Universidade de Brasília

Departamento de Matematica

Prova 1 - Topologia Geral

Data: 27/01/2014 - Horário:08:00 às 11:30h.

Valor : 100 pontos.

Nome: ____

1- (10 pts.) Dê um exemplo de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é diferente da topologia trivial, $1 < \#X < \infty$ e $(X, \mathcal{T})$ não é um espaço de Hausdorff.

2- (20 pts.) Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma base para uma topologia em X, então a topologia gerada por $\mathcal{A}$ é igual a interseção de todas as topologias em X que contém $\mathcal{A}$.

3- (10 pts.) Se X e Y são conjuntos ordenados por $<_X$ e $<_Y$, respectivamente. Mostre que a ordem lexicográfica em $X \times Y$ é uma relação de ordem.

4- (20 pts.) Uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada de aplicação aberta se para todo aberto U de X o conjunto $f(U)$ é um aberto em Y. Mostre que as projeções $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ são aplicações abertas.

5- (10 pts.) Sejam $f : X \to Y$ uma função e Y um espaço topológico com uma topologia $\mathcal{T}$ fixada.

a) Qual é a topologia mais fina em X para o qual f é contínua.

b) Qual é a topologia mais grossa em X para o qual f é contínua.

6- (20 pts.) Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de espaços de Hausdorff, onde J é um conjunto de índices arbitrário. Prove que $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ também é um espaço de Hausdorff na topologia produto.

7- (10 pts) Mostre que X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta \equiv \{x \times x : x \in X\}$ é fechada em $X \times X$.