Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

O Conjunto de Vitali - Notas de Aula

L. Cioletti

Março de 2024

Resumo

Nestas notas apresentamos a construção dos chamados conjuntos de Vitali e usamos um destes conjuntos para mostrar que não existe nenhuma função μ definida sobre a coleção das partes de $\mathbb{R}$ que é simultaneamente: σ-aditiva; invariante por congruências (translações, rotações e reflexões) e que associa o valor um ao intervalo semi-aberto $[0,1) \subset \mathbb{R}$.

1 Introdução

Estas notas são focadas na construção dos chamados conjuntos de Vitali, em uma dimensão, e suas propriedades elementares. Estes conjuntos são geralmente usados para mostrar a existência de subconjuntos da reta que não são Lebesgue-mensuráveis (conceito que será introduzido mais à frente no curso). Aqui não vamos introduzir os conceitos de medida ou de Medida de Lebesgue. Ao invés disto, vamos conduzir a discussão mostrando que não pode existir uma função de conjuntos μ, definida sobre as partes de $\mathbb{R}^n$ que é simultaneamente: σ-aditiva; invariante por congruências (translações, rotações e reflexões) e que associa medida um ao intervalo unitário. Este texto é auto-contido e segue de perto o Capítulo 1 da referência [1].

2 As Condições de σ-Aditividade, Invariância e Normalização

Os problemas de determinação de: área de uma região no plano; e o de volumes de sólidos, em três dimensões, estão entre os mais antigos e importantes em Geometria Euclidiana.

Alguns métodos oriundos do Cálculo Integral e Diferencial fornecem uma solução satisfatória para estes problemas, quando estas regiões ou sólidos são delimitados por curvas ou superfícies razoavelmente "suaves" ou regulares. Entretanto, estes métodos não são capazes de fornecer respostas nos casos em que estes conjuntos são mais complicados.

Idealmente gostaríamos de ter uma função μ definida sobre o conjunto das partes de $\mathbb{R}^n$, notação $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, que associasse à cada subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um número $\mu(E) \in [0,+\infty]$ que representasse a medida (área, volume e etc.) n-dimensional de E. Além do mais, seria desejável que os valores desta função μ coincidissem com aqueles das fórmulas fornecidas pelo Cálculo Diferencial, quando as mesmas se aplicam ao conjunto E, e que tivesse também as seguintes propriedades:

a) **σ-aditividade**. Se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos dois-a-dois disjuntos de $\mathbb{R}^n$, então temos

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n);$$

b) **Invariância por Congruências**. Se E e F são dois subconjuntos congruentes (isto é, F é a imagem de E por quantidade finita de composições de translações, rotações e reflexões), então $\mu(E) = \mu(F)$;

c) **Normalização**. Se $C \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_i < 1, i = 1, \ldots, n\}$ denota o cubo unitário n-dimensional, então $\mu(C) = 1$.

Infelizmente, todas estas condições são mutuamente inconsistentes. Vamos ver o porquê disso nas seções seguintes.

3 O Conjunto de Vitali

Considere em $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y, \text{ se e somente se, } x - y \in \mathbb{Q}.$$

Seja $N \subseteq [0, 1)$ um conjunto contendo precisamente um único membro de cada classe de equivalência de $[0, 1)/\sim$. Para garantir que N está bem-definido precisamos usar o axioma da escolha. Embora não seja único, qualquer conjunto N construído desta maneira é chamado de **Conjunto de Vitali**. Obviamente, escolhas distintas daquelas feitas acima, para os representantes das classes de equivalência, irão fornecer conjuntos distintos e, por isso, o emprego do artigo definido "o"quando falamos de conjuntos de Vitali é um pouco ambíguo. Porém, esta ambiguidade não irá nos causar problemas pois os argumentos apresentados abaixo não dependem dos representantes das classes de equivalência escolhidos. Por isto, vamos abusar um pouco da notação e nos referir a N como o conjunto de Vitali.

No que segue, denotamos por R o conjunto de todos os números racionais contidos no intervalo $[0, 1)$, isto é,

$$R \equiv [0, 1) \cap \mathbb{Q}.$$

Para cada $r \in R$ defina

$$N_r \equiv \{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\}. \tag{1}$$

Observamos que cada conjunto N_r pode ser interpretado como uma translação (módulo 1) do conjunto N por r unidades. Além do mais, para todo $r \in R$ temos que $N_r \subseteq [0, 1)$ e que cada $x \in [0, 1)$ pertence à N_r para um único valor de $r \in R$.

De fato, a prova da primeira afirmação, isto é, $N_r \subseteq [0, 1)$ segue diretamente da definição de cada N_r. Para verificar a validade da segunda afirmação vamos considerar $x \in [0, 1)$ fixo porém arbitrário. Pela definição de relação de equivalência, sabemos que nosso x fixado pertence a uma única classe de equivalência em $[0, 1)/\sim$ e portanto, pela construção de N, podemos afirmar que

$$\exists!\, y \in N \text{ tal que } x \sim y.$$

Considere o número r definido por

$$r \equiv \begin{cases} x-y, & \text{se } y \leqslant x; \\ 1+x-y & \text{se } x < y. \end{cases} \tag{2}$$

Como $x, y \in [0,1)$, podemos verificar diretamente pela definição acima que $0 \leqslant r < 1$. Já que $x \sim y$, segue das definições de r e da relação "$\sim$" que em ambos casos $r \in \mathbb{Q}$ e portanto $r \in R$.

