

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

**Localização de Zeros de Somas Parciais de
 e^z com os Métodos de Problemas de
Riemann-Hilbert**

por

Élis Gardel da Costa Mesquita

Orientador: Leandro Martins Cioletti

Brasília

2011

*Aos meus pais
e irmãos*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, por estar sempre presente. Aos meus pais, Manoel e Deusamar, pelo incentivo e por me fazerem acreditar que os sonhos são possíveis. Agradeço também ao senhor Jaime Gomes de Oliveira, pelos conselhos e palavras de encorajamento. Também sou grato ao Prof. Leandro Martins Cioletti por todo o esforço despendido durante a orientação e a confiança depositada em mim. Agradeço ao professor Kenneth McLaughlin pela oportunidade e o profissionalismo com o qual conduziu parte da orientação. Finalmente, gostaria de agradecer aos colegas do curso pela descontração e os momentos de confraternização que certamente ficaram pra sempre na memória.

Ao CNPq/CAPES pelo apoio financeiro concedido durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a localização dos zeros dos polinômios de Taylor, $p_{n-1}(nz)$, da função exponencial. Nosso estudo começa com uma representação de $p_{n-1}(nz)$ em termos de uma integral da forma $p_{n-1}(nz) = \int_{\gamma} \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} ds$. A essa integral aplicamos os métodos de análise assintótica e obtemos expansões uniformes para tais integrais usando o método de Riemann-Hilbert, em vizinhanças dos pontos críticos de ϕ , e para para os demais pontos a análise de Descida Mais Íngreme.

Palavras-chave: Zeros de polinômios de Taylor, curva de Szegő, Problema de Riemann-Hilbert.

Abstract

In this work we studied the location of zeros of Taylor polynomials $p_{n-1}(nz)$ of the exponential function. Our study begins with a representation of $p_{n-1}(nz)$ in terms of an integral of the form $p_{n-1}(nz) = \int_{\gamma} \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} ds$. In this integral we apply the methods of asymptotic analysis and we obtain uniform expansions for such integrals using Riemann-Hilbert method in the neighborhoods of critical points of ϕ and to other points the analysis of Steepest Descent is considered.

Keywords: Zeros of Taylor polynomials, Szegő curve, Riemann-Hilbert problems

Sumário

1	Preliminares	11
1.1	Conceitos Básicos de Análise Complexa	11
1.1.1	Arcos, Curvas e Contornos	11
1.2	Resultados Básicos	12
1.3	Teorema de Resíduos	17
2	Representação Integral de $p_n(z)$	20
2.1	Representação Integral de Polinômios de Taylor de Funções Analíticas . . .	21
2.2	Reescalando $p_n(z)$	23
2.3	Representação Integral dos Polinômios de Taylor da Função Exponencial Reescalados	25
3	Métodos de Análise Assintótica	29
3.1	Expansões assintóticas	29
3.2	Método de Laplace	34
3.3	Método da Descida mais Íngreme	39
3.3.1	Caminhos de Descida Mais Íngreme	41
4	Análise Assintótica de $F_n(z)$ Longe do Ponto Crítico	43
4.1	Análise de G_n numa vizinhança de $z = 1$	46
4.2	Expansão Assintótica de $F_n(z)$, $z \notin U_\delta(1)$	53

5	Análise de Riemann-Hilbert	56
5.1	Caracterização de um Problema de Riemann-Hilbert escalar (RHP)	56
5.2	Expansão assintótica de $F_n(z)$, $z \in U_\delta(1)$	60
6	Localizando Zeros	70
6.1	Zeros longe do ponto crítico.	71
6.2	Zeros perto do ponto crítico.	72

Introdução

Durante os últimos quinze anos e em grande parte devido ao trabalho inovador de Deift e Zhou,[6] , [7], o problema de Riemann-Hilbert se tornou uma ferramenta poderosa na análise assintótica com aplicações em vários campos, tais como a teoria de espalhamento inverso, EDP's integráveis, polinômios ortogonais, mecânica estatística e teoria de matrizes aleatórias.

Com este trabalho, iremos estudar mais um item, que foi adicionado recentemente a esta lista de aplicações, veja [9]. Este item é o estudo do comportamento assintótico dos zeros de polinômios de Taylor de uma classe de funções inteiras.

Embora esse método funcione, a princípio, para uma grande classe de funções inteiras, vamos restringir nosso estudo ao caso clássico de polinômios de Taylor de e^z , que foi objeto de estudo de grandes matemáticos.

Denotamos por

$$p_n(z) := 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

a soma parcial da série exponencial. O problema de descrever a distribuição assintótica dos zeros de p_n foi proposto e resolvido por Szegö em seu artigo clássico [13]. Ele provou que os zeros de p_n , divididos por n , convergem no limite, quando $n \rightarrow \infty$, a uma curva a qual é denotada por D_∞ , chamada curva de Szegö, que consiste de todos os números complexos que satisfazem a equação $|ze^{1-z}| = 1$ e $|z| \leq 1$. A curva D_∞ juntamente com os zeros de p_n reescalados são ilustrados na Figura 1 abaixo, para $n = 20$ e $n = 80$.

Além disso, Szegö também determinou a distribuição limite dos zeros reescalados em D_∞ .

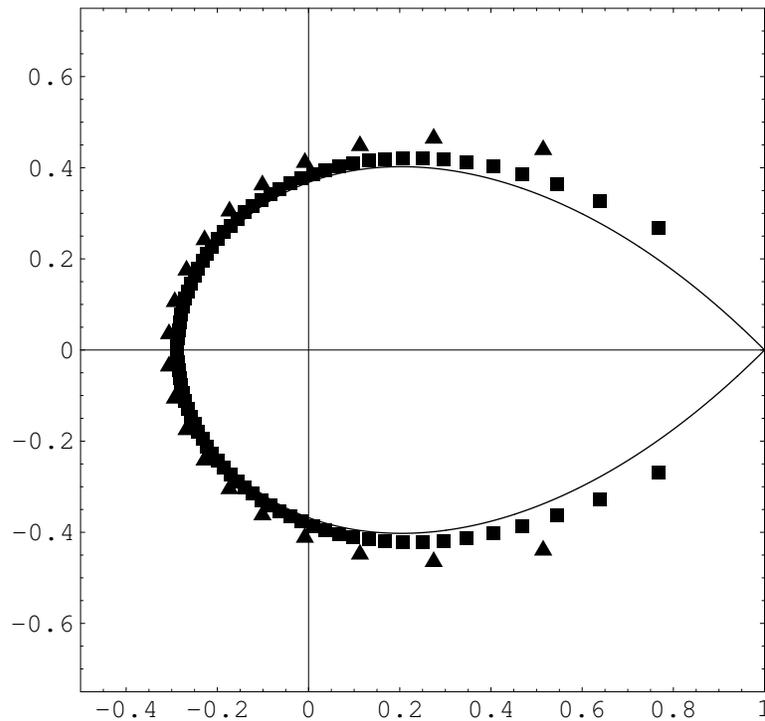


Figura 1: Curva de Szegő (curva sólida), zeros dos polinômios reescalados p_{20} (triângulos) e p_{80} (quadrados).

Um primeiro resultado, apresentando um erro limitado na distância entre a curva de Szegő e os zeros de $p_n(nz)$, foi estabelecido por Buckholtz [4], que mostrou que eles estão localizados no exterior de D_∞ a uma distância de, no máximo, $2e/\sqrt{n}$. A distância de um zero z^* de $p_n(nz)$ a D_∞ é dado, de maneira usual, pelo ínfimo da distância entre z^* e todos os pontos da curva de Szegő.

