# Universidade de Brasília

## Departamento de Matemática

## Lista 4 - Topologia Geral.

1- Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de $X$. Suponha que $\emptyset$ e $X$ pertençam a $\mathcal{C}$ e que uniões finitas e interseções arbitrárias de elementos de $\mathcal{C}$ estejam em $\mathcal{C}$. Mostre que a coleção

$$\mathcal{T} = \{X - C : C \in \mathcal{C}\}$$

é uma topologia em $X$.

2- Mostre que se $A$ é um fechado de $Y$ e $Y$ é fechado em $X$, então $A$ é fechado em $X$.

3- Mostre que se $A$ é um fechado de $X$ e $B$ é fechado em $Y$, então $A \times B$ é fechado em $X \times Y$.

4- Mostre que se $U$ é um aberto em $X$ e $A$ é fechado em $X$, então $U - A$ é um aberto em $X$ e $A - U$ é um fechado em $X$.

5- Seja $X$ um conjunto ordenado e considere a topologia da ordem em $X$. Mostre que $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$. Sobre quais condições podemos garantir que vale a igualdade ?

6- Sejam $A, B$ e $A_\alpha$ subconjuntos de $X$. Prove que:

i) Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$.

ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

iii) $\bigcup \overline{A_\alpha} \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$.

7- Critique a seguinte "prova" que $\overline{\bigcup A_\alpha} \subset \bigcup \overline{A_\alpha}$. Se $A_\alpha$ é uma coleção de conjuntos de $X$ e se $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$, então toda vizinhança $U$ de $x$ intercepta $\bigcup A_\alpha$. Assim $U$ deve interceptar algum $A_\alpha$, logo $x$ pertence ao fecho de algum $A_\alpha$ e portanto $x \in \bigcup \overline{A_\alpha}$.

8- Sejam $A, B$ e $A_\alpha$ subconjuntos de $X$. Determine quais das seguintes identidades são verdadeiras. Caso não seja determine se algum tipo de inclusão ("$\subset$" ou "$\supset$" ) é válida nos seguintes itens:

i) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

ii) $\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \overline{A_\alpha}$.

iii) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$.

9- Sejam $A \subset X$ e $B \subset Y$. Mostre que no espaço $X \times Y$ temos

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

10- Mostre que a topologia da ordem é Hausdorff.

11- Mostre que o produto cartesiano de dois espaços de Hausdorff é um espaço de Hausdorff.

12- Mostre que o subespaço de um espaço de Hausdorff é Hausdorff.

13- Mostre que $X$ é Hausdorff se, e somente se, a diagonal

$$\Delta \equiv \{x \times x : x \in X\}$$

é fechado em $X \times X$.

14- Na topologia do complemento finito em $\mathbb{R}$ para qual ou quais pontos a sequência $x_n = 1/n$ converge ?

15- Mostre que o axioma $T_1$ é equivalente a condição que para cada par de pontos de $x, y \in X$, existem vizinhanças destes pontos que não contém o outro ponto.

16- Considere as cinco topologias em $\mathbb{R}$ dadas no Exercício 19 da Lista 1.

i) Determine o fecho do conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ em cada uma destas topologias.

ii) Quais destas topologias satisfaz o axioma de Hausdorff? Quais satisfazem o axioma $T_1$ ?

17- Considere a topologia do limite inferior em $\mathbb{R}$ e a topologia gerada pela base $\mathcal{C}$ do exercício 21 da Lista 1. Determine o fecho dos intervalos $A = (0, \sqrt{2})$ e $B = (\sqrt{2}, 3)$ nestas duas topologias.

18- Determine o fecho dos seguintes subconjuntos do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ com a topologia da ordem lexicográfica:

$A = \{1/n \times 0 : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

$B = \{(1 - 1/n) \times 1/2 : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

$C = \{x \times 0 : 0 < x < 1\}$.

$D = \{x \times 1/2 : 0 < x < 1\}$.

$E = \{1/2 \times x : 0 < y < 1\}$.