Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 3 - Topologia Geral.

1- Mostre que se Y é um subespaço topológico de X e A é um subconjunto Y, então a topologia induzida em A como subespaço de Y e a mesma topologia que é induzida como subespaço de X.

2- Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ topologias em X com $\mathcal{T}'$ estritamente mais fina que $\mathcal{T}$. O que pode ser dito sobre as topologias induzidas em um subconjunto $Y \subset X$ por $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$?

3- Considere o conjunto $Y = [-1, 1]$ como subespaço de $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes conjuntos são abertos em Y ? Quais são abertos em $\mathbb{R}$?

i) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| < 1\right\}$

ii) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < |x| \leq 1\right\}$

iii) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| < 1\right\}$

iv) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\right\}$

v) $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < 1 \text{ e } 1/n \notin \mathbb{Z}_+\}$

4- Uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada de **aplicação aberta** se para todo aberto U de X o conjunto $f(U)$ é um aberto em Y. Mostre que as projeções $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ são aplicações abertas.

5- Mostre que a coleção enumerável

$$\{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2 : a < b, \quad c < d, \quad \text{e} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

é uma base para $\mathbb{R}^2$.

6- Seja X um conjunto ordenado. Se Y é um subconjunto próprio de X que é convexo em X podemos afirmar que Y é um intervalo ou segmento em X ?

7- Se L é uma reta arbitrária em $\mathbb{R}^2$, descreva a topologia induzida em L como um subespaço de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$ e como subespaço de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.

8- Considere $\mathbb{R}^2$ com a ordem lexicográfica e seja $\mathcal{T}$ a topologia da ordem em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\mathcal{T}$ coincide com a topologia produto de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}_d$ denota a topologia discreta em $\mathbb{R}$. Compare esta topologia com a topologia padrão de $\mathbb{R}^2$.

9- Seja $I = [0, 1]$. Compare a topologia produto de $I \times I$, com a topologia da ordem (considerando a ordem lexicográfica) e com a topologia induzida por $\mathbb{R}^2$ munido da topologia da ordem (considerando a ordem lexicográfica).

10- Prove que o axioma da escolha é equivalente a seguinte afirmação: Seja $\{X_i,\ i \in I\}$ uma família não vazia de conjuntos disjuntos não vazios. Então existe um conjunto $Y \subset \bigcup_{i\in I} X_i$ tal que $Y \cap X_i$ contém um único elemento para cada $i \in I$.

11- Dados n conjuntos não vazios $X_1, \ldots, X_n$, podemos definir o produto cartesiano destes conjuntos por

$$X_1 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \ \text{ para } \ i = 1, \ldots, n\}$$

Usando a definição geral de produto cartesiano temos

$$\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R} : f \ \text{ é uma função}\}.$$

Encontre uma aplicação bijetiva entre $X_1 \times \ldots \times X_n$ e $\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i$.

12- Seja X um espaço topológico e seja Y um subespaço de X. Mostre que:

i) Se X tem topologia discreta, então a topologia induzida em Y é a topologia discreta.

ii) Se X tem a topologia trivial, então a topologia em Y também é a trivial.