Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Variável Complexa 1 - Turma 02 - 01/2022

Lista 1 - Valor: 10 pts.
Data de Entrega: 27/06/2022

Instruções. Esta lista de exercícios é composta de 10 exercícios. As respostas deles devem ser entregues manuscritas à lápis ou caneta azul, em letra legível. Não é necessário redigir os enunciados das questões e as soluções podem ser escritas em qualquer ordem. Não esquecer de mencionar o número do exercício correspondente a cada resposta.

No cabeçalho da primeira folha devem constar as seguintes informações:

- Lista 1 - Variável Complexa 1 - Turma: 02;
- Data: 20/06/2022;
- Nome completo do aluno (sem abreviação);
- Número de matrícula.

Questões

1. **(1 pt)** Encontre todas as soluções das equações:

   a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$;
   b) $z^5 = -1$;
   c) $\overline{z}^3 = 1$;
   d) $z^7 = -(1+i)$.

2. **(1 pt)** Faça o esboço e identifique os seguintes conjuntos no plano complexo

   a) $|z| = |z-2|$;
   b) $|z| = |\overline{z} - 1|$;
   c) $\text{Re}(z) = \text{Im}(z-1)$;
   d) $\text{Im}(z-1) = |z+1|$;

3. **(1 pt)** Uma das maneiras mais simples de se definir uma relação de ordem num corpo $\mathbb{K}$, consiste um dar um subconjunto $\mathbb{K}^+$ de $\mathbb{K}$ satisfazendo:

   i) para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}^+$ temos $x+y \in \mathbb{K}^+$ e $xy \in \mathbb{K}^+$ ($\mathbb{K}^+$ é comumente chamado de conjunto dos números positivos);
   ii) para qualquer $x \in \mathbb{K}$ apenas uma das possibilidades se verifica: ou $x \in \mathbb{K}^+$, ou $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{K}^+$.

   Mostre que

   a) o quadrado de qualquer elemento não-nulo de $\mathbb{K}$ é sempre um elemento de $\mathbb{K}^+$, isto é, um elemento do conjunto dos positivos.
   b) Conclua que no corpo $\mathbb{C}$ não pode existir um subconjunto $\mathbb{C}^+$ satisfazendo as propriedades i) e ii).

4. **(1 pt)** Faça um esboço do conjunto $U \subset \mathbb{C}$ dado por

$$U \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$$

Em seguida, determine seu diâmetro, isto é, $\operatorname{diam}(U)$.

5. **(1 pt)** Considere o conjunto $V \subset \mathbb{C}$ definido por $V \equiv \overline{D(1+i, 2)} \setminus \{1 + i\}$. Responda as seguintes perguntas justificando suas respostas usando apenas as definições, proposições, lemas, teoremas apresentados nas notas de aula.

   - O conjunto V é um conjunto limitado?
   - O conjunto V é um conjunto compacto?
   - O conjunto V é um conjunto aberto?

6. **(1 pt)** Determine os conjuntos de todos os pontos de acumulação e de aderência do conjunto $U = D(0, 1) \setminus \{1\}$, isto é, o disco unitário aberto exceto a origem.

7. **(1 pt)** Mostre que o conjunto $\mathbb{H} \equiv \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ é um subconjunto aberto do plano complexo.

8. **(1 pt)** Faça o esboço e exiba explicitamente o caminho **normalizado** cujo o traço consiste na união dos dos seguintes segmentos: o primeiro, unindo os pontos $z_1 \equiv -1+i$ à $z_2 \equiv 2i$; e o segundo unindo o ponto $z_2 \equiv 2i$ à $z_3 \equiv 3$.

9. **(1 pt)** Lembramos que um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ é dito ser denso em $\mathbb{C}$ se seu fecho é todo plano complexo, isto é, $\overline{U} = \mathbb{C}$. Por exemplo, o conjunto $U \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é um conjunto denso. De fato, é fácil verificar que $\overline{\mathbb{C} \setminus \{0\}} = \mathbb{C}$. Neste caso, note que U é um aberto denso, cujo o complemento é formado apenas por um conjunto unitário, que é exatamente a origem. Encontre um subconjunto U do plano complexo que é aberto, denso e cujo complementar seja um conjunto infinito.

10. **(1 pt)** Podem existir dois subconjuntos distintos do plano complexo, digamos U e V tais que U e V são ambos densos em $\mathbb{C}$, mas a interseção de U e V é vazia? Caso U e V sejam abertos densos eles podem ter interseção vazia?