# Departamento de Matematica

Lista 6 - Variavel Complexa 1

1. Mostre usando o produto de séries que se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ então

$$\frac{1}{1-z} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + \ldots + a_n) z^n.$$

2. Mostre que

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z+z^2}{(1-z)^2}.$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z+4z^2+z^3}{(1-z)^4}.$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n = \frac{z+11z^2+11z^3+z^4}{(1-z)^5}.$

3. Seja $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$ um polinômio e considere a sequência $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Então

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n) z^n$$

é uma função racional.

**Dica:** comece considerando monômios, isto é, séries da forma $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$. Para estes casos inspiri-se no exercício anterior.

4. Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ na qual os coeficientes se repetem ciclicamente, $a_{n+k} = a_n$, onde $n$ é qualquer e $k$ um inteiro positivo fixado. Calcule seu raio de convergência e sua soma.

5. Seja
$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \; z^n, \qquad \text{onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$
Mostre que $f$ converge para todo $|z| < 1$ e que $f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}$. Conclua daí que $[(1+z)^{\alpha} f(z)]' = 0$ e que $f(z) = (1+z)^{\alpha}$. Este resultado pode ser generalizado para $\alpha \in \mathbb{C}$ ?

6. Use os resultados do apêndice sobre o raio de convergência, do livro texto, para calcular o raio de convergência das seguintes séries:
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}.$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} z^{n^2}.$
   - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^{n^2}.$