Posteriormente foram obtidos mais detalhes assintóticos de $p_n(nz)$. Uma grande barreira na análise apresentada nos trabalhos citados acima é a obtenção de boas estimativas assintóticas do erro numa vizinhança de $z_0 = 1$. Este é um ponto crítico, onde há uma mudança no comportamento assintótico dos zeros de $p_n(nz)$ próximos de z_0 .

Foi mostrado por Newman e Rivlin [11], que em vizinhanças de z_0 de tamanho $O(1/\sqrt{n})$ o polinômio reescalado $p_n(n + w\sqrt{n})$ pode ser assintoticamente expresso em

termos da função erro complementar, cuja notação clássica é $\operatorname{erfc}(z)$.

Carpenter, Varga, e Waldvogel [5], (veja também [15] e [14] para uma discussão mais detalhada sobre zeros das somas parciais de e^z), em seguida, apresentaram uma expansão assintótica para $p_n(nz)$, em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Estes resultados foram utilizados em [5] para obter limites inferiores e superiores para a distância entre os zeros e a curva de Szegő. Observamos que até o trabalho recente de Bleher e Mallison [3] não haviam expansões assintóticas uniformes para $p_n(nz)$ e seus zeros em vizinhanças, de tamanhos fixos, do ponto crítico z_0 .

Em uma direção diferente e utilizando métodos da teoria do potencial logarítmico Andrievskii, Carpenter e Varga [2] estenderam recentemente os resultados de Szegő [13] sobre a distribuição angular dos zeros provando erros uniformemente limitados para as regiões que incluem z_0 .

Em [9] encontramos o Teorema 5.2 que fornece uma expansão assintótica, calculada explicitamente perto de z_0 , para uma quantidade $F_n(z)$ relacionada com $p_{n-1}(nz)$, veja (2.9) e (2.10), abaixo. Esta expansão assintótica de F_n tem erro uniformemente limitado para z contido em alguma região V , onde todas as raízes de $p_{n-1}(nz)$ estão localizadas.

Seguindo de perto [9], iremos escrever uma representação integral para $p_n(z)$ e $F_n(z)$. Como veremos esta última pode ser reconhecida como a transformada de Cauchy da função $e^{n\phi(z)}$, onde $\phi(z)$ é uma função analítica que será determinada a frente. Em seguida, é feita a análise assintótica dessa integral, inicialmente usando o *Método da Descida Mais Íngreme*. Através desse método são obtidas representações assintóticas, quando $n \rightarrow \infty$, de $F_n(z)$, uniformemente para z fora de uma vizinhança de $z_0 = 1$. Depois, lançamos mão da *Análise de Riemann-Hilbert* para obter uma representação assintótica para $F_n(z)$, cujo o erro é limitado uniformemente para z numa vizinhança de $z_0 = 1$. Por fim, são enunciados alguns dos resultados mais recentes sobre as expansões assintóticas dos zeros reescalados de $p_n(z)$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Conceitos Básicos de Análise Complexa

Por questão de completeza e para fixarmos a notação, expomos neste capítulo alguns dos resultados básicos da teoria de Cauchy. Este capítulo tem uma forma de relação e pode ser usado apenas para consulta, sem prejuízo das ideias e conceitos expostos mais adiante.

1.1.1 Arcos, Curvas e Contornos

Definição 1.1. *Um arco, ou também caminho, denota uma função a valores complexa de uma variável real, contínua, definida num intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Dessa maneira, arcos são definidos em termos de uma representação paramétrica*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{ou} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

Um arco é simples quando valores distintos de t se associam a pontos distintos em \mathbb{C} , e suave se as derivadas de $x(t)$ e $y(t)$ (no sentido real) existem e não se anulam simultaneamente em $[a, b]$. Os pontos $z_0 := \gamma(a)$ e $z_1 := \gamma(b)$ são chamados de pontos extremos do arco, e dizemos que o arco é orientado de z_0 a z_1 quando o sentido de seu percurso é de z_0 a z_1 , quando o parâmetro t varia de a até b .

Definição 1.2. *Uma curva fechada é um arco tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Uma curva fechada que não possui auto-intersecção além das extremidades é dita simples.*

Definição 1.3. *Uma curva fechada simples é chamada curva de Jordan.*

Definição 1.4. *Um contorno é uma cadeia finita de n arcos $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$, cujos domínios são, respectivamente, os intervalos $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ de tal forma que*

$\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Se $\gamma_1(a_1) = \gamma_n(b_n)$ dizemos que o contorno é fechado e se além desses pontos não houverem outras auto-intersecções dizemos que contorno é simples.

Definição 1.5. *Dizemos que um contorno fechado simples tem orientação positiva se o sentido de percurso for anti-horário.*

Definição 1.6. *Dizemos que um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é conexo, se Ω admitir apenas cisão trivial, isto é, Ω não pode ser escrito como união de dois abertos disjuntos. Dizemos que Ω é simplesmente conexo se toda curva fechada contida em Ω pode ser deformada continuamente a um ponto de Ω sem sair de Ω .*

Definição 1.7. *Definimos região como um conjunto não-vazio, aberto e simplesmente conexo.*

1.2 Resultados Básicos

Definição 1.8. *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita analítica em um ponto z_0 de uma região Ω se existem $\rho > 0$ e constantes a_0, a_1, a_2, \dots , tais que*

(i) a bola aberta $B(z_0, \rho) \subset \Omega$;

(ii) para todo $z \in B(z_0, \rho)$ temos

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1.1)$$

Nesse caso dizemos que f é localmente representada pela série de potências (1.1). Além disso, a série é única e os coeficientes da mesma são dados por

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (1.2)$$

Definição 1.9. Se $\rho = \infty$ e $\Omega = \mathbb{C}$ na definição acima e dizemos que f é uma função inteira.

Teorema 1.1 (Cauchy). Se uma função $f(z)$ é analítica em um região Ω então

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad (1.3)$$

para todo contorno fechado simples contido em Ω .

Observação. A prova apresentada aqui exige que $f'(z)$ seja contínua em Ω . De fato uma prova mais geral, devido a Goursat, permite estabelecer (1.3) sem essa hipótese adicional. A prova de Goursat pode ser encontrada em [1]. Em um teorema subsequente (Teorema de Morera 1.5) mostramos que se $f(z)$ é contínua em Ω e a equação (1.3) é satisfeita, então $f(z)$ é analítica em Ω .

Demonstração. Da definição de $\int_C f(z)dz$, usando $f(z) = u + iv$ e $dz = dx + idy$, temos

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx). \quad (1.4)$$

Então usando que $f'(z)$ é contínua, obtemos que u e v têm derivadas parciais contínuas, logo podemos aplicar o teorema de Green, e cada uma das integrais de linha acima podem ser convertidas nas seguintes integrais duplas sobre a região $\tilde{\Omega}$ delimitada por C

$$\int_C f(z)dz = - \iint_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.5)$$

Uma vez que $f(z)$ é analítica, valem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Assim temos $\int_C f(z)dz = 0$. □

Decorre do Teorema de Cauchy (1.3), o seguinte teorema que será usado na demonstração do teorema de Morera, que será muito útil neste trabalho.

