Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 1 - Variável Complexa 1

1. Reduza à forma $x + iy$

   a) $(1-5i)^2 - 4i$;

   b) $-i(-1+i)+2$;

   c) $(3+i)(1-11i)$;

   d) $(\sqrt{2} - i\sqrt{5})(\sqrt{5} + i\sqrt{2})$;

2. Novamente reduza à forma $x + iy$

   a) $\dfrac{3-4i}{2i}$;

   b) $\dfrac{2+5i}{-1+i\sqrt{3}}$;

   c) $\dfrac{(2-2i)^2}{1+i}$;

   d) $\dfrac{z - \overline{z}i}{\overline{z} - zi}$;

3. Faça o esboço e identifique os seguintes conjuntos no plano complexo

   a) $|z| = |z-2|$;

   b) $|z| = |\overline{z} - 1|$;

   c) $a|z| = |z-1|$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;

   d) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z-1)$;

   e) $\mathrm{Im}(z-1) = |z+1|$;

   f) $|\overline{z}| = |z-1|$;

4. Usando a primeira desigualdade triangular, mostre que $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

5. Deduza a desigualdade $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

6. Mostre que, se $z_2 \neq -z_3$ então $\left|\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \dfrac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$.

7. Resolva as equações

   a) $z - \overline{z} = 1$;

   b) $z + \overline{z}i = 2 + i$;

   c) $z + 2\overline{z} = 1 - i$.

8. Mostre que $|z_1 + z_2| < |1 + \overline{z_1}z_2|$, desde que $|z_1| < 1$ e $|z_2| < 1$.

9. Encontre todas as soluções das equações

   a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$;

   b) $z^5 = -1$;

   c) $\overline{z}^3 = 1$;

   d) $z^7 = -(1 + i)$.

10. Seja $P(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio de grau 2 com coeficientes reais e suponha que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então as soluções da equação $P(x) = 0$ são números complexos com parte imaginária não nula. Se z_1 e z_2 são estas soluções, mostre que $z_1 = \overline{z_2}$. Mais geralmente, se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau $n > 0$ arbitrário, com coeficientes reais, e se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $P(z_0) = 0$, então tem-se que $P(\overline{z_0}) = 0$.

11. Demonstre a fórmula De Moivre

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta.$$

12. Usa o exercício anterior para mostrar que

    a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}\,^2\theta$;

    b) $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$;

    c) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,^2\theta$;

    d) $\mathrm{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,^3\theta$.

13. Use o exercício anterior para deduzir expressões para $\mathrm{sen}\,4\theta$ e $\cos 4\theta$.

14. Calcule $(2+i)(3+i)$ e deduza a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

15. Calcule $(5-i)^4(1+i)$ e deduza a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

16. Mostre que três pontos a, b e c no plano complexo são colineares, se e somente se,

$$\det\begin{bmatrix} 1 & a & \overline{a} \\ 1 & b & \overline{b} \\ 1 & c & \overline{c} \end{bmatrix} = 0.$$

17. Uma ordem num corpo $\mathbb{K}$ consiste um dar um subconjunto $\mathbb{K}^+$ de $\mathbb{K}$ tal que:

   i) Se $x, y \in \mathbb{K}^+$ então $x + y \in \mathbb{K}^+$ e $xy \in \mathbb{K}^+$ ($\mathbb{K}^+$ é o conjunto dos números positivos);

   ii) Dado $x \in \mathbb{K}$ então apenas uma das possibilidades se verifica: ou $x \in \mathbb{K}^+$, ou $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{K}^+$.

   Segue daí que o quadrado de qualquer elemento não-nulo de $\mathbb{K}$ é um elemento do subconjunto dos positivos. De fato, se $x \in \mathbb{K}^+$ então $x^2 \in \mathbb{K}^+$ por i). Por outro lado, se $-x \in \mathbb{K}$ então $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 \in \mathbb{K}^+$, por i) novamente. Conclua que o corpo $\mathbb{C}$ não pode admitir uma ordem.