Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 2 - Topologia Geral.

1- Considere a seguinte relação no plano dada por

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$

se $y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2$ ou $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ e $x_0 < x_1$. Mostre que isto é uma relação de ordem no plano e a descreva geometricamente.

2- Mostre que a restrição de uma relação de ordem é uma relação de ordem.

3- Se X e Y são conjuntos ordenados por $<_X$ e $<_Y$, respectivamente. Mostre que a ordem lexicográfica em $X \times Y$ é uma relação de ordem.

4- Seja X um conjunto ordenado. Mostre que qualquer elemento $x \in X$ tem no máximo um sucessor imediato e também no máximo um predecessor imediato.

5- Seja X um conjunto ordenado. Mostre que qualquer subconjunto $A \subset X$ tem no máximo um *menor elemento* e no máximo um *maior elemento*.

6- Considere o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}_+$. Considere as seguintes relações de ordem em $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$:

i) Ordem lexicográfica.

ii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$, se $x_0 - y_0 < x_1 - y_1$ ou $x_0 - y_0 = x_1 - y_1$ e $y_0 < y_1$.

iii) $(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$, se $x_0 + y_0 < x_1 + y_1$ ou $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$ e $y_0 < y_1$.

Nestas relações de ordem quais elementos tem predecessores imediatos ? Em quais destas ordens $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ tem um menor elemento ? Mostre que as três ordens acima, são de tipos diferentes.

7- Prove o seguinte afirmação: Um conjunto ordenado X tem a propriedade do supremo se, e somente se, X tem a propriedade do ínfimo.

8- Se C é uma relação em um conjunto X, defina uma nova relação D em X onde $(b, a) \in D$ se $(a, b) \in C$.

i) Mostre que C é simétrica se, e somente se, $C = D$.

ii) Mostre que se C é uma relação de ordem então D também é uma relação de ordem.

iii) Prove a recíproca no exercício 6 usando estes fatos.

9- Assuma que $\mathbb{R}$ tem a propriedade do supremo. Mostre que os conjuntos:

a) $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

b) $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$.

têm a propriedade do supremo.

10- O conjunto $[0,1] \times [0,1]$ com a ordem lexicográfica tem a propriedade do supremo ? Neste sentido o que pode ser dito sobre conjunto $[0,1] \times [0,1)$? E quanto a $[0,1) \times [0,1]$?

Ordem Parcial

Definição(Ordem Parcial). Uma relação P em um conjunto X é chamada de relação de *ordem parcial* em X se P satisfaz as seguintes propriedades:

i) (Reflexiva) xPx para todo $x \in X$.

ii) (Anti-simétrica) Se xPy e yPx então $x = y$.

iii) (Transitiva) Se xPy e yPz, então xPz.

Neste caso dizemos que X é um **conjunto parcialmente ordenado**. É comum denotar a ordem parcial P em X por $\preceq$.

Definição(Ordem total). Uma relação P em um conjunto X é chamada de relação de *ordem total* em X se P é uma relação de ordem parcial e também satisfaz a propriedade

iv) (Comparabilidade) dados quaisquer $x, y \in X$ ou xPy ou yPx.

Neste caso dizemos que X é um **conjunto totalmente ordenado** e também é comum denotar a relação de ordem total P por $\preceq$.

Exemplo. Seja X um conjunto arbitrário. A relação de **inclusão** é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}(X)$ (conjunto das partes de X).

Exemplo. A relação de ordem usual em $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem total.

Definição. Sejam X um conjunto parcialmente ordenado com relação de ordem parcial $\preceq$ e $A \subset X$.

a) Se existir $a \in A$ tal que $a \preceq x$ para todo $x \in A$, dizemos que a é o *menor elemento* de A. Analogamente definimos o *maior elemento*.

b) Se existir $a \in A$ tal que se $x \in A$ e $x \preceq a$ implica $x = a$, dizemos que a é um *elemento minimal* de A. Analogamente definimos elemento maximal.

c) Se existir $b \in X$ tal que $b \preceq a$ para todo $a \in A$, dizemos que b é uma *cota inferior* de A e que A é *limitado inferiormente*. Analogamente definimos *cota superior* e conjunto limitado superiormente.

d) Dizemos que $A \subset X$ é uma **cadeia** em X se A é totalmente ordenado sob a relação de ordem parcial induzida por X.

e) Dizemos que $A \subset X$ é **bem ordenado** se todo subconjunto não vazio de A possui menor elemento.

Exemplo. O conjunto dos inteiros positivos, $\mathbb{Z}_+$, com a ordem usual é bem ordenado.

Exemplo. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é totalmente ordenado, mas não é bem ordenado: se $a < b$ o intervalo aberto (a, b) não possui menor elemento.

Lema.(Lema de Zorn). Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que toda cadeia em X é limitada superiormente. Então X possui pelo menos um elemento maximal, isto é, existe $m \in X$ tal que se $m \preceq x$ para algum $x \in X$ então $x = m$.

Teorema.(Teorema de Zermelo). Para qualquer conjunto X é possível construir uma relação de ordem parcial $\preceq$ em X tal que X é um conjunto bem ordenado.

Teorema 1. São equivalente:

- Axioma da escolha.
- Lema de Zorn.
- Teorema de Zermelo.

11- Seja $X = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \geq 2\}$. Dados $m, n \in X$, dizemos que $m \preceq n$ se m divide n.

i) Prove que a relação $\preceq$ definida acima é uma relação de ordem parcial em X.

ii) Prove que, dada uma cada cadeia $A \subset X$ e um elemento $n \in A$, existe apenas um número finito de elementos $n_1, \ldots, n_k \in A$ que dividem n.

iii) Prove que toda cadeia A em X é limitada inferiormente.

iv) Identifique os elementos minimais de X.

12- Seja V um espaço vetorial não trivial. Usando o Lema de Zorn prove que cada subconjunto linearmente independente de V está contido em alguma base de V.

13- Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo, seja Z subespaço vetorial de V e $T : Z \to W$ uma aplicação linear. Use o Lema de Zorn para provar a existência de uma aplicação linear $F : V \to W$ que é uma extensão de T, isto é, $F(v) = T(v)$ para todo $v \in Z$.

14- Seja A um anel comutativo com unidade. Um conjunto $I \subset A$ é chamado de ideal se as seguintes condições são satisfeitas:

i) $x - y \in I$ para todo $x, y \in I$.

ii) $xy \in I$ para todo $x \in I$ e $y \in A$.

Um ideal $I \neq A$ é chamado de *ideal próprio*. Um ideal próprio que não está contido em nenhum outro ideal próprio é chamado de *ideal maximal*. Use o Lema de Zorn para provar que cada ideal próprio de A está contido em algum ideal maximal.