Teorema 1.2. Se $f(z)$ é uma função contínua numa região Ω e se $\int_C f(z)dz = 0$ para todo contorno fechado simples contido em Ω , então existe uma função $F(z)$, analítica em Ω , tal que $F'(z) = f(z)$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [1]

Teorema 1.3 (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja $f(z)$ uma função analítica no interior e sobre um contorno fechado e simples C . Então, para todo z interior a C , vale a seguinte fórmula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.6)$$

Demonstração. Dentro da região delimitada pelo contorno C , tomemos uma circunferência de raio δ , C_δ , centrada em algum ponto z . Pela teorema de Cauchy temos que

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.7)$$

Reescrevemos a segunda integral como

$$\int_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{C_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.8)$$

Usando coordenadas polares, $\zeta = z + \delta e^{i\theta}$, na primeira integral no lado direito da equação (1.8), obtemos

$$\int_{C_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\theta}}{\delta e^{i\theta}} = 2\pi i \quad (1.9)$$

Da continuidade de $f(z)$,

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$$

para $|z - \zeta| = \delta$ suficientemente pequeno. Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \\ &< \frac{\epsilon}{\delta} \int_{C_\delta} |d\zeta| \\ &= 2\pi\epsilon. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Assim, quando $\epsilon \rightarrow 0$ a segunda integral na equação (1.8) se anula. Assim, as equações (1.8) e (1.9) fornecem a Fórmula Integral de Cauchy (1.7) □

Como corolário do Teorema de Cauchy podemos mostrar que as derivadas de $f(z)$: $f'(z), f''(z), \dots, f^{(k)}(z)$, todas existem e além do mais podemos esta representação integral nos fornece uma fórmula muito simples para elas. Deste fato podemos concluir que a analiticidade de $f(z)$ implica na analiticidade de todas as suas derivadas.

Corolário 1.1. *Se $f(z)$ é uma função analítica no interior e sobre um contorno fechado e simples C , então todas as derivadas $f^k(z)$, $k = 1, 2, \dots$ existem em um domínio D interior a C , e*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \quad (1.11)$$

Demonstração. Seja z um ponto qualquer em D . Iremos mostrar que todas as derivadas de $f(z)$ existem em z . A arbitrariedade de z garantirá a existência de todas as derivadas em D .

Começamos estabelecendo a equação (1.11) para $k = 1$. Considere a o quociente usual

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2h\pi i} \int_C f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - (z+h)} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - (z+h)(\zeta - z)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta + R, \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde

$$R = \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)} d\zeta. \quad (1.13)$$

Seja $2\delta = \min\{|\zeta - z| : \zeta \in C\} > 0$. Então se $|h| < \delta$ para ζ em C , temos

$$|\zeta - (z+h)| \geq |\zeta - z| - |h| > 2\delta - \delta = \delta$$

Uma vez que $f(\zeta)$ é analítica sobre C segue que existe uma constante M tal que $|f(\zeta)| < M$ sobre C . Então

$$|R| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M}{(2\delta)^2 \delta} L \quad (1.14)$$

onde L é o comprimento do contorno C . Assim, uma vez que $|R| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, estabelecemos a equação (1.11) para $k = 1$, ou seja

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad (1.15)$$

Podemos repetir o argumento acima começando com a equação (1.14) e assim provar a existência de $f''(z)$, isto é, a equação (1.11) para $k = 2$. Isso mostra que f' tem derivada

f'' , e logo ela própria é analítica. Conseqüentemente obtemos que se $f(z)$ é analítica, também o é $f'(z)$. Aplicando esse argumento a $f'(z)$ em vez de $f(z)$, provamos que $f''(z)$ é analítica e, mais geralmente, a analiticidade de $f^{(k)}(z)$ implica na analiticidade de $f^{(k+1)}(z)$. Por indução, obtemos que todas as derivadas existem e assim são analíticas. Uma vez que $f^{(k)}(z)$ é analítica, segue da equação (1.6) que

$$f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^{(k)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.16)$$

Integrando por partes k vezes chegamos à equação (1.11). \square

Teorema 1.4 (Liouville). *Seja $f(z)$ uma função inteira. Se existir uma contante K tal que $|f(z)| \leq K$ para todo $z \in \mathbb{C}$ então $f(z)$ é constante.*

Demonstração. Começamos com a seguinte desigualdade

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (1.17)$$

onde C é um círculo, $|\zeta - z| = R$, e $|f(z)| < M$, temos

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} |d\zeta| \\ &< \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}} \int_C |d\zeta| \\ &= \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R \\ &= \frac{n!M}{R^n}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Agora, tomemos $n = 1$ em (1.18) e obtemos

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Como essa desigualdade vale em todo plano, podemos fazer R arbitrariamente grande. Logo, $f'(z) = 0$ para todo z no plano. Por outro lado,

$$f(z) - f(0) = \int_0^z f'(\zeta) d\zeta = 0$$

Logo, $f(z) = f(0) = \text{constante}$, o que encerra a demonstração do teorema. \square

Corolário 1.2. *Seja $f(z)$ uma função inteira e $\eta \in \mathbb{C}$ uma constante tal que $f(z) \rightarrow \eta$ quando $z \rightarrow \infty$. Então $f(z) = \eta$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Teorema 1.5 (Morera). *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, onde Ω é uma região. Suponhamos que*

$$\int_C f(z) dz = 0$$

para todo contorno fechado e simples C em Ω . Então $f(z)$ é analítica em Ω .

Demonstração. Do teorema 1.2 segue que se a integral de contorno se anula, então existe uma função analítica $F(z)$ em Ω tal que $F'(z) = f(z)$. O corolário 1.1 garante que $F'(z)$ é analítica se $F(z)$ o é. Logo, $f(z)$ é analítica em Ω . \square

Definição 1.10. *Definimos os semi-planos superior e inferior, respectivamente, por*

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

$$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}.$$

Corolário 1.3. *Seja f analítica em $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ e contínua sobre o eixo real. Então $f(z)$ é analítica em \mathbb{C} .*

Observação 1.1. É possível estender o corolário 1.3 a qualquer região aberta Ω que contenha um arco suave e simples σ . Isto é, se $f(z)$ é analítica em $\Omega \setminus \sigma$ e contínua sobre σ , então $f(z)$ é analítica em Ω .

Teorema 1.6 (Princípio da Identidade). *Sejam $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funções analíticas, onde Ω é um aberto conexo. Se existe um aberto não vazio $V \subset \Omega$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in V$ então $f(z) = g(z)$ para todo z em Ω .*

1.3 Teorema de Resíduos

Seja $f(z)$ analítica em uma região Ω , definida por $0 < |z - z_0| < \rho$ e seja $z = z_0$ uma singularidade isolada de $f(z)$. A expansão de Laurent de $f(z)$ em Ω é dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \tag{1.19}$$

com

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (1.20)$$

onde C é um contorno fechado simples contido em Ω . A parte negativa na série, $\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z - z_0)^n$, é chamada **parte principal** de (1.19). O coeficiente C_{-1} é chamado o **resíduo** de $f(z)$ em $z = z_0$. Usamos a notação $C_{-1} = \text{Res}(f(z); z_0)$.

Observamos que quando $n = -1$, a equação (1.20) fica

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i C_{-1} \quad (1.21)$$

Assim, o Teorema de Cauchy pode ser generalizado a funções que possuem singularidades isoladas.

