Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 5 - Topologia Geral.

1- Prove que para funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a definição por $\varepsilon - \delta$ implica na definição por abertos.

2- Suponha que $f : X \to Y$ é contínua. Se x é um ponto de acumulação do subconjunto $A \subset X$ é necessariamente verdadeiro que $f(x)$ é um ponto de acumulação de $f(A)$?

3- Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias em X. Denote estes espaços por X e X', respectivamente. Seja $i : X \to X'$ a função identidade.

a) Mostre que i é contínua se, e somente se, $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$.

b) Mostre que i é um homeomorfismo se, e somente se, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

4- Dados $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, mostre que as aplicações $f : X \to X \times Y$ e $g : Y \to X \times Y$ definidas por $f(x) = x \times y_0$ e $g(y) = x_0 \times y$ são imersões.

5- Mostre que o subespaço $(a, b) \subset \mathbb{R}$ é homeomorfo a $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ e também que $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é homeomorfo a $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

6- Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é contínua em exatamente um ponto.

7- Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua a direita, isto é,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Mostre que f é uma função contínua, quando vista como função de $\mathbb{R}_\ell$ para $\mathbb{R}$.

8- Você poderia conject

urar quais funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas quando consideradas como funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}_\ell$? Como aplicações de $\mathbb{R}_\ell$ para $\mathbb{R}_\ell$?
(Esta questão será abordada novamente em listas futuras).

9- Seja Y um conjunto ordenado e considere a topologia da ordem em Y. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas.

i) Mostre que o conjunto $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ é fechado em X.

ii) Seja $h : X \to Y$ uma função dada por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostre que h é contínua. (Dica: use o lema da "colagem".)

10- Seja $\{A_\alpha\}$ uma coleção de subconjuntos de X e suponha que $X = \cup_\alpha A_\alpha$. Seja $f : X \to Y$ uma função tal que $f|_{A_\alpha}$ seja contínua para cada α.

i) Mostre que se a coleção $\{A_\alpha\}$ é finita e cada conjunto A_α é fechado, então f é contínua.

ii) Encontre exemplo de uma coleção enumerável $\{A_\alpha\}$, onde cada A_α é fechado, mas f não é contínua.

iii) Uma família de conjuntos $\{A_\alpha\}$ é dita ser **localmente finita** se cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U que intercepta no máximo uma quantidade finita de conjuntos A_α's. Mostre que se a família $\{A_\alpha\}$ é localmente finita e cada A_α é fechado, então f é contínua.

11- Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$ funções contínuas. Defina a aplicação $f \times g : A \times C \to B \times D$ por

$$(f \times g)(a, c) = f(a) \times g(c).$$

Mostre que $f \times g$ é contínua.

12- Seja $F : X \times Y \to Z$ uma função. Dizemos que F é **contínua em cada variável separadamente**, se para cada $y_0 \in Y$ fixado a aplicação $h : X \to Z$ dada por $h(x) = F(x \times y_0)$ é contínua e também para cada x_0 em X a aplicação $k : Y \to Z$ definida por $k(y) = F(x_0 \times y)$ é contínua. Mostre que se F é contínua, então F é contínua em cada variável separadamente.

13- Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } x \times y \neq 0 \times 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

i) Mostre que F é contínua em cada variável separadamente;

ii) Obtenha a expressão explícita da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = F(x \times x)$.

iii) Mostre que F não é contínua.

14- Sejam $A \subset X$ e $f : A \to Y$ uma aplicação contínua e suponha que Y é um espaço de Hausdorff. Mostre que se f pode ser estendida a uma função contínua $g : \overline{A} \to Y$, então g é unicamente determinada por f.

15- Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de espaços topológicos. Prove que se a topologia de X_α é dada por uma base $\mathcal{B}_\alpha$ então a coleção de todos os conjuntos da forma

$$\prod_{\alpha \in J} B_\alpha,$$

onde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para todo $\alpha \in J$, é uma base para a topologia "box" em $\prod_\alpha X_\alpha$.

16- Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços topológicos. Prove que se a topologia de X_α é dada por uma base $\mathcal{B}_\alpha$ então a coleção de todos os conjuntos da forma

$$\prod_{\alpha\in J} B_\alpha,$$

onde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ e $B_\alpha = X_\alpha$ a menos de um conjunto finito de índices, é uma base para a topologia produto em $\prod_\alpha X_\alpha$.

17- Sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços topológicos e A_α subespaço de X_α para cada $\alpha \in J$. Prove que $\prod_\alpha A_\alpha$ é um subespaço de $\prod_\alpha X_\alpha$ se em ambos produtos cartesianos consideramos a topologia "box". Prove que o resultado também é verdadeiro se em ambos produtos consideramos a topologia produto.

18- Sejam $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma família de espaços de Hausdorff. Prove que $\prod_\alpha X_\alpha$ também é um espaço de Hausdorff em ambas topologias "box" e produto. A recíproca é verdadeira para as duas topologias no espaço produto ?

19- Mostre que $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$ é homeomorfo a $X_1 \times \ldots \times X_n$.

20- Qual das implicações do Teorema 19.6 do livro é válida também para a topologia "box" ?

21- Seja $x^1, x^2, \ldots$ uma sequência de pontos em $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$. Mostre que se esta sequência converge para um ponto $x \in \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ se, e somente se, a sequência $\pi_\alpha(x^1), \pi_\alpha(x^2), \ldots$ converge para $\pi_\alpha(x)$ para cada $\alpha \in J$. Este fato contínua sendo verdadeiro se consideramos a topologia "box" em $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$?

22- Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dado por

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0 = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_i \neq 0 \text{ para no máximo uma quantidade finita de índices } i\}$$

Qual é o fecho de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0$ na topologia produto e na topologia "box" ?

23- Sejam $(a_1, a_2, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots)$ elementos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ com $a_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Considere a aplicação $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$h\big((x_1, x_2, \ldots)\big) = (a_1 x_1 + b_1,\ a_2 x_2 + b_2, \ldots)$$

Mostre que se consideramos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ munido da topologia produto então h é um homeomorfismo. Podemos dizer o mesmo se munimos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ da topologia "box" ?

24- Mostre que o axioma da escolha é equivalente a seguinte afirmação: dada uma família de conjuntos não vazios X_α com $\alpha \in J$, então o produto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \neq \emptyset$.

25- Sejam A um conjunto, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de espaços topológicos e $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de funções $f_\alpha : A \to X_\alpha$.

i) Mostre que existe uma única topologia mais grossa $\mathcal{T}$ em A na qual todas as funções f_α são contínuas.

ii) Para cada $\beta \in J$ seja $S_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta$ é um aberto em $X_\beta\}$. Mostre que a coleção $S = \cup_{\alpha \in J} S_\alpha$ é uma subbase para $\mathcal{T}$.

ii) Mostre que uma aplicação $g : Y \to A$ é contínua relativamente a $\mathcal{T}$ se, e somente se, cada aplicação $f_\alpha \circ g$ é contínua.

iv) Seja $f : A \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ uma função dada por $f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$. Denote por Z o subespaço $f(A)$ do produto cartesiano $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Mostre que a imagem direta por f de cada elemento de $\mathcal{T}$ é um aberto de Z.