Departamento de Matematica

Lista 9 - Variável Complexa 1

1. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e suponha que existem $M \geq 0, R > 0$ e $n \geq 1$ tais que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| > R$. Mostre que f é um polinômio de grau menor ou igual que n.

2. Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio. Suponha que exista um ponto $a \in U$ tal que $|f(a)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in U$. Mostre que $f(a) = 0$ ou f é uma função constante.

3. Seja $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $|f(z)| \leq 1/(1 - |z|)$. Mostre que se $n \geq 1$, então
$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e.$$

4. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, γ uma curva de Jordan suave por partes que delimita uma região contida em U e z um ponto interior a esta região. Se K é o máximo de $|f|$ ao longo de γ e δ é a distância mínima de z a γ, então
$$|f(z)| \leq K\left(\frac{\ell(\gamma)}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$
Use esta desigualdade para dar uma outra demonstração do princípio do módulo máximo.

5. Mostre a igualdade de Parseval: se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ é uma série de potências com raio de convergência $R > 0$ e se $|z - z_0| = r < R$ então
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$
Use este fato para apresentar mais uma demostração alternativa do princípio do módulo máximo.

6. Demonstre a regra de l'Hospital para funções holomorfas: se $f(z_0) = 0 = g(z_0)$, então
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$
Se por acaso ocorrer que $f'(z_0) = 0 = g'(z_0)$, então
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f''(z_0)}{g''(z_0)}$$
e assim sucessivamente.

7. *Princípio da Identidade.* Sejam $U \subset \mathbb{C}$ domínio e $f, g : U \to \mathbb{C}$ funções holomorfas. Suponha que exista uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em U tal que $z_n \to a \in U$. Mostre que se $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U$.