Teorema 1.7 (Resíduos). *Seja $f(z)$ uma função analítica dentro e sobre um contorno fechado simples C , exceto em um número finito de singularidades isoladas z_1, z_2, \dots, z_N contidas dentro da região delimitada por C , veja figura abaixo. Então*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}(f(z); z_j)$$

Onde $\text{Res}(f(z); z_j)$ denota o resíduo de $f(z)$ em $z = z_j$

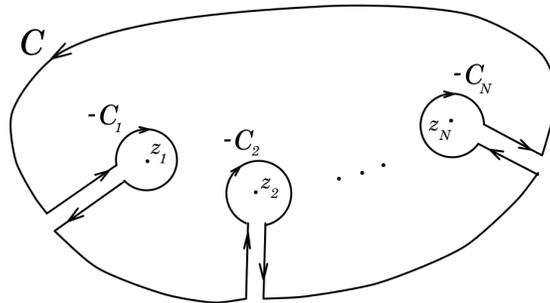


Figura 1.1: Singularidades Isoladas.

Demonstração. Em cada uma das singularidades z_k centramos um círculo, C_k , inteiramente contido na região delimitada por C e a conectamos a C por um corte transversal de forma que as orientações sejam compatíveis, como ilustra a Figura . Seja $\Gamma = C - C_1 - \dots - C_N$. Então, uma vez que as integrais ao longo dos cortes transversais se anulam, temos pelo Teorema de Cauchy que

$$\int_{\Gamma} f(z) = 0.$$

Ou seja,

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz.$$

dai, pela observação acima segue o resultado. □

Capítulo 2

Representação Integral de $p_n(z)$

Neste capítulo iremos obter uma representação integral de polinômios de Taylor de funções inteiras arbitrárias e em seguida, nos concentraremos no caso $f(z) = e^z$.

Um dos objetos deste trabalho é o estudo assintótico, quando $n \rightarrow \infty$, da transformada de Cauchy de uma classe de funções analíticas, cuja definição precisa é dada abaixo.

Definição 2.1 (Transformada de Cauchy). *Seja C um contorno suave contido em uma região Ω e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua sobre C . Então para todo $z \in \mathbb{C} \setminus C$, podemos definir uma função Φ dada por*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

A função Φ é chamada de transformada de Cauchy de φ .

Vamos nos referir as integrais do tipo mostrado acima, como integrais do tipo Cauchy. Como veremos grande parte dos resultados sobre comportamento assintótico, das funções de interesse, na vizinhança do ponto crítico, serão obtidos resolvendo problemas de Riemann-Hilbert envolvendo a transformada de Cauchy. Mas como veremos nas seções seguintes ela também joga papel importante na análise assintótica nas demais regiões do plano complexo.

2.1 Representação Integral de Polinômios de Taylor de Funções Analíticas

Nesta seção apresentamos uma representação integral para o Polinômio de Taylor de uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, inteira arbitrária. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira. Então, para qualquer ponto z do plano complexo, $f(z)$ pode ser representado pela seguinte série de potências

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j$$

e seu polinômio de Taylor de grau n , é o polinômio obtido pelas reduzidas de ordem n da série de potências acima, notação

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j.$$

Usando a fórmula integral de Cauchy, corolário 1.1, podemos representar o polinômio de Taylor de f de grau n da seguinte maneira

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s^{j+1}} z^j ds, \quad (2.1)$$

onde γ denota uma curva de Jordan suave contendo a origem em seu interior e com orientação positiva.

Uma representação mais conveniente para os propósitos deste trabalho é dada pela seguinte proposição

Proposição 2.1. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira, $n \in \mathbb{N}$ e p_n o polinômio de Taylor de f de grau n . Se γ é uma curva de Jordan suave envolvendo a origem e Ω denota a região do plano complexo delimitada pela curva γ , então*

$$p_n(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) \left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{s-z} ds, & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}; \\ f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) \left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{s-z} ds, & \text{se } z \in \Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Observação 2.1. Mais adiante iremos especificar o tipo de contornos que iremos considerar. Com isso, ficará claro que, mesmo que $z \in \gamma$, a representação integral acima será adequada aos nossos propósitos.

Demonstração. Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, temos por (2.1) e pela linearidade da integral, as seguintes igualdades

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s^{j+1}} ds \right] z^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{j=0}^n \frac{f(s)}{s^{j+1}} z^j ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s} \sum_{j=0}^n \left(\frac{z}{s}\right)^j ds.$$

Ora, $\sum_{j=0}^n \left(\frac{z}{s}\right)^j = \frac{1 - \left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{s}}$. Daí lado direito da igualdade acima é dado por

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s} \left[\frac{1 - \left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{s}} \right] ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(s) \left[\frac{1 - \left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{s - z} \right] ds$$

segue que

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) \left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{s - z} ds. \quad (2.3)$$

Para obter (2.2) consideramos a cisão Ω e $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ e em seguida, avaliamos a integral acima, para z em cada um destes conjuntos.

Suponha inicialmente que $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$. Nesse caso, como $\frac{f(s)}{s-z}$ é analítica, segue do teorema dos resíduos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds = 0. \quad (2.4)$$

Usando (2.4) em (2.3), temos que (2.2) é verdadeira para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$.

Por outro lado se $z \in \Omega$, segue da Fórmula Integral de Cauchy que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds = f(z).$$

Usando este fato em (2.3), obtemos

$$p_n(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) \left(\frac{z}{s}\right)^{n+1}}{s - z} ds,$$

para todo $z \in \Omega$. O que encerra a demonstração da proposição. □

2.2 Reescalando $p_n(z)$

Chamamos aqui de reescalamiento uma família particular de homotetias do plano. Esta família é definida simplesmente, a partir de uma função que denominaremos fator de escala. No problema de localização de zeros de uma dada família de polinômios é de grande ajuda, em várias situações, determinar um fator de escala que faça com que os zeros de todos os polinômios da família em questão fiquem localizados em algum compacto do plano complexo.

Nesta seção discutimos como estes fatores de escala afetam as representações integrais obtidas na seção anterior, bem como apontamos um fator de escala natural para estudar o problema da localização de zeros dos polinômios de Taylor de grau n da função exponencial.

Fixe $n \in \mathbb{N}$ e sejam $\{z_{k,n}\}$ os zeros de p_n . Para qualquer função $\psi : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ temos que

$$p_n(\psi(n)z) = 0 \iff z = \frac{z_{k,n}}{\psi(n)} \text{ para algum } 1 \leq k \leq n.$$

Quando o conjunto de zeros da coleção de polinômios $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não forma um conjunto limitado do plano, a introdução de um fator de escala $\psi(n)$, pode ser interessante se existe algum $M \in \mathbb{R}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n$ temos

$$\left| \frac{z_{k,n}}{\psi(n)} \right| \leq M.$$

Pois nestas situações sabemos que as raízes da equação $p_n(\psi(n)z) = 0$, estarão contidas em um conjunto compacto.

