Universidade de Brasília

Departamento de Matemática

Lista 7 - Topologia Geral.

1- Seja $A \subset X$. Se d é uma métrica para a topologia de X, mostre que $d|A \times A$ é uma métrica para a topologia subespaço induzida em A.

2- Sejam X e Y espaços métricos com métricas d_X e d_Y, respectivamente. Uma função $f : X \to Y$ é chamada de isometria se para todo par de pontos $x, y \in X$ temos $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$. Mostre que toda isometria é uma imersão.

3- Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ seja (X_n, d_n) um espaço métrico.

i) Mostre que $\rho(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), \ldots d_n(x_n, y_n)\}$ é uma métrica em $X_1 \times \ldots \times X_n$.

ii) Seja $\bar{d}_n = \min\{d_n, 1\}$. Mostre que $D(x, y) = \sup \left\{ \dfrac{\bar{d}_n(x, y)}{n} \right\}$ é uma métrica em $\prod_{n \in \mathbb{Z}_+} X_n$

4- Seja X um conjunto e $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções. Seja $\bar{\rho}$ a métrica uniforme em $\mathbb{R}^X$. Mostre que a sequência (f_n) converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se, e somente se, f_n converge para f como elementos do espaço métrico $(\mathbb{R}^X, \bar{\rho})$.

5- Seja X um espaço topológico e Y um espaço métrico. Seja $f_n : X \to Y$ uma sequência de funções contínuas. Seja x_n uma sequência de pontos de X que converge para x. Mostre que se a sequência (f_n) converge uniformemente para f então $(f_n(x_n))$ converge para $f(x)$.

6- Considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{1}{n^3[x-1/n]^2+1}$.

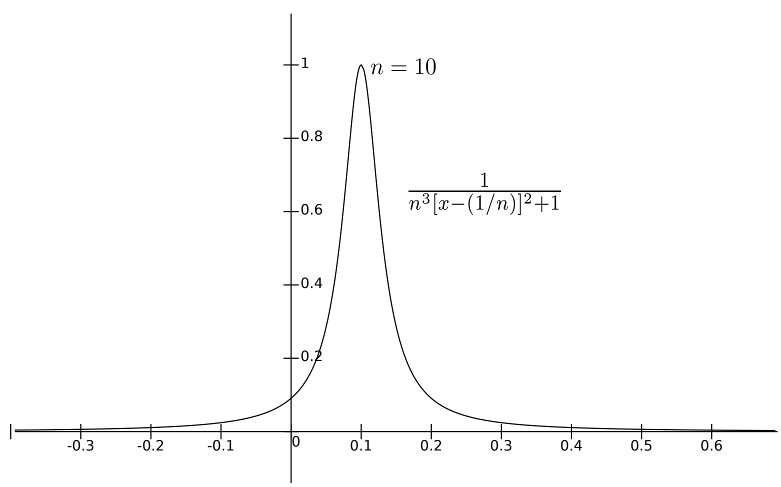

Figura 1: Esboço do gráfico de f_{10}.

Mostre que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e que esta convergência não é uniforme.

7- Usando a formulação de continuidade por fechados, mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ são fechados:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\};$$

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\};$$

$$\overline{B(0,1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\};$$

8- Seja $p : X \to Y$ uma aplicação contínua. Se existe uma aplicação contínua $f : Y \to X$ tal que $p \circ f = Id_Y$ (Id_Y é a identidade em Y) mostre que p é um mapa quociente.

9- Se $A \subset X$, uma **retração** de X em A é uma aplicação contínua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Mostre que uma retração é um mapa quociente.

10- Sejam $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a projeção na primeira coordenada e A o subespaço de $\mathbb{R}^2$ consistindo de todos os pontos (x, y) tais que $x \geqslant 0$ ou $y = 0$ (ou ambos). Seja $q : A \to \mathbb{R}$ a restrição de π_1 ao conjunto A. Mostre que q é um mapa quociente que não é nem aberto nem fechado.

