Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 2 - Variável Complexa 1.

1. Neste exercício z_0 é um número complexo arbitrário fixado. Esboce os conjuntos abaixo, diga se são fechados, abertos ou nenhum deles, esboce sua fronteira, diga quais são domínios e quais são limitados:

   a) $\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(z_0)$;

   b) $\mathrm{Im}(z_0) > \mathrm{Re}(z)$;

   c) $\mathrm{Re}(z^2) \geq 1$;

   d) $\mathrm{Im}(zz_0) > 0$;

   e) $|z - z_0| < |\overline{z} - z_0|$;

   f) $|z - z_0| \leq |z - \overline{z_0}|$;

   g) $1 \leq |z - \overline{z_0}| \leq 3$;

   h) $\mathrm{Im}(z^2) \leq 1$.

2. Para cada um dos conjuntos abaixo sua fronteira é descrita por uma curva suave por partes. Esboce o conjunto, sua fronteira e dê uma aplicação que a descreva

   a) $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ \mathrm{Re}(z) \geq 1/2\}$;

   b) $V = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 1,\ \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$;

   c) $V = \{z \in \mathbb{C} : 1/3 \leq |z| \leq 1,\ \mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

3. Calcule a $\int_{\partial V} f$, onde V é cada um dos conjuntos do exercício anterior (V e a ∂V tem orientação compatível) e a função f é dada por

   a) $f(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$;

   b) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$;

4. Calcule $\int_{\partial V} x^n\,dy$ e $\int_{\partial V} y^n\,dx$, onde $n \geq 1$ e V é dado por

   a) o quadrado $[0,1] \times [0,1]$;

   b) o disco $\mathbb{D} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

   levando em conta que V e ∂V estão compativelmente orientados.

5. Seja V como enunciado do Teorema de Green. Mostre que a área de V é dada por

$$\int_{\partial V} x\,dy.$$

6. Use o exercício anterior para calcular a área de

   a) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$;

   b) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9,\ 1 \leq xy \leq 4\}$.

7. Calcule

   a) $\displaystyle\int_{\partial V} (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$;

   b) $\displaystyle\int_{\partial V} 2xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy$,

   onde V é

   a) o retângulo delimitado pelas retas $y = x, y = -x+4, y = x+2, y = -x$;

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9,\ 1 \leq xy \leq 4\}$ (V e ∂V tem fronteira compatível).

8. Calcule

$$\int_{\partial V} \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dx + \frac{x-1}{(1-x)^2+y^2}\,dy,$$

   onde V é a região limitada pelos círculos $x^2+y^2 = 3$ e $(x-1)^2+y^2 = 9$ (V e ∂V tem fronteira compatível).

9. Calcule

$$\int_{\partial V} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}\, dx - \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\, dy,$$

onde V é a região interior a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ orientada no sentido anti-horário.