

Departamento de Matematica

Lista 5 - Variavel Complexa 1

1. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.
2. Mostre que, se $|\alpha| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0$.
3. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[i + \left(\frac{2+3i}{5} \right)^n \right]$.
4. Existe o seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[i + \left(\frac{2+3i}{5} \right)^n \right]$?
5. Calcule

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(ni)}{ni} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ni}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^i]{ni}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^i]{n}. \end{array}$$

6. Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ diga se cada uma das sequências converge ou diverge e, se convergir, determine o limite:

$$\alpha^n, \quad n\alpha^n, \quad \frac{\alpha^n}{n}, \quad \sqrt{n} (\sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n})$$

7. Suponha que $|\alpha| < |\beta| < 1$. Existe o limite $\sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$?
8. Suponha que $1 < |\alpha| = |\beta|$. Mostre que, se a sequência $\alpha^n - \beta^n$ é limitada, então $\alpha = \beta$.
9. Existem os seguintes limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi i) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} ni \operatorname{sen} \left(\frac{\pi i}{n} \right) ?$$

10. Mostre que as séries abaixo divergem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ni} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+i}.$$

11. Determine o raio de convergência de cada uma das séries abaixo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3i)^n} (z-1)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{11^{n+2i}}{n!} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2i}}{2^n} (z-\pi)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(4+3i)^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n}{(5+i)^n} (z+2)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(ni)} z^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{ni}} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{3i}} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{ni}}{i(2n)!} z^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} z^n,$$