Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 3 - Variável Complexa 1.

1. Represente no plano cartesiano o número complexo $\exp\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.

2. Em quais pontos do plano complexo cada uma das as seguintes funções têm derivada (no sentido complexo)

   - $f(z) = \overline{z}^2$;
   - $f(z) = f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;
   - $f(z) = |z|$.

3. Em quais pontos do plano complexo a função

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

   tem derivada ? Para tais pontos calcule $f'(z)$.

4. Encontre o domínio onde a seguinte função está bem definida:

$$\exp\left(\frac{1}{z^n+1}\right).$$

5. Calcular a derivada da função do exercício anterior.

6. Mostre que a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, dada por

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}},$$

   não tem limite quando $z \to 0$.

7. Seja $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$g(z) = \frac{\overline{z}}{z}.$$

   Pergunta: existe o limite de $g(z)$ quando z tende a zero ?

8. Mostre **usando as equações de Cauchy-Riemann** que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3 + 2z + 1$ é inteira.

9. Existe algum subconjunto do plano complexo onde $f(z) = |z|$ é analítica ?

10. Nos itens abaixo determine quais limites existem e neste caso seu valor

    a) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z}$;

    b) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{sen|z|}{z}$;

    c) $\displaystyle\lim_{z\to 1} \frac{\overline{z} - 1}{z - 1}$;

    d) $\displaystyle\lim_{z\to -1} \log(z)$, onde $\log(z)$ denota o ramo principal do logaritmo.

11. É verdade que $|\mathrm{sen}\, z| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$? Por quê ?

12. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio (aberto e conexo). Suponha que $f : U \to \mathbb{C}$ seja uma função holomorfa. Defina $g : U \to \mathbb{C}$ por $g(z) = \overline{f(z)}$. A função g é holomorfa no domínio U ?

13. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira **não constante**. Mostre que as seguintes funções não são inteiras:

    a) $|f(z)|$;

    b) $\overline{f(z)}$;

    c) $\mathrm{Im}(f(z))$;

    d) $\mathrm{Re}(f(z))$.

14. Seja $\mathbb{H} \equiv \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ o semi-plano superior. Considere a função $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Mostre que $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Conclua que f define uma função que leva $\mathbb{H}$ em algum subconjunto de $\mathbb{H}$. Verifique se as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $\mathbb{H}$, em caso afirmativo, determine a derivada de f em cada ponto de seu domínio.

15. Se $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto do plano complexo é verdade que se $f'(z) = 0$ para todo $z \in U$ então $f(z) \equiv c$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}$?

16. Sejam $B(0, R)$ a bola de centro na origem e raio $R > 0$ e $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $B(0, R)$. Mostre que se existe um número complexo c tal que $\mathrm{Re}(f(z)) = c$ para todo $z \in B(0, R)$, então f é uma função constante.

17. A conclusão do exercício acima continua verdadeira se supormos apenas que a parte imaginária de f é constante ?

18. Examine a função analítica $f(z) = z^2$.

    - Determine as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $z^2 = u(x, y) + iv(x, y)$.
    - Determine as seguintes *curvas equipotenciais* para u e v, isto é, as curvas $u(x, y) = 1$ e $v(x, y) = 1$.
    - Determine os pontos de interseção das curvas, determinadas no exercício anterior, no primeiro quadrante.
    - Mostre que nos pontos de interseção, estas curvas se tocam ortogonalmente, isto é, seus vetores tangentes neste ponto são ortogonais.