Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Prova 3 - Probabilidade e Teoria da Medida

Data: 04/12/2014 - Horário:14:00 às 16:00h.

Valor : 100 pontos.

Nome: ____

1- (25 pts.) Seja $\{X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ uma coleção de v.a.'s mutuamente independentes tais que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Denote por $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Mostre que para todo $a > 0$ temos

$$\mathbb{P}(\{S_n > a\}) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

(Dica: Observe que para todo $\lambda > 0$ temos $\mathbb{P}(\{S_n > a\}) = \mathbb{P}(\{\exp(\lambda S_n) > \exp(\lambda a)\})$ e que $\cosh^n(\lambda) \leq \exp(\lambda^2 n/2)$.)

2- (20 pts.) Uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é chamada *definida positiva* se para todo $n = 1, 2, \ldots,$ e toda n-úpla $(c_1, \ldots, c_n)$ de números complexos temos

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_j - t_k) c_j \overline{c}_k \geq 0, \quad \forall\ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que toda função característica é definida positiva.

3- (25 pts.) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de v.a.'s independentes e X uma v.a. discreta com $\mathbb{P}(X = n) = p_n,\ n \geq 1$ e independente da sequência $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Seja F_n a distribuição de X_n e φ_n sua função característica. Mostre usando a esperança condicional que a v.a.

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X=n\}} X_n$$

tem função característica dada por $\varphi = \sum_{n \geq 1} p_n \varphi_n$.

4- (30 pts.) Enuncie e demonstre o Teorema do Limite Central no caso iid. em que as v.a.'s $X_1, X_2 \ldots$ têm média zero e variância um.