Observe também que segue diretamente da definição de r a seguinte igualdade

$$x = \begin{cases} y+r, & \text{se } y \leqslant x; \\ y+r-1, & \text{se } x < y. \end{cases}$$

Afirmamos que em ambos casos, temos que $x \in N_r$. De fato, no primeiro caso, temos $0 \leqslant y + r = x < 1$ o que implica $0 \leqslant y + r < 1$ e consequentemente $-r \leqslant y < 1 - r$. Como $y \geqslant 0$, segue da última desigualdade que $0 \leqslant y < 1 - r$ e portanto $y \in N \cap [0, 1-r)$. Logo $x = y+r$ pertence ao primeiro dos dois conjuntos da definição de N_r. No segundo caso temos $0 \leqslant x = y + r - 1 = x < 1$ o que implica que $1 - r \leqslant y < 1$ e portanto $y \in N \cap [1 - r, 1)$. Consequentemente, $x = y + r - 1$ pertence ao segundo dos conjuntos da definição de N_r.

Suponha que para algum $s \in R \setminus \{r\}$ temos $x \in N_s$. Então existe algum $z \in N$ tal que

$$x = \begin{cases} z+s, & \text{se } z \in N \cap [0, 1-s); \\ z+s-1 & \text{se } z \in N \cap [1-s, 1). \end{cases}$$

Portanto

$$x - y = \begin{cases} z-y+s, & \text{se } z \in N \cap [0, 1-s); \\ z-y+s-1 & \text{se } z \in N \cap [1-s, 1). \end{cases}$$

O que permite concluir que, em ambos os casos, $z-y$ é uma diferença de números racionais e consequentemente $y \sim z$. Já que $y, z \in N$ e o conjunto N possui um único elemento de cada classe de equivalência concluímos que $y = z$. Usando este fato na expressão acima ficamos com a seguinte igualdade

$$x - y = \begin{cases} s, & \text{se } y \in N \cap [0, 1-s); \\ s-1 & \text{se } y \in N \cap [1-s, 1). \end{cases}$$

Note que da igualdade acima temos que se $y \leqslant x$, então $x - y = s$, mas neste caso, por (2), temos $x - y = r$ o que implica que $s = r$ o que é um absurdo, já que assumimos que $s \in R \setminus \{r\}$. Analogamente, se $x < y$, então segue da igualdade acima que $x - y = s - 1$. Mas usando novamente (2) temos $x - y = r - 1$ o que implica novamente que $s = r$ que é um absurdo.

4 O Argumento de Inconsistência

Em resumo, mostramos até aqui que cada ponto $x \in [0,1)$ pertence a um único N_r e que $N_r \cap N_s = \varnothing$, se $r \neq s$. Consequentemente, podemos concluir que o intervalo $[0,1)$ pode ser escrito como uma união enumerável de conjuntos disjuntos, como segue

$$[0,1) = \bigcup_{r \in R} N_r \tag{3}$$

Vamos supor que exista uma função $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ que seja σ-aditiva, invariante por congruências e normalizada. Já que em (1) o conjunto N_r é escrito como uma união disjunta de dois subconjuntos podemos usar a σ-aditividade de μ para garantir que para cada $r \in R$ temos

$$\mu(N_r) = \mu\left(\{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\}\right) + \mu\left(\{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\}\right)$$

Note que a primeira parcela do lado direito da igualdade acima é simplesmente a medida do conjunto $N \cap [0, 1 - r)$ transladado por r e na segunda parcela temos a medida do conjunto $N \cap [1 - r, 1)$ transladado por $r - 1$. Como estamos assumindo que μ é invariante por congruências, segue destas observações, da igualdade acima e de mais uma aplicação da propriedade de σ-aditividade que:

$$\begin{aligned}
\mu(N_r) &= \mu\left(\{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r)\}\right) + \mu\left(\{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1)\}\right) \\
&= \mu\big(N \cap [0, 1 - r)\big) + \mu\big(N \cap [1 - r, 1)\big) \\
&= \mu\left(N \cap [0, 1 - r) \cup N \cap [1 - r, 1)\right) \\
&= \mu(N).
\end{aligned}$$

Usando a igualdade (3), as condições de normalização e σ-aditividade de μ e finalmente a igualdade acima concluímos que

$$1 = \mu([0, 1)) = \mu\left(\bigcup_{r \in R} N_r\right) = \sum_{r \in R} \mu\left(N_r\right) = \sum_{r \in R} \mu\left(N\right) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mu(N) = 0; \\ +\infty, & \text{se } \mu(N) > 0. \end{cases}$$

O que é um absurdo.

Desta discussão concluímos que não pode existir uma função μ satisfazendo simultaneamente:

- μ está definida em todos os conjuntos das partes de $\mathbb{R}$;
- μ é σ-aditiva;
- invariante por congruências;
- normalizada.

Agradecimentos

O autor destas notas agradece a Adriano de Medeiros por sua leitura atenciosa, sugestões e correções, as quais contribuíram para a melhoria da clareza do texto.

Referências

[1] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.