Departamento de Matematica

Lista 4 - Variavel Complexa 1

1. Se $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto do plano complexo é verdade que se $f'(z) = 0$ para todo $z \in U$ então $f(z) \equiv c$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}$?

2. Sejam $B(0, R)$ a bola de centro na origem e raio $R > 0$ e $f : B(0, R) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $B(0, R)$. Mostre que se existe um número complexo c tal que $\mathrm{Re}(f(z)) = c$ para todo $z \in B(0, R)$, então f é uma função constante.

3. A conclusão do exercício acima continua verdadeira se supormos apenas que a parte imaginária de f é constante ?

4. Determine um aberto não vazio $U \subset \mathbb{C}$ tal que a expressão

$$f(z) = \frac{1}{i} \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

onde log denota o ramo principal do logaritmo, esteja bem definida em U. Em seguida, mostre que $\cos(f(z)) = z$ para todo $z \in U$. Faça o mesmo para a expressão

$$g(z) = \frac{1}{i} \log(z - \sqrt{z^2 - 1}),$$

5. Suponha que $f : U \to \mathbb{C}$ seja uma função holomorfa tal que $\operatorname{sen}(f(z)) = z$, para todo $z \in U$. Usando a regra da cadeia prove que $(f'(z))^2 = 1/(1 - z^2)$. Mostre também que $\pi/2 \notin f(U)$.

6. Mostre que para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{C}$ a equação $az^2 + bz + c = 0$ admite duas soluções (contadas com multiplicidade) se $a \neq 0$.

7. Considerando todos os ramos possíveis do logaritmo mostre que existem apenas 5 valores possíveis para $3^{\frac{1}{5}}$.

8. Considerando todos os ramos possíveis do logaritmo mostre que existem infinitos valores possíveis para $3^{\sqrt{2}}$.

9. Encontre um ramo para a função $f(z) = \sqrt{1+z}$, em seguida para $g(z) = \sqrt{1-z}$ e por último um ramos para $h(z) = \sqrt{1-z^2}$. É verdade que $h(z) = f(z)g(z)$, em qualquer ponto onde todas estas funções estão definidas ?

10. Encontre um ramo para $\log(\log(z))$.

11. Calcule o módulo de $z^{\frac{1}{2}}$ e mostre que se $|z| \leq 1$ então $|z^{\frac{1}{2}}| \leq 1$.

12. Encontre todas as soluções do problema $\sqrt{z+1} = 5$, onde $\sqrt{\cdot}$ é um ramo arbitrário da raiz quadrada.

13. É verdade que para quaisquer números complexos $a, b \in \mathbb{C}$ temos $|a^b| = |a|^{|b|}$?

14. Considere o polinômio $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Mostre que se $|z|$ é suficientemente grande então $|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2}|z|^n$.

15. Quais das seguintes desigualdades são verdadeiras para quaisquer números complexos:

$$|e^z| \leq |z|, \; |z| \leq |e^z|, \; e^{|z|} \leq |z|, \; |e^z| \leq e^{|z|} \quad ?$$

16. Calcule $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z}$.