Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 6 - Topologia Geral.

1- Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ defina $d'(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$. Mostre que d' é uma métrica e além do mais que a topologia induzida por ela coincide com a topologia produto. Para $n = 2$, faça um esboço de um elemento genérico da base da topologia induzida por esta métrica.

2- Fixe $p \geqslant 1$ e para cada par $x, y \in \mathbb{R}^n$ defina

$$d'_p(x,y) = \Big[|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Assuma que d'_p define uma métrica em $\mathbb{R}^n$. Prove que ela induz a topologia usual em $\mathbb{R}^n$. Mostre que para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$, existe $\lim_{p\to\infty} d'_p(x,y) \equiv d_\infty(x,y)$. Conclua que d_∞ coincide com a métrica induzida pela norma do máximo.

3- Mostre que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com a topologia induzida pela ordem lexicográfica é um espaço topológico metrizável.

4- Seja (X, d) um espaço métrico. Considere X como um espaço topológico com a topologia induzida pela métrica d e $X \times X$ um espaço topológico munido da topologia produto. Mostre que a função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ é contínua.

5- Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e considere $X \times X$ como um espaço topológico munido da topologia produto. Suponha que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ seja um métrica em X. Mostre que se d é uma função contínua então a topologia $\mathcal{T}$ é mais fina que a topologia induzida por d.

> *Em outras palavras, se d é uma métrica em X então a topologia induzida por d é a topologia mais grossa para o qual d é uma função contínua.*

6- Considere as topologias produto, uniforme e "box" em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

i) Em quais destas topologias as seguintes funções de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ são contínuas ?

$$f(t) = (t, 2t, 3t, \ldots)$$
$$g(t) = (t, t, t, \ldots)$$
$$h(t) = (t, t/2, t/3, \ldots).$$

ii) Em quais destas topologias as seguintes sequências convergem ?

$$\begin{array}{ll}
w_1 = (1,1,1,1,\ldots) & x_1 = (1,1,1,1,\ldots) \\
w_2 = (0,2,2,2,\ldots) & x_2 = (0,1/2,1/2,1/2,\ldots) \\
w_3 = (0,0,3,3,\ldots) & x_3 = (0,0,1/3,1/3,\ldots) \\
\quad\ldots & \quad\ldots \\
y_1 = (1,0,0,0,\ldots) & z_1 = (1,1,0,0,\ldots) \\
y_2 = (1/2,1/2,0,0\ldots) & z_2 = (1/2,1/2,0,0,\ldots) \\
y_3 = (1/3,1/3,1/3,0\ldots) & z_3 = (1/3,1/3,0,0,\ldots) \\
\quad\ldots & \quad\ldots
\end{array}$$

7- Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dado por

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0 = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_i \neq 0 \text{ para no máximo uma quantidade finita de índices } i\}$$

Qual é o fecho de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0$ na topologia uniforme ?

8- Seja $\bar{\rho}$ a métrica uniforme em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dados $\varepsilon > 0$ e $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ seja

$$U(x, \varepsilon) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \ldots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon) \times \ldots$$

i) Mostre que $U(x, \varepsilon)$ não é igual a bola $B_{\bar{\rho}}(x, \varepsilon)$;

ii) Mostre que $U(x, \varepsilon)$ nem sequer é aberto na topologia uniforme;

iii) Mostre que $B_{\bar{\rho}}(x, \varepsilon) = \displaystyle\bigcup_{\delta < \varepsilon} U(x, \delta)$.

9- Considere a aplicação $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$h\big((x_1, x_2, \ldots)\big) = (a_1 x_1 + b_1,\ a_2 x_2 + b_2, \ldots).$$

Suponha que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ está munido da topologia uniforme. Sobre quais condições nos números a_i's e b_i's h é contínua ? Homeomorfismo ?

10- Denote por $\ell^2(\mathbb{N})$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ consistindo de todas as sequências de quadrado somável, isto é, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2 \iff \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^2 < \infty$. Assuma que a fórmula

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

define uma métrica em $\ell^2(\mathbb{N})$. Em $\ell^2(\mathbb{N})$ podemos induzir as topologias, produto, uniforme e "box" de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Temos também a topologia induzida por d, que vamos chamar de topologia-ℓ^2.

i) Mostre que em $\ell^2(\mathbb{N})$ temos

$$\text{topologia uniforme} \quad \subset \quad \text{topologia-}\ell^2 \quad \subset \quad \text{topologia “box”}$$

ii) Mostre que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0 \subset \ell^2(\mathbb{N})$. Mostre que as quatro topologias que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_0$ herda de $\ell^2(\mathbb{N})$ são distintas.

iii) Mostre que o *cubo de Hilbert*, denotado por H e dado por

$$H \equiv \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} [0, 1/n]$$

está contido em $\ell^2(\mathbb{N})$. Compare as quatro topologias que H herda de $\ell^2(\mathbb{N})$.