Vamos examinar agora, em detalhe, como se modificam as representações integrais obtidas na seção anterior, quando introduzimos o fator de escala. Mantendo a notação da seção anterior, considere ψ um fator de escala tal que $\psi(n)z \in \Omega$. Então pela Proposição 2.1, temos que

$$p_{n-1}(\psi(n)z) = f(\psi(n)z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) \left(\frac{\psi(n)z}{s}\right)^n}{s - \psi(n)z} ds.$$

Fazendo a mudança de variável $w = T(s) \equiv \frac{s}{\psi(n)}$ (abusando da notação não indicamos a dependência de w e T em n), na integral acima e multiplicando ambos os lados por z^{-n} ,

obtemos

$$z^{-n}p_{n-1}(\psi(n)z) = z^{-n}f(\psi(n)z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{T(\gamma)} \frac{f(\psi(n)w)w^{-n}}{w-z} dw,$$

onde $T(\gamma)$ é também uma curva de Jordan suave envolvendo a origem. Observe que a segunda parcela da igualdade acima, define uma função $H_n : \mathbb{C} \setminus T(\gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$H_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{T(\gamma)} \frac{f(\psi(n)s)s^{-n}}{s-z} ds \quad (2.5)$$

e esta função é a transformada de Cauchy de $f(\psi(n)s)s^{-n}$. Procedendo analogamente a prova da Proposição 2.1, obtemos a seguinte igualdade

$$z^{-n}p_{n-1}(\psi(n)z) = \begin{cases} -H_n(z), & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{T(\Omega)}; \\ z^{-n}f(\psi(n)z) - H_n(z), & \text{se } z \in T(\Omega). \end{cases} \quad (2.6)$$

Note que para obter a representação integral (2.6), as únicas propriedades importantes que exigimos sobre $T(\gamma)$ é que $T(\gamma)$ seja uma curva de Jordan suave e que envolva a origem. Em vista desta observação, vamos escrever (2.6) usando a mesma notação introduzida na Proposição 2.1, i.e.,

$$z^{-n}p_{n-1}(\psi(n)z) = \begin{cases} -H_n(z), & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}; \\ z^{-n}f(\psi(n)z) - H_n(z), & \text{se } z \in \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ou seja, escrevemos $z^{-n}p_{n-1}(\psi(n)z)$ como uma integral do tipo Cauchy. Logo, como ilustra o caso em que $f(z) = e^z$, podemos associar problemas de Riemann-Hilbert convenientemente para a análise assintótica de H_n . Um problema em aberto é o seguinte. Dada uma função inteira f , determinar o comportamento assintótico, em n , de $H_n(z)$ para z no interior e no exterior de γ . Com isso em mãos, podemos estudar o comportamento assintótico dos zeros reescalados de p_n via (2.7) para casos bem gerais. Isso porque se $z \in \Omega$, então os zeros de $p_{n-1}(\psi(n)z)$ são as soluções da equação

$$z^{-n}f(\psi(n)z) = H_n(z).$$

Por outro lado, se $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$, então os zeros de $p_{n-1}(\psi(n)z)$ são os zeros de $H_n(z)$.

Enunciamos dois teoremas que apontam para uma escolha natural de um fator de escala, no caso em que $f(z) = e^z$.

Teorema 2.1 (Szëgo). *Para todo n ímpar, o polinômio p_n tem uma única raiz real, denotada por z_n^* , esta raiz é negativa e tem a seguinte expansão assintótica*

$$-z_n^* = \eta n + \alpha \log n + \beta + o(1)$$

quando $n \rightarrow \infty$, onde $\eta = 0.278464\dots$ denota a única solução real da equação $\eta e^{1+\eta} = 1$,

$$\alpha = \frac{\eta}{2(1+\eta)} = 0,108906\dots$$

e

$$\beta = \frac{\eta}{1+\eta} \log \left(\sqrt{2\pi} \frac{1+\eta}{\eta} \right) = 0,532127\dots$$

Teorema 2.2 (Takeya). *Considere $n \in \mathbb{N}$ e sejam $\{z_{k,n}\}$, com $1 \leq k \leq n$, as raízes de p_n . Então*

$$1 \leq |z_{k,n}| \leq n.$$

O teorema de Szëgo nos mostra que neste caso o conjunto de zeros dos polinômios de Taylor da exponencial não forma um conjunto limitado, uma vez que z_n^* não é uma sequência limitada. Por outro lado, o teorema de Takeya mostra que $\psi(n) = n$ faz com que todas as raízes da equação $p_n(\psi(n)z) = 0$ fiquem contidas dentro do disco unitário fechado. Desta forma podemos determinar a localização dos zeros do polinômio de Taylor da exponencial, via o fator de escala ψ , trabalhando dentro do disco unitário fechado.

2.3 Representação Integral dos Polinômios de Taylor da Função Exponencial Reescalados

Nesta seção iremos nos restringir à função $f(z) = e^z$. Como mencionado anteriormente nosso objetivo é entender o comportamento assintótico para valores grandes de n da função H_n . No caso da função exponencial o estudo assintótico de H_n pode ser facilitado pela

introdução de uma nova função F_n que é uma transformada de Cauchy de uma função bem conveniente para o estudo assintótico de p_n reescalado.

Usando a representação provada em (2.7) e $f(z) = e^z$ temos

$$z^{-n}p_{n-1}(\psi(n)z) = \begin{cases} -H_n(z), & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}; \\ z^{-n}e^{\psi(n)z} - H_n(z), & \text{se } z \in \Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

onde

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\psi(n)s} s^{-n}}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\psi(n)s-n \ln(s)}}{s-z} ds.$$

Do teorema de Kakeya e do teorema de Szegö sabemos que o fator de escala no caso $f(z) = e^z$ é $\psi(n) = n$. Com isso, H_n fica

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{n(s-\ln(s))}}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{n\phi_1(s)}}{s-z} ds,$$

onde $\phi_1(z) := z - \ln(z)$ e $\ln(z)$ denota o ramo principal do logaritmo ao longo do eixo real negativo.

Para fazermos a análise assintótica de $H_n(z)$, quando $n \rightarrow \infty$, vamos utilizar um método que será exposto no próximo capítulo chamado de o *Método da Descida Mais Íngreme*. Como veremos, as principais contribuições para a integral, quando $n \rightarrow \infty$, virão das vizinhanças dos pontos críticos de ϕ_1 , que neste caso é o ponto $z_0 = 1$. A figura abaixo mostra algumas curvas de nível de $\text{Re}(\phi_1(s))$.

Na figura 2.1, a curva denotada por \mathcal{C}_3 é o esboço do conjunto pontos do plano complexo satisfazendo a equação $\text{Re}(\phi_1(z)) = 0$. Pode-se mostrar que \mathcal{C}_3 é uma curva sem auto interseção que divide o plano complexo em duas regiões. Na região onde está localizada a curva \mathcal{C}_1 , por exemplo, temos $\text{Re}(\phi_1(s)) < 0$ e na região onde está a curva \mathcal{C}_5 temos $\text{Re}(\phi_1(s)) > 0$.

Por continuidade, em uma vizinhança pequena de $z_0 = 1$, temos $\text{Re}(\phi_1(z)) > 0$. Este fato não traz grandes complicações para aplicação do método da descida mais íngreme,

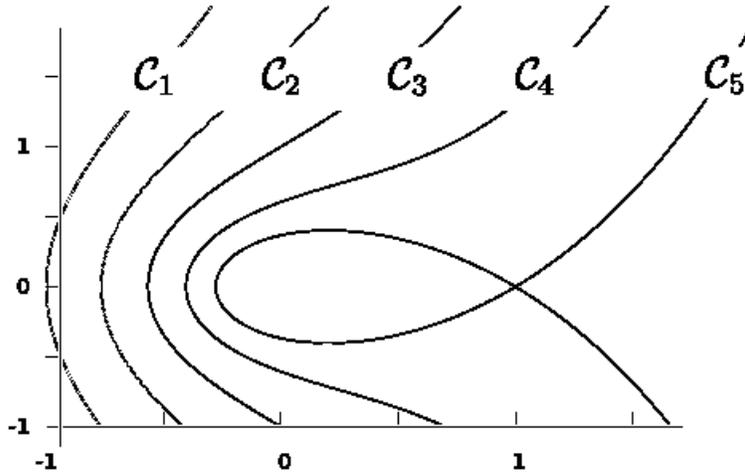


Figura 2.1: curvas de nível de $\text{Re}(\phi_1(z))$

por outro lado se multiplicamos $H_n(z)$ por e^{-n} , obtemos

$$F_n(z) = e^{-n} H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} ds, \quad \text{com } \phi(s) = s - 1 - \ln(s). \quad (2.9)$$

