Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 3 - Variável Complexa 1.

1. Mostre que a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, dada por

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}},$$

não tem limite quando $z \to 0$.

2. Seja $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$g(z) = \frac{\overline{z}}{z}.$$

Pergunta: existe o limite de $g(z)$ quando z tende a zero ?

3. Mostre **usando as equações de Cauchy-Riemann** que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3 + 2z + 1$ é inteira.

4. Existe algum subconjunto do plano complexo onde $f(z) = |z|$ é analítica ?

5. Nos itens abaixo determine quais limites existem e neste caso seu valor

   a) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{e^z - 1}{z}$;

   b) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{sen|z|}{z}$;

   c) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{\overline{z} - 1}{z - 1}$;

   d) $\lim\limits_{z \to -1} \log(z)$, onde $\log(z)$ denota o ramo principal do logaritmo.

6. É verdade que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$? Por quê ?

7. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio (aberto e conexo). Suponha que $f : U \to \mathbb{C}$ seja uma função holomorfa. Defina $g : U \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \overline{f(z)}$. A função g é holomorfa no domínio U ?

8. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira **não constante**. Mostre que as seguintes funções não são inteiras:

   a) $|f(z)|$;

   b) $\overline{f(z)}$;

   c) $\mathrm{Im}(f(z))$;

   d) $\mathrm{Re}(f(z))$.

9. Seja $\mathbb{H} \equiv \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ o semi-plano superior. Considere a função $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Mostre que $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Conclua que f define uma função que leva $\mathbb{H}$ em algum subconjunto de $\mathbb{H}$. Verifique se as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $\mathbb{H}$, em caso afirmativo, determine a derivada de f em cada ponto de seu domínio.

10. Se $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto do plano complexo é verdade que se $f'(z) = 0$ para todo $z \in U$ então $f(z) \equiv c$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}$?

11. Sejam $B(0, R)$ a bola de centro na origem e raio $R > 0$ e $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $B(0, R)$. Mostre que se existe um número complexo c tal que $\mathrm{Re}(f(z)) = c$ para todo $z \in B(0, R)$, então f é uma função constante.

12. A conclusão do exercício acima continua verdadeira se supormos apenas que a parte imaginária de f é constante ?