_{j-1} \cup [E \cap (E_j \setminus E_{j-1})] \subsetneq E_j. \tag{6}$$

Para verificar que a primeira continência é estrita, basta usar que $E \cap (E_j \setminus E_{j-1}) \neq \varnothing$. Para verificar que a segunda continência é válida e também estrita, começamos observando que

$$E_{j-1} \subset E_j \ \text{ e } \ E \cap (E_j \setminus E_{j-1}) \subset E_j \quad \Longrightarrow \quad E_{j-1} \cup [E \cap (E_j \setminus E_{j-1})] \subseteq E_j.$$

Suponha por absurdo, que na última inclusão acima que se verifique a igualdade, isto é, $E_{j-1} \cup [E \cap (E_j \setminus E_{j-1})] = E_j$. Então interceptando ambos lados desta igualdade com E_{j-1}^c ficamos com $E \cap (E_j \setminus E_{j-1}) = E_j \setminus E_{j-1}$. O que é um absurdo pois isto implica que $E \cap (E_j \setminus E_{j-1}) = E_j \setminus E_{j-1} \in \sigma(E_1, \ldots, E_n)$. Assim encerramos a prova de (6).

Usando (6) podemos construir uma família totalmente ordenada, com $n+1$ elementos, contendo estritamente a família $\mathscr{D} \equiv \{E_1, \ldots, E_n\}$ da seguinte forma

$$E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{j-1} \ \subsetneq \ E_{j-1} \cup [E \cap (E_j \setminus E_{j-1})] \subsetneq \ E_j \ \subsetneq \cdots \subsetneq E_n,$$

contrariando a maximalidade de $(\mathscr{D}, \preccurlyeq|_{\mathscr{D}})$, o que é um absurdo. Este absurdo vem de supor que $\mathscr{D} \equiv \{E_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ é um coleção com finitos elementos.

Desta forma podemos encontrar uma sequência $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contida em D tal $D_n \neq \varnothing$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além do mais, $D_n \subsetneq D_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ pois $(\mathscr{D}, \preccurlyeq|_{\mathscr{D}})$ é totalmente ordenado. Como fizemos anteriormente, por questão de conveniência de notação, definimos $D_0 \equiv \varnothing$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ colocamos

$$E_n \equiv D_n \setminus (D_{n-1} \cup \ldots \cup D_0) = D_n \setminus D_{n-1}.$$

Já que $D_n \subsetneq D_{n+1}$ segue que cada E_n é não vazio. E por construção temos que $E_n \cap E_m = \varnothing$, se $m \neq n$. Desta forma a sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência infinita de conjuntos não-vazios e disjuntos, desejada.

Para finalizar a prova, usamos a sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ construída no passo anterior e a função $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(\mathscr{C})$ dada por

$$f(A) = \bigcup_{j \in A} E_j.$$

Como a coleção $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é formada por conjuntos não-vazios e dois-a-dois disjuntos é imediato verificar que f é injetiva e portanto $\mathfrak{c} \leqslant \sigma(\mathscr{C})$. ■

Agradecimentos

O autor destas notas agradece a André Caldas, Christie Montijo, Eduardo Silva e Geovane Andrade e por seus comentários, correções, sugestões que contribuíram para várias melhorias, e principalmente por animadas e enriquecedoras discussões sobre os diversos assuntos abordados no texto.

Referências

[1] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, anniversary edition, 2012. With a foreword by Steve Lalley and a brief biography of Billingsley by Steve Koppes.

[2] J. de Jesus and S. da Silva. Cem anos do axioma da escolha: boa ordenação, lema de zorn e o teorema de tychonoff. *Revista Matemática Universitária (RMU/SBM)*, 42:16–34, 2007.

[3] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.