# Universidade de Brasília
## Departamento de Matemática
## Lista 8 - Topologia Geral.

1- Mostre que nenhum dos seguintes espaços são homeomorfos um ao outro: $(0,1), (0,1]$ e $[0,1]$. (dica: o que acontece quando removemos alguns pontos destes espaços ?)

2- Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ imersões. Mostre que, sem hipóteses adicionais, não é possível concluir que $X$ é homeomorfo a $Y$.

3- Mostre que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$ não são homeomorfos se $n > 1$.

4- Seja $f : S^1 \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Mostre que existe pelo menos um ponto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.

5- Mostre que toda aplicação contínua $f : [0,1] \to [0,1]$ possui pelo menos um ponto fixo. O que pode ser dito se substituímos $[0,1]$ por $[0,1)$ ou $(0,1)$ ?

6- Seja $X$ um espaço ordenado com a topologia da ordem. Mostre que se $X$ é conexo então $X$ é um *continuum linear*.

7- Mostre que se $X$ é um conjunto bem-ordenado, então $X \times [0,1)$ na ordem do dicionário é um *continuum linear*.

8- Sejam $X$ e $Y$ conjuntos ordenados munidos da topologia da ordem. Mostre que se $f : X \to Y$ é uma função sobrejetiva que preserva ordem, então $f$ é um homeomorfismo.

9- Seja $f : \overline{\mathbb{R}_+} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$. Mostre que $f$ é sobrejetiva e que preserva ordem. Conclua que sua função inversa, i.e., a raíz $n$-ésima é uma função contínua.

10- O produto cartesiano de dois espaços conexos por caminho é conexo por caminho ?

11- Suponha que $A \subset X$ e que $A$ é conexo por caminho. É verdade que $\overline{A}$ é conexo por caminho ?

12- Se $f : X \to Y$ é contínua e $X$ é conexo por caminho, então podemos concluir que $f(X)$ é conexo por caminho ?

13- Se $\{A_\alpha\}$ é uma coleção de conjuntos conexos por caminho de um espaço $X$ e a interseção $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$, então podemos afirmar que $\bigcup A_\alpha$ é necessariamente conexo por caminho ?

14- Assuma que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^2$ é enumerável então $\mathbb{R}^2 - A$ é conexo por caminho.
(dica: olhe para a quantidade de retas que passam por um ponto de $\mathbb{R}^2$)

15- Mostre que se $U$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}^2$, então $U$ é conexo por caminho. (dica: mostre que o conjunto de pontos que podem ser ligados por um caminho a um ponto $x_0 \in U$ fixado, é aberto e fechado em $U$.)

16- Se $A$ é um subespaço conexo de $X$, então $int(A)$ e $\partial A \equiv \overline{A} - int(A)$ são conexos ? É válida a recíproca ?

17- Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ duas topologias em um conjunto $X$. Suponha que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. A compacidade de $X$ em uma destas topologias implica em compacidade na outra ?

18- Mostre que se $X$ é um espaço de Hausdorff compacto com respeito as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$, então ou ambas topologias não são comparáveis ou são iguais.

19- Mostre que na topologia do complemento finito em $\mathbb{R}$ todo subespaço é compacto.

20- Se $\mathbb{R}$ tem a topologia consistindo de todos os conjuntos $A$ tais que $\mathbb{R} - A$ é enumerável ou todo $\mathbb{R}$ o conjunto $[0, 1]$ é compacto ?

21- Mostre que uma união finita de subespaços compactos de $X$ é compacto.

22- Mostre que todo subespaço compacto de um espaço métrico é limitado e fechado. Encontre um espaço no qual nem todo limitado e fechado é compacto.

23- Sejam $A$ e $B$ dois compactos disjuntos de um espaço de Hausdorff $X$. Mostre que existem dois abertos disjuntos $U$ e $V$ contendo $A$ e $B$, respectivamente.

24- Seja $X$ um espaço compacto e $Y$ Hausdorff. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua, então $f$ é uma aplicação fechada.

25- Mostre que se $Y$ é compacto, então a projeção $\pi_1 : X \times Y \to X$ é uma aplicação fechada.

26- Demonstre o seguinte teorema. Seja $f : X \to Y$, onde $Y$ é um espaço de Hausdorff compacto. Então $f$ é contínua se, e somente se, o gráfico de $f$

$$G_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

é fechado em $X \times Y$.
(dica: Se $G_f$ e $V$ é uma vizinhança de $f(x_0)$ então a interseção de $G_f$ e $X \times (Y - V)$ é fechado. Aplique o Exercício 25.)