Universidade de Brasília
Departamento de Matemática
Lista 1 - Topologia Geral.

1- Se $A_i \subset X$ para cada $i \in I$, prove as leis de *De Morgan*:

$$a) \quad X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

$$b) \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

2- Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $B \subset Y$ e $B_i \subset Y$ para cada $i \in I$, prove que:

$$a) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$b) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$c) \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

3- Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $A \subset X$ e $A_i \subset Y$ para cada $i \in I$, prove que:

$$a) \quad f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$b) \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i), \quad \text{com igualdade se } f \text{ for injetiva.}$$

$$c) \quad f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A), \quad \text{se } f \text{ for injetiva.}$$

$$c) \quad f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A), \quad \text{se } f \text{ for sobrejetiva.}$$

4- Dê um exemplo de uma função $f : X \to Y$ e conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ tais que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

5- Dê um exemplo de uma função $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $f(X \setminus A) \neq Y \setminus f(A)$.

6- Seja $f : X \to Y$ uma função. Dados $A \subset X$ e $B \subset Y$, prove que:

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$, com igualdade se f for injetiva;

b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, com igualdade se f for sobrejetiva.

7- Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $A \subset X$ tal que $A \neq f^{-1}(f(A))$.

8- Dê exemplo de uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $B \subset Y$ tal que $B \neq f(f^{-1}(B))$.

9- Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funções tais que $g \circ f(x) = x$, para todo $x \in X$. Mostre que f é injetiva e g é sobrejetiva.

10- Sejam X um espaço topológico e $A \subset X$. Suponha que para cada $x \in A$ existe um aberto U possuindo x tal que $U \subset A$. Mostre que A é um aberto em X.

11- Considere as nove topologias do conjunto $X = \{a, b, c\}$ indicadas no Exemplo 1 na página 76 do livro texto. Determine quais são comparáveis e neste caso qual é a mais fina.

12- Mostre que a coleção $\mathcal{T}_c$ dada no Exemplo 4 página 77 do livro texto é uma topologia em X.

13- A coleção

$$\mathcal{T}_\infty = \Big\{ U \subset X \;\Big|\; (X \setminus U) \text{ é infinito, vazio ou próprio conjunto } X \Big\}$$

é uma topologia em X ?

14- Seja $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ é uma família de topologias em X. Mostre que $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ é uma topologia em X. Em geral, $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ é uma topologia em X ?

15- Seja $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ é uma família de topologias em X. Mostre que existe uma única topologia minimal em X contendo todas as coleções $\mathcal{T}_\alpha$ e uma única topologia maximal contida em todas $\mathcal{T}_\alpha$.

16- Sejam $X = \{a, b, c\}$ e

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}.$$

Encontre a topologia minimal em X contendo $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ e a topologia maximal contida em $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$.

17- Mostre que se $\mathcal{A}$ é uma base para uma topologia em X, então a topologia gerada por $\mathcal{A}$ é igual a interseção de todas as topologias em X que contém $\mathcal{A}$. Prove o mesmo se $\mathcal{A}$ é uma sub-base.

18- Mostre que as topologias de $\mathbb{R}_\ell$ e $\mathbb{R}_K$ não são comparáveis.

19- Considere as seguintes topologias em $\mathbb{R}$:

$\mathcal{T}_1$ = a topologia usual.

$\mathcal{T}_2$ = a topologia de $\mathbb{R}_K$.

$\mathcal{T}_3$ = a topologia dos complementos finitos.

$\mathcal{T}_4$ = a topologia do limite superior, tendo todos os conjuntos $(a, b]$ como base.

$\mathcal{T}_5$ = a topologia tendo todos os conjuntos $(-\infty, a) \equiv \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ como base.

Determine para cada uma destas topologias acima quais são as outras que ela contém.

20- Aplique o Lema 13.2 (página 80) para mostrar que a coleção enumerável

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$$

é uma base que gera a topologia usual de $\mathbb{R}$.

21- Mostre que a coleção

$$\mathcal{C} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } a < b\}$$

é uma base que gera uma topologia diferente da topologia do limite inferior em $\mathbb{R}$.