11- Neste exercício apresentamos um roteiro para mostrar que a métrica euclidiana d em $\mathbb{R}^n$ é de fato uma métrica. Para isto vamos considerar em $\mathbb{R}^n$ sua estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde a soma de dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ é dada por $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é dada por $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$ e produto interno entre dois vetores de $\mathbb{R}^n$ é definido por $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. O roteiro é composto dos quatro passos descritos abaixo:

i) Mostre que $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

ii) Mostre que $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$
(dica: se $x, y \neq 0$ considere $\alpha = 1/\|x\|$ e $\beta = 1/\|y\|$ e use o fato que $\|\alpha x \pm \beta y\| \geqslant 0$);

iii) Mostre que $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
(dica: calcule $\langle x + y, x + y\rangle$ e aplique o resultado do item anterior);

iv) Conclua que d é uma métrica.

12- Neste exercício, divido em três partes, vamos mostrar que a expressão $d(x, y)$ que aparece no Exercício 10, define uma função de $\ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$ e que d é de fato uma métrica em $\ell^2(\mathbb{N})$.

i) Mostre que se $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot y_i| < \infty$;
(dica: use o segundo item do Ex. 11 para mostrar que as somas parciais são limitadas)

ii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que se $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$ então $x + y$ e $\alpha \cdot x$ estão em $\ell^2(\mathbb{N})$.

iii) Mostre que $d(x, y) = \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ é uma métrica bem definida em $\ell^2(\mathbb{N})$.

13- Mostre que se d é uma métrica em X então

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

é uma métrica limitada em X que induz a mesma topologia que d.
(dica: considere a função $f(x) = x/(1 + x)$ para $x > 0$, e aplique o Teorema do Valor Médio para concluir que $f(a + b) - f(b) \leqslant f(a)$.)

14- Considere o produto cartesiano $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mostre que para todo par $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a fórmula

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

define uma métrica limitada em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

15- Considere o produto cartesiano $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Defina a função $d' : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ por $d'(x,x) = 0$ para todo $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e para $x \neq y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ defina

$$d'(x,y) = \frac{1}{2^n}, \quad \text{onde } n = \min\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq y_i\}.$$

Mostre que d' é uma métrica limitada em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

16- Considerando as métricas d e d' definidas nos Exercícios 14 e 15 mostre que existem constantes positivas K e M tais que para todo $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, temos

$$K \cdot d'(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant M \cdot d'(x,y).$$

17- Seja d' a métrica definida no Exercício 15. Mostre que coleção de todas as bolas abertas $B_{d'}(x, \varepsilon)$, onde $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $\varepsilon > 0$ é uma subbase da topologia produto (daqui em diante, considere $\{0,1\}$ como espaço topológico com a topologia discreta). Conclua que a métrica d' induz a topologia produto em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

18- Usando os Exercícios 16 e 17 conclua que a métrica d definida no Exercício 14 induz a topologia produto em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Tente fazer uma prova direta deste fato.

19- Seja d' a métrica definida Exercício 15, dados quaisquer $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $\varepsilon > 0$ mostre que bola $B_{d'}(x, \varepsilon)$ é ao mesmo tempo um aberto e fechado da topologia produto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

20- Mostre que o conjunto formado por um ponto no espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ não é um conjunto aberto na topologia produto. Conclua que a topologia produto não é a topologia discreta.
(Observe que cada fator $\{0,1\}$ está munido da topologia discreta, mas mesmo assim a topologia produto não é a topologia discreta! Note porém que obtemos a topologia discreta se o número de fatores no produto cartesiano é finito.)

21- Mostre que o shift $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, dado por $\sigma(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ é uma aplicação contínua. O shift é uma aplicação aberta ? Fechada ? Homeomorfismo ?

22- Seja $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ o shift definido no Exercício 21. Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ denotamos por $\sigma^{(n)} \equiv \sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma$, a composição sucessiva da aplicação σ com si mesma n vezes. A órbita de um ponto $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ pelo shift é definida como sendo o conjunto $\mathcal{O}(x) \equiv \{\sigma^{(n)}(x) : n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{x\}$. Determine explicitamente um ponto $x^* \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tal que o fecho da orbita de x^*, pelo shift, é todo o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, isto é,

$$\overline{\mathcal{O}(x^*)} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$