Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Prova 2 - Probabilidade e Teoria da Medida

Data: 23/10/2014 - Horário:14:00 às 16:00h.

Valor : 100 pontos.

Nome: ____

1- (15 pts.) Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Borel mensurável tal que $\mathbb{E}[f(X)] < +\infty$. Se $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ denota a distribuição de X, isto é, para todo $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ temos $\mu(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$. Prove que

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x).$$

2- (10 pts.) Calcule o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{n \mathrm{sen}\, x}{1 + n^2\sqrt{x}}\, dx.$$

3- (25 pts.) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Suponha que X é uma variável aleatória tal que $\mathbb{E}[|X|^p] < +\infty$ para todo $p \geq 1$. Mostre que:

i) para todo $p \geq 1$ e $x \geq 0$ temos $x^p = p\int_0^x y^{p-1}\, dy$;

ii) para todo $p \geq 1$

$$\mathbb{E}|X|^p = p\int_0^\infty y^{p-1}\mathbb{P}(\{|X| > y\})\, dy.$$

4- (20 pts.) Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $\mathscr{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Prove que para quaisquer variáveis aleatórias limitadas X e Y que

$$\mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{E}[X|\mathscr{B}]] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathscr{B}]].$$

5 (30 pts.) Seja k um inteiro positivo e $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}}$. Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra gerada pelas v.a.'s $\{X_n\}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ a v.a. X_n é definida por $X_n(\omega) = \omega_n$. Sejam ν uma medida de probabilidade definida no conjunto das partes de $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ e $\mathbb{P} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \nu$ a medida produto obtida através do Teorema da Extensão de Kolmogorov. Considere a aplicação $\sigma : \Omega \to \Omega$ dada pelo "shift" para esquerda, isto é, $\sigma(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) = (\omega_2, \omega_3, \omega_4, \ldots)$. Mostre que:

i) $\mathbb{P}$ é invariante pelo "shift", isto é, para todo $E \in \mathcal{F}$ temos que $\mathbb{P}(\sigma^{-1}(E)) = \mathbb{P}(E)$;

ii) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência independente;

iii) se $E \in \mathcal{F}$ é tal que $\sigma^{-1}(E) = E$, então $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$.