Departamento de Matematica

Logaritmo Complexo - Leitura Complementar e Exercícios

Variavel Complexa 1

Nestas nota curta apresentamos uma maneira alternativa de definir o logaritmo complexo. Vamos inicialmente definir de maneira precisa o conceito de ramo e em seguida, definir *um ramo do logaritmo*. No segue usaremos a notação $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e quando conveniente a notação $\exp(z)$ para denotar a função exponencial complexa.

Seja $z \in \mathbb{C}^*$. Já sabemos que este número complexo pode ser representado em sua forma polar como

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = |z|e^{i\theta}.$$

Observe que se $\theta' = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, então $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$. Dizemos que θ é um argumento de $z \in \mathbb{C}^*$, se $z/|z| = e^{i\theta}$.

Definição 1. *Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ um aberto. Dizemos que uma* **função contínua** $f : U \to \mathbb{R}$ *é um ramo do argumento em U, se para todo $z \in U$ tem-se*

$$\frac{z}{|z|} = e^{if(z)}. \tag{1}$$

Exercício 1. *Mostre que se $f : U \to \mathbb{C}$ é um ramo do argumento e $k \in \mathbb{Z}$, então $f + 2k\pi$ também é um ramo do argumento em U.*

Definição 2. *Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ um aberto. Dizemos que uma função contínua $g : U \to \mathbb{C}$ é um ramo do logaritmo em U, se para todo $z \in U$ tem-se* $\exp(g(z)) = z$.

Observe que se g é um ramo do logaritmo e $k \in \mathbb{Z}$, então $g + 2k\pi$ é também um ramo do logaritmo. Por esta razão não podemos esperar que $g(\exp(w)) = w$, mesmo que $\exp(w) \in U$!

A seguinte proposição relaciona os ramos do logaritmo e do argumento.

Proposição 3. *Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ um aberto. Então existe um ramo do logaritmo definido em U, se e somente se, existe um ramo do argumento definido em U.*

Prova : Suponha inicialmente que temos em U, bem definido, um ramo do logaritmo que será denotado por $g : U \to \mathbb{C}$. Pondo $u(z) = \mathrm{Re}(g(z))$ e $v(z) = \mathrm{Im}(g(z))$, temos claramente a seguinte igualdade $g(z) = u(z) + iv(z)$. Da Definição 2 segue que

$$z = \exp(u(z) + iv(z)) = \exp(u(z)) \cdot \exp(iv(z)) \tag{2}$$

Tomando o módulo em ambos os lados da igualdade acima, já que $|\exp(iv(z))| = 1$, podemos concluir das propriedades do módulo que $\exp(u(z)) = |z|$. Mas este fato juntamente com (2) implica imediatamente que

$$\exp(iv(z)) = \frac{z}{|z|}.$$

Como a continuidade de g implica na continuidade de v temos da identidade acima que $v(z)$ é um ramo do argumento em U. Reciprocamente, se temos definido em U um ramo do argumento $f : U \to \mathbb{R}$ então obtemos um ramo do logaritmo considerando a função $g : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \ln|z| + if(z).$$

De fato, como para todo $z \in U$ temos $z/|z| = e^{if(z)}$ então podemos afirmar que

$$\exp(g(z)) = \exp(\ln|z| + if(z)) = |z| \cdot e^{if(z)} = z,$$

verificando que g é um ramo do logaritmo em U. $\square$

Uma consequência imediata do teorema acima é o seguinte corolário:

Corolário 4. *Se $g : U \to \mathbb{C}$ é um ramo do logaritmo, então existe um ramo do argumento $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $g(z) = \ln|z| + if(z)$.*

Podemos mostrar também que é válido o seguinte teorema, cuja a demonstração foi feita em sala de aula e pode ser encontrada na referências [3,4,5] do programa do curso `http://www.mat.unb.br/cioletti/Ensino/Programa_VC1_1-2013.pdf`

Teorema 5. *Se $g : U \to \mathbb{C}$ é um ramo do logaritmo, então g é holomorfa e além disto $g'(z) = 1/z$ para todo $z \in U$.*

Corolário 6. *Dois ramos do logaritmo, definidos em um mesmo subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}^*$, diferem por uma constante da forma $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Se o valor deles é o mesmo em algum ponto deste aberto então eles são idênticos.*

Prova. Sejam $g_1, g_2 : U \subset \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ramos do logaritmo definidos no domínio U. Pelo Teorema 5 sabemos que

$$g_1'(z) = g_2'(z) = \frac{1}{z}.$$

Desta igualdade concluímos que $g_1'(z) - g_2'(z) = 0$, para todo $z \in U$. Usando o fato de que U é conexo podemos mostrar $g_1(z) - g_2(z) \equiv c$, para todo $z \in U$, onde c é uma constante. Mas como g_1 e g_2 são ramos do logaritmo temos que

$$z = \exp(g_2(z)) = \exp(g_1(z) + c) = \exp(g_1(z)) \cdot \exp(c) = \exp(c) \cdot z$$

para todo $z \in U$. Portanto $e^c = 1$ e daí segue que $c = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por outro lado, se existir algum ponto onde este ramos do logaritmo coincidem, isto é, se existe $z_0 \in U$ tal que $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ então temos imediatamente que $c = 0$ e logo $g_1 \equiv g_2$ em U. $\square$