Universidade de Brasília

Departamento de Matematica

Prova 3 - Topologia Geral

Data: 21/02/2014 - Horário:08:00 às 11:30h.

Valor : 100 pontos.

Nome: ____

1- (30 pts.) Seja X um espaço topológico. Seja $\mathcal{D}$ uma coleção de subconjuntos de X que é maximal com respeito a propriedade da interseção finita.

a) Mostre que $x \in \overline{D}$ para todo $D \in \mathcal{D}$ se, e somente se, toda vizinhança de x pertence a coleção $\mathcal{D}$. Qual implicação usa a maximalidade de $\mathcal{D}$?

b) Seja $D \in \mathcal{D}$ mostre que se $A \supset D$, então $A \in \mathcal{D}$.

c) Mostre que se X é Haussdorf então existe no máximo um ponto pertencente a

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}.$$

2- (30 pts.) Já vimos que o Axioma da Escolha implica o Teorema de Tychonoff. Seguindo os passos abaixo mostre que o Teorema de Tychonoff implica no Axioma da Escolha.

Seja X_α com $\alpha \in J$ uma família de espaços não vazios e **assuma que vale o Teorema de Tychonoff**.

a) Seja $\{\Lambda\}$ um conjunto unitário não vazio que não está contido em nenhum X_α. Considere a família de espaços $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{\Lambda\}$. Para todo $\alpha \in J$ considere a seguinte topologia $\tau_\alpha = \{\emptyset, X_\alpha, \{\Lambda\}, Y_\alpha\}$ em Y_α. Mostre que (Y_α, τ_α) é compacto.

b) Para cada $\alpha \in J$ seja $Z_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$, onde $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in J} Y_\beta \to Y_\alpha$ é a projeção na α-ésima coordenada. Mostre que Z_α é fechado em $\prod\limits_{\alpha \in J} Y_\alpha$.

c) Seja $F \subset J$ um subconjunto finito. Mostre que

$$\bigcap_{\alpha \in F} Z_\alpha = \prod_{\alpha \in F} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in J \setminus F} Y_\alpha.$$

Agora escolha $x_\alpha \in X_\alpha$ (aqui não precisamos do axioma da escolha!) para cada $\alpha \in F$, em seguida para cada $\alpha \in J \setminus F$ ponha $x_\alpha = \Lambda$. Conclua que a interseção acima é não vazia e que a família Z_α tem a propriedade da interseção finita.

d) Argumente que $\prod\limits_{\alpha \in J} Y_\alpha$ é compacto, mostre que $\bigcap\limits_{\alpha \in J} Z_\alpha = \prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ e conclua que vale o axioma da escolha.

3- (20 pts) Dê uma prova direta do Lema de Urysohn para um espaço métrico (X, d) usando a função

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

4- (20 pts) Denote por $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes de tamanho $n \times n$ com entradas reais. Sejam Det : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a função determinante e τ a topologia mais grossa em $M_n(\mathbb{R})$ na qual a função determinante é contínua. Mostre que o conjunto das matrizes inversíveis é um conjunto aberto e não é conexo.