Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Prova 1 - Probabilidade e Teoria da Medida

Data: 16/09/2014 - Horário:14:00 às 16:00h.

Valor : 100 pontos.

Nome: ____

1- (15 pts.) Mostre que se $\{E_k\}$ é uma coleção de eventos tais que $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k) > n-1$, então $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) > 0$.

2- (15 pts.) Seja $\{E_n\}$ é uma sequência de eventos tais que $\mathbb{P}(E_n) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = 1$.

3- (10 pts.) A função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \leq 1; \\ 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } \ x > 1. \end{cases}$$

é uma função distribuição ? Justifique sua resposta.

4- (30 pts.) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Suponha que $\{X_n\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $\mathbb{P}(|X_n| \leq n) \leq 1 - 1/\sqrt{n}$. Mostre que são verdadeiras as seguintes afirmações sobre a série aleatória $\sum_{n=1}^{\infty} X_n z^n$:

a) o raio de convergência R desta série é uma v.a.;

b) existe $R_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R = R_0$ quase certamente;

c) $R \leq 1$ (dica: use a Lei Zero-Um de Borel).

Dica. O raio de convergência de uma série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ é dado por $R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$.

Escolha e faça SOMENTE 1 dos 3 exercícios abaixo

Opt1- (30 pts.) Seja $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{1, \ldots r\} \ \forall i = 1, \ldots, n\}$. Suponha que seja $\mathbb{P}$ seja uma medida de probabilidade neste espaço tal que todo ponto de Ω tem a mesma probabilidade. Defina as seguintes variáveis aleatórias (projeção na i-ésima coordenada) $X_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Prove que as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$ são independentes.

Opt2- (30 pts.) Seja $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Mostre que $\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n < \infty\right) = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n > M) < \infty, \quad$ para algum $M > 0$.

Opt3- (30 pts.) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dada qualquer sequência de v.a.'s $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, tomando valores reais, mostre que existe uma sequência $\{c_n\}$ de números reais (que pode depender da sequência $\{X_n\}$) tal que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{c_n} = 0\right) = 1.$$

Dica: Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(|X_n| > c_n/n) \leq 1/n^2$.