É claro que obtida uma expansão assintótica para F_n temos imediatamente uma expansão assintótica para H_n . A vantagem de se introduzir esta nova função está relacionada com as seguintes observações. A função ϕ que aparece na integral acima, é simplesmente a translação da função ϕ_1 . A topologia das curvas de níveis destas funções é basicamente a mesma. Mas agora há uma diferença fundamental quanto ao sinal de ϕ em uma vizinhança pequena de $z_0 = 1$. Na figura abaixo está representada pela linha sólida a curva $\text{Re}(\phi(z)) = 0$:

A região hachurada corresponde aos pontos z do plano tais que $\text{Re}(\phi(z)) > 0$. Na componente conexa onde está esboçada a curva tracejada temos $\text{Re}(\phi(z)) < 0$. Como veremos no capítulo seguinte, o contorno no qual fazemos a integração (2.9) poderá ser deformado em um contorno, passando pelo ponto $z_0 = 1$, completamente contido na região onde $\text{Re}(\phi(z)) < 0$. A vantagem de se trabalhar com estes contornos é que o argumento do integrando de (2.9), longe de $z_0 = 1$, é exponencialmente pequeno. Com algumas estimativas, vamos ver que este fato ajuda a localizar o problema no ponto crítico.

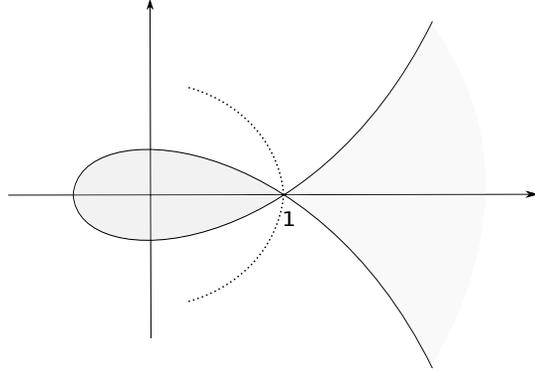


Figura 2.2: a curva $\text{Re}(\phi(z)) = 0$

Usando a fórmula (2.8) temos imediatamente da definição de F_n que

$$(ez)^{-n}p_{n-1}(nz) = \begin{cases} -F_n(z), & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}; \\ e^{n\phi(z)} - F_n(z), & \text{se } z \in \Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

Como mencionado na introdução desta seção, as manipulações feitas tinham o objetivo de nos conduzir a representações integrais de p_n por funções F_n cuja análise assintótica é mais simples que de H_n . De fato, o Método da Descida Mais Íngreme aplicado a ambas H_n e F_n nos fornece as melhores estimativas assintóticas para estas quantidades. Por sua vez H_n na curva de descida mais íngreme (que é definida no próximo Capítulo) é transformada de Cauchy de uma função cuja a parte real toma valores positivos sobre esta curva, enquanto que para F_n ocorre exatamente o oposto. Com base neste fato mostraremos que F_n é, a menos de um erro exponencialmente pequeno quando $n \rightarrow \infty$, dada por uma integral em uma vizinhança de $z_0 = 1$.

Capítulo 3

Métodos de Análise Assintótica

3.1 Expansões assintóticas

Neste capítulo é feita uma exposição detalhada das técnicas que utilizaremos para avaliar o comportamento assintótico, quando $n \rightarrow \infty$, de certas representações integrais dos polinômios de Taylor de grau n da função exponencial.

Iniciamos com as definições básicas de análise assintótica e em seguida passamos a prova de dois teoremas conhecidos como Lema de Watson e Método de Laplace. Em seguida, explicamos o chamado Método de Descida Mais Íngreme e iniciamos o estudo assintótico das representações integrais dos polinômios $p_n(z)$ por este método.

Definição 3.1. *Sejam $n_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ funções.*

a) *A notação*

$$f(n) = O(g(n)), \quad n \rightarrow n_0$$

será usada para denotar o fato de que existe uma constante M tal que, para todo n em uma vizinhança de n_0 , $|f(n)| \leq M|g(n)|$. Neste caso, diremos que $f(n)$ é da ordem de $g(n)$ quando $n \rightarrow n_0$.

b) *A notação*

$$f(n) = o(g(n)) \quad n \rightarrow n_0$$

será usada para denotar que $\lim_{n \rightarrow n_0} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = 0$. Eventualmente iremos nos referir a este fato dizendo que $f(n)$ é menor do que $g(n)$ quando $n \rightarrow n_0$.

Definição 3.2. Para cada $j \in \mathbb{N}$, seja $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

a) Diremos que $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência assintótica, quando $n \rightarrow n_0$, se

$$g_{j+1}(n) = o(g_j(n)) \quad n \rightarrow n_0,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

b) Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\{g_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência assintótica. Dizemos que $\sum_{j=1}^N a_j g_j$ é uma expansão assintótica válida até ordem N , se

$$f(n) = \sum_{j=1}^m a_j g_j(n) + O(g_{m+1}(n)) \quad n \rightarrow n_0,$$

para todo $m = 1, \dots, N$.

Note que se $\sum_{j=1}^N a_j g_j$ é uma expansão assintótica de f válida até ordem N , quando $n \rightarrow n_0$, então

$$\lim_{n \rightarrow n_0} \left| \frac{f(n)}{\sum_{j=1}^k a_j g_j(n)} \right| = 1 \quad \text{e} \quad a_k = \lim_{n \rightarrow n_0} \left(\frac{f(n) - \sum_{j=1}^{k-1} a_j g_j(n)}{g_k(n)} \right),$$

para todo $k = 1, \dots, N$.

Desta forma segue que podemos calcular os coeficientes de uma expansão assintótica sucessivamente.

O objetivo neste capítulo é entender o comportamento assintótico, quando $n \rightarrow \infty$ de integrais do tipo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(s, z) e^{n\phi(s)} ds. \quad (3.1)$$

quando $F(s, z) = \frac{1}{s-z}$ e γ é uma curva de Jordan suave contendo a origem. Como já dissemos anteriormente o método que nos permitirá obter uma expansão assintótica destas integrais é o Método da Descida Mais Íngreme.

Vamos iniciar a exposição deste método considerando inicialmente um problema de expansão assintótica mais simples. Esta simplificação consiste em considerar integrais da forma

$$I(n) = \int_a^b f(s)e^{-n\phi(s)} ds, \quad (3.2)$$

onde f e ϕ são funções reais de classe C^k . Integrais deste tipo podem ser vistas, como simplificações de (3.1) onde o contorno γ é substituído pelo intervalo $[a, b]$ no eixo real e $F(s, z) = f(s)$.

Para ter uma intuição sobre os resultados que apresentamos a seguir, vamos supor que $I(n) = \int_0^b f(s)e^{-ns} ds$. Quando $n \rightarrow \infty$, o integrando se torna exponencialmente pequeno (uniformemente) para todo s fora de uma vizinhança pequena de zero. Isto sugere que as contribuições dominantes, assintoticamente, desta integral venham das vizinhanças de zero. Em vista desta observação, aparentemente podemos analisar $I(n)$ assintoticamente, analisando o comportamento de f na vizinhança de $s = 0$. Portanto, nos casos em que este raciocínio pode ser rigorosamente justificado, substituímos o problema global, de realizar uma integração em todo intervalo $[0, b]$, por um problema local.

