Departamento de Matematica

Lista 11 - Variável Complexa 1

1. Seja f uma função holomorfa, definida numa vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}$ e satisfazendo: $f(0) = 0$ e 0 é o único zero de f em U. Seja g uma função holomorfa também definida em U. Mostre que f divide g, isto é, $g = hf$, onde h é uma função holomorfa se, e somente se,

$$\operatorname{res}\left(k\frac{g}{f}, 0\right) = 0 \quad \text{para toda função holomorfa } k \text{ em } U.$$

2. Classifique a singularidade em $z = 0$ de cada uma das funções abaixo:

   a) $f(z) = \operatorname{sen}(1/z)$;

   b) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$;

   c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{z^3}$;

   d) $f(z) = \exp\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$;

   e) $f(z) = \dfrac{1}{z^8 - z}$;

   e) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^4}$;

3. Mostre que se $|\alpha| > e$ então a equação $e^z = \alpha z^n$ tem n raízes no disco $D(0, 1)$.

4. Ache o número de zeros, localizados no disco unitário $D(0, 1)$, dos seguintes polinômios:

   a) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$;

   b) $z^4 - 5z + 1$.

5. Determine a ordem do polo de f em a e calcule o $\operatorname{res}(f, a)$, onde

   a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$;