Universidade de Brasília

Departamento de Matematica

Prova 1 - Topologia Geral

Data: 10/02/2014 - Horário:08:00 às 11:30h.

Valor : 100 pontos.

Nome: ____

1- (20 pts.) Fixado $n \in \mathbb{Z}_+$ e $R > 0$, mostre que a *inversão* $\tau : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por

$$\tau(x) = \frac{Rx}{\|x\|^2}, \quad (\text{onde } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ e } \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

é um homeomorfismo.

2- (10 pts.) Sejam X um espaço topológico e $f_i : X \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ funções contínuas. Mostre que o conjunto solução do sistema $f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$ é fechado.

3- (10 pts.) Seja (X, d) um espaço métrico. É verdade que fecho da bola aberta de centro $x \in X$ raio $r > 0$ é a bola fechada de centro x e raio r ? Em outras palavras é verdadeira a seguinte igualdade

$$\overline{\{y \in X : d(x, y) < r\}} = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \quad ?$$

Prove ou dê um contra-exemplo.

4- (10 pts.) Suponha que A é um conjunto aberto em $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{Q} \subset A \subset \mathbb{R}$ é verdade que $A = \mathbb{R}$? Prove ou dê um contra-exemplo. (dica: lembre-se dos fechados mais simples da reta.)

5- (20 pts.) Mostre que aplicação $\pi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$, dada abaixo é contínua

$$\pi((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots$$

6- (10 pts.) Mostre que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ é conexo por caminhos.

7- (20 pts) Seja X um espaço compacto e Y Hausdorff. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua, então f é uma aplicação fechada.