11- Defina uma relação de equivalência no plano $X = \mathbb{R}^2$ da seguinte maneira: $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ se $x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$. Seja X^* o espaço quociente correspondente a esta relação de equivalência. Este espaço é homeomorfo a algum espaço familiar, qual ?
(Dica: considere a função $g(x, y) = x + y^2$).

12- Como no exercício anterior, vamos considerar uma relação de equivalência no plano $X = \mathbb{R}^2$ desta vez dada por $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ se $x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$. Seja X^* o espaço quociente correspondente a esta relação de equivalência. A qual espaço familiar X^* é homeomorfo ?

13- Mostre que aplicação $\pi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$, dada abaixo é contínua

$$\pi((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots$$

14- Sejam $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a aplicação shift definida na Lista 6 e $f : [0, 1] \to [0, 1]$ a função dada por $f(x) = 2x$ (mod 1), com $f(1/2) = 0$ e $f(1) = 0$.

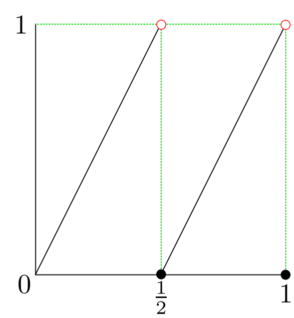

Figura 2: Esboço do gráfico da aplicação $f(x) = 2x$ (mod 1).

i) Encontre os pontos fixos de σ, isto é, o conjunto $\text{fix}(\sigma) \equiv \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \sigma(x) = x)\}$.

ii) Considere a aplicação π definida no Exercício 13. Use o conjunto $\text{fix}(\sigma)$ para mostrar que o seguinte diagrama **NÃO** é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \big\downarrow \pi & & \big\downarrow \pi \\ [0,1] & \xrightarrow{f} & [0,1] \end{array}$$

15- Seja $X = [0,1]$ considere a relação de equivalência "$\sim$" em X dada por:

$$x \sim x' \quad \text{se} \quad \begin{cases} x = x', \text{ou} \\ x = 0 \text{ e } x' = 1, \text{ou} \\ x' = 0 \text{ e } x = 1. \end{cases}$$

Seja X^* o espaço quociente, definido pela relação de equivalência $\sim$ e pelo mapa quociente $p : X \to X^*$, que leva cada ponto em sua classe. Assuma que a aplicação $g : [0,1] \to S^1$, dada por $g(x) = \exp(2\pi i x)$ é um mapa quociente (vamos provar isto mais a frente usando compacidade). Mostre que X^* é homeomorfo a S^1.
(dica: use os resultados apresentados em sala de aula para completar o diagrama.)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^* \arrow[r, "??"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

16- Seja σ o shift no espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Defina a aplicação $\pi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to S^1$ por

$$\pi((x_1, x_2, x_3 \ldots)) = \exp\left[2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right].$$

Se $f : S^1 \to S^1$ é dada por $f(z) = z^2$. Mostre que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \big\downarrow \pi & & \big\downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

17- Seja $f : X \to X$ uma função e denote por $f^{(n)}$ a n-ésima iterada de f. Dizemos que $x_0 \in X$ é um ponto periódico para f se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 = f^{(n_0)}(x_0)$. Denotamos por $\mathrm{per}(f)$ o conjunto de todos seus pontos periódicos.

i) Considere $X = S^1$ e $f(z) = z^2$. Mostre que o fecho de $\mathrm{per}(f)$ é todo S^1.
(dica: há basicamente duas maneiras de fazer isto: ou você resolve uma equação polinomial (simples) de grau $2n$, ou usa o Exercício 16 junto com a seguinte observação; pontos periódicos de σ são levados por π em pontos periódicos de f).

ii) O conjunto dos pontos pré-periódicos para f é definido como sendo conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{(-n)}(\mathrm{per}(f)).$$

Mostre que existem infinitos pontos pré-periódicos para $f(z) = z^2$ que não são periódicos.
(dica: use a dica do item anterior pensando em pré-periódicos ao invés de periódicos).