Note que o raciocínio heurístico do parágrafo acima, se aplica se $s = c$ é o mínimo de ϕ restrita ao intervalo $[a, b]$ e se $f(c) \neq 0$. Isto é, devem vir de uma vizinhança de $s = c$, as contribuições dominantes da expansão assintótica de $I(n)$, para n grande. De maneira análoga, caso o mínimo de ϕ ocorra em um dos extremos do intervalo, novamente somos levados ao estudo local de f próximo ao ponto de mínimo.

Motivados pela discussão acima, apresentamos o seguinte

Lema 3.1 (Integração por partes). *Fixado $N \in \mathbb{N}$, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^{N+2} em (a, b) , contínua em $[a, b]$ e*

$$I(n) = \int_a^b f(s)e^{-ns} ds,$$

então

$$I(n) = \sum_{j=0}^k f^{(j)}(a) \frac{e^{-na}}{n^{j+1}} + O(n^{-(k+1)}e^{-na}) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo $k = 1, \dots, N$.

Demonstração. Considere $1 \leq k \leq N$. Integrando $I(n)$ por partes, obtemos

$$I(n) = \sum_{j=0}^k f^{(j)}(a) \frac{e^{-na}}{n^{j+1}} - \sum_{j=0}^k f^{(j)}(b) \frac{e^{-nb}}{n^{j+1}} + \frac{1}{n^k} \int_a^b f^{(k)}(s) e^{-ns} ds.$$

Portanto basta mostrar que a segunda e a terceira parcela, do lado direito da igualdade acima, são da ordem de $n^{-(k+1)}e^{-na}$ quando $n \rightarrow \infty$. Vamos mostrar este fato para cada uma das parcelas separadamente. Para a segunda parcela a igualdade

$$\sum_{j=0}^k f^{(j)}(b) \frac{e^{-nb}}{n^{j+1}} = O(n^{-(k+1)}e^{-na}),$$

segue do fato que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p e^{n(a-b)} = 0 \quad \text{para todo } p \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Para a terceira parcela, inicialmente fazemos uma nova integração por partes, ficando assim com

$$\frac{1}{n^k} \int_a^b f^{(k)}(s) e^{-ns} ds = -\frac{1}{n^{k+1}} [e^{-nb} f^{(k)}(b) - e^{-na} f^{(k)}(a)] + \frac{1}{n^{k+1}} \int_a^b f^{(k+1)}(s) e^{-ns} ds.$$

Por (3.3) segue que

$$-\frac{1}{n^{k+1}} [e^{-nb} f^{(k)}(b) - e^{-na} f^{(k)}(a)]$$

é da ordem de $n^{-(k+1)}e^{-na}$. Pela desigualdade do valor absoluto para integrais, temos

$$\left| \frac{1}{n^{k+1}} \int_a^b f^{(k+1)}(s) e^{-ns} ds \right| \leq \frac{1}{n^{k+1}} e^{-na} \int_a^b |f^{(k+1)}(s)| ds.$$

Portanto $\frac{1}{n^k} \int_a^b f^{(k)}(s) e^{-ns} ds$ também é da ordem de $n^{-(k+1)}e^{-na}$. Isto conclui a prova do lema. □

O próximo passo será mostrar o Lema de Watson. Com ele podemos analisar integrais cujo o integrando apresente alguma singularidade nos pontos de fronteira. Este lema, neste texto, também pode ser visto como um passo intermediário da exposição do Método da Descida Mais Íngreme. Abaixo apresentamos o enunciado preciso deste lema.

Lema 3.2 (Lema de Watson). *Considere a integral*

$$I(n) = \int_0^b f(s) e^{-ns} ds, \quad b \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \quad (3.4)$$

e suponha que f é integrável no intervalo $[0, b]$ e que tenha uma expansão em série assintótica

$$f(t) = t^\alpha \sum_{j=0}^N a_j t^{\beta j} + O(t^{\beta N + \alpha + 1})$$

quando $t \rightarrow 0^+$, para $\alpha > -1$ e $\beta > 0$ válida até ordem N , para todo $N \in \mathbb{N}$. Suponha adicionalmente que

a) se $0 < b < +\infty$, que exista $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t > 0$, temos $|f(t)| \leq M$;

b) se $b = \infty$ que existam constantes $M, c \in \mathbb{R}$ tais que $|f(t)| \leq M e^{ct}$.

Então

$$I(n) = \sum_{j=0}^N a_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta j + 1)}{k^{\alpha + \beta j + 1}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha + \beta(N+1) + 1}}\right).$$

Demonstração. Vamos decompor a integral em duas parcelas, $I(n) = I_1(n) + I_2(n)$, onde

$$I_1(n) = \int_0^R f(s) e^{-ns} ds, \quad I_2(n) = \int_R^b f(s) e^{-ns} ds$$

e R é uma constante positiva, satisfazendo $R < b$. Independentemente da escolha de R segue da desigualdade do valor absoluto para integrais que $I_2(n)$ é exponencialmente pequena para $n \rightarrow \infty$. No caso em que b é finito por a) temos

$$|I_2(n)| \leq M \int_R^b e^{-ns} ds = \frac{M}{n} (e^{-nR} - e^{-nb}).$$

De onde concluímos que

$$I_2(n) = O\left(\frac{e^{-nR}}{n}\right), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ sabemos da expansão assintótica de f que a integral $I_1(n)$ pode ser escrita como

$$I_1(n) = \int_0^R \left[\sum_{j=0}^N a_j s^{\alpha + \beta j} + O(s^{\alpha + \beta(N+1)}) \right] e^{-ns} ds,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Entretanto, para qualquer $1 \leq j \leq N$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^R s^{\alpha+\beta j} e^{-ns} ds &= \int_0^\infty s^{\alpha+\beta j} e^{-ns} ds - \int_R^\infty s^{\alpha+\beta j} e^{-ns} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta j + 1)}{n^{\alpha+\beta j+1}} + O\left(\frac{e^{-nR}}{n}\right) \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Onde para a primeira integral utilizamos a definição da função Gama e para a segunda integração por partes. A segunda parcela de $I_1(n)$ é majorada como segue abaixo

$$\begin{aligned} \int_0^R O(s^{\alpha+\beta(N+1)}) e^{-ns} ds &\leq M_N \int_0^R s^{\alpha+\beta(N+1)} e^{-ns} ds \\ &= M_N \frac{\Gamma(\alpha + \beta(N+1) + 1)}{n^{\alpha+\beta(N+1)+1}}. \end{aligned}$$

Assim

$$I(n) = \sum_{j=0}^N a_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta j + 1)}{k^{\alpha+\beta j+1}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+\beta(N+1)+1}}\right),$$

quando $n \rightarrow \infty$ e sempre que f satisfaz a hipótese a). As hipóteses $\alpha > -1$ e $\beta > 0$, são necessárias para a convergência dos limites em $s = 0$.

Se $b = \infty$ então o controle dos termos que aparecem na integração por partes, é assegurado pela desigualdade $|f(s)| \leq M e^{-ns}$ e como neste caso é imediata a verificação de que

$$I_2(n) \leq M \frac{e^{-(n-c)R}}{n-c} = O\left(\frac{e^{-nR}}{n}\right),$$

quando $n \rightarrow \infty$. O lema está provado. □

3.2 Método de Laplace

Nas seções anteriores estudamos o comportamento de integrais da forma

$$I(n) = \int_a^b f(s) e^{-n\phi(s)} ds \tag{3.5}$$

para o caso em que $\phi(s) = s$. Vamos chamar atenção agora para duas propriedades que foram importantes na prova dos Lemas 3.1 e 3.2. A primeira, é que o mínimo de ϕ determina as taxas do comportamento assintótico $I(n)$. Mas o que na verdade permite

que a análise possa ser localizada no mínimo é a propriedade de monotonicidade de ϕ . Inspirados por estas observações, vamos conduzir uma pequena discussão (informal), nas próximas linhas, sobre as ideias do Método de Laplace. Em seguida, faremos uma demonstração rigorosa de um lema que será denominado Método de Laplace, com objetivo de obter um método que permita estudar assintoticamente integrais da forma (3.5)

Vamos considerar agora $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, não monótona e vamos supor que ϕ seja suficientemente suave, para justificarmos algumas operações que faremos a seguir. Suponha, por simplicidade, que o mínimo de ϕ ocorra num ponto $c \in (a, b)$. Assim podemos afirmar que $\phi'(c) = 0$ e $\phi''(c) > 0$. Além do mais, vamos supor que $\phi'(t) \neq 0$ se $t \neq c$. Vamos supor também que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ também é suficientemente suave e que f não se anule em $s = c$. Expandindo f e ϕ em uma vizinhança de $s = c$, esperamos que, para valores de n muito grande, o comportamento assintótico de $I(n)$ em (3.5) seja dado por

$$\int_{c-R}^{c+R} f(c) \exp \left(-n \left[\phi(c) + \frac{(s-c)^2}{2} \phi''(c) \right] \right) ds.$$

Note que a integral acima é igual a

$$e^{-n\phi(c)} f(c) \int_{c-R}^{c+R} \exp \left(-n \frac{(s-c)^2}{2} \phi''(c) \right) ds.$$

Para avaliar a integral restante, consideramos a mudança de variáveis

$$u = \sqrt{\frac{n}{2} \phi''(c)} (s - c)$$

e ficamos com a seguinte integral

$$\frac{e^{-n\phi(c)} f(c)}{\sqrt{\frac{n}{2} \phi''(c)}} \int_{-R\sqrt{\frac{n}{2} \phi''(c)}}^{R\sqrt{\frac{n}{2} \phi''(c)}} e^{-u^2} du.$$

Portanto estes cálculos nos leva a seguinte estimativa

$$|I(n)| = \left| \int_a^b f(s) e^{-n\phi(s)} ds \right| \leq |f(c)| e^{-n\phi(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{n\phi''(c)}}.$$

Frequentemente na literatura os autores se referem a expressão, do lado direito da desigualdade acima, por Fórmula de Laplace e a este método por Método de Laplace.

Lema 3.3 (Método de Laplace). *Considere a integral*

$$I(n) = \int_a^b f(s)e^{-n\phi(s)} ds,$$

onde $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^4 em $[a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 em $[a, b]$. Suponha que exista $c \in [a, b]$, tal que $\phi'(c) = 0$ e $\phi''(c) > 0$ e também que $\phi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b] \setminus \{c\}$. Então

a) Se $c \in (a, b)$, temos que

$$I(n) = f(c)e^{-n\phi(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{n\phi''(c)}} + O\left(\frac{e^{-n\phi(c)}}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \quad n \rightarrow \infty;$$

b) Se $c \in \{a, b\}$, temos que

$$I(n) = f(c)e^{-n\phi(c)} \sqrt{\frac{\pi}{2n\phi''(c)}} + O\left(\frac{e^{-n\phi(c)}}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. A ideia da prova é dividir o intervalo $[a, b]$ em dois intervalos semi-abertos $[a, c)$ e $(c, b]$, afim de garantir monotonicidade de ϕ em cada um destes intervalos. Em seguida, fazendo uma mudança de variáveis adequada, aplicar o Lema de Watson.

Considere a decomposição de $I(n)$ dada abaixo

$$I(n) = \int_a^c f(s)e^{-n\phi(s)} ds + \int_c^b f(s)e^{-n\phi(s)} ds$$

vamos nos referir as parcelas do lado direito da igualdade acima por $I_a(n)$ e $I_b(n)$, respectivamente. Vamos fixar nossa atenção inicialmente em I_b . Pela definição de c segue que a restrição de ϕ ao intervalo $[c, b]$ é monótona. Usando em I_b a mudança de variáveis $g(t) = \phi^{-1}(t + \phi(c))$, obtemos

$$I_b = e^{-n\phi(c)} \int_0^{\phi(b)-\phi(c)} \frac{f(\phi^{-1}(t + \phi(c)))}{\phi'(\phi^{-1}(t + \phi(c)))} e^{-nt} dt.$$

A integral acima sugere a aplicação do Lema de Watson. Para verificar que este lema pode de fato, ser aplicado precisamos antes, determinar o comportamento assintótico de

$$\frac{f(\phi^{-1}(t + \phi(c)))}{\phi'(\phi^{-1}(t + \phi(c)))} \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+.$$

A mudança de variável g definida acima, manda valores do intervalo fechado $[0, \phi(b)]$ no intervalo $[c, b]$. É imediato verificar que sua inversa $g^{-1} : [c, b] \rightarrow [0, \phi(b)]$ é dada por $g^{-1}(t) = \phi(t) - \phi(c)$.

Já que ϕ é de classe C^4 em $[a, b]$, da fórmula de Taylor segue que

$$\phi(t) - \phi(c) = \frac{\phi''(c)}{2}(t-c)^2 + \frac{\phi'''(c)}{3!}(t-c)^3 + O((t-c)^4)$$

Para $t \in (0, b-c)$, defina $h(t) = g^{-1}(t+c)$. Então pela definição de g^{-1} e pela igualdade acima, temos a seguinte expansão assintótica para h quando $t \rightarrow 0^+$,

$$h(t) = \frac{\phi''(c)}{2}t^2 + \frac{\phi'''(c)}{3!}t^3 + O(t^4).$$

Vamos mostrar que h^{-1} admite uma expansão assintótica da forma

$$h^{-1}(t) = a_1 t^{\frac{1}{2}} + a_2 t + O(t^{\frac{3}{2}}), \quad (3.6)$$

mostrando que a equação $t = h(h^{-1}(t))$ é válida para uma escolha dos coeficientes a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}$. Os coeficientes podem ser determinados a partir da equação $t = h(h^{-1}(t))$, que neste caso, nos fornece a seguinte igualdade

$$t = \frac{\phi''(c)}{2}(h^{-1}(t))^2 + \frac{\phi'''(c)}{3!}(h^{-1}(t))^3 + O((h^{-1}(t))^4)$$

usando a expressão (3.6), ficamos com

$$t = \frac{\phi''(c)}{2}(a_1 t^{\frac{1}{2}} + a_2 t + O(t^{\frac{3}{2}}))^2 + \frac{\phi'''(c)}{3!}(a_1 t^{\frac{1}{2}} + a_2 t + O(t^{\frac{3}{2}}))^3 + O(t^2) \quad (3.7)$$

Expandindo as potências acima, obtemos

$$\left(a_1 t^{\frac{1}{2}} + a_2 t + O(t^{\frac{3}{2}})\right)^2 = a_1^2 t + 2a_1 a_2 t^{\frac{3}{2}} + O(t^2)$$

$$\left(a_1 t^{\frac{1}{2}} + a_2 t + O(t^{\frac{3}{2}})\right)^3 = a_1^3 t^{\frac{3}{2}} + O(t^2)$$

Substituindo estas expansões em (3.7), ficamos com

$$t = \frac{\phi''(c)}{2}(a_1^2 t + 2a_1 a_2 t^{\frac{3}{2}} + O(t^2)) + \frac{\phi'''(c)}{3!}(a_1^3 t^{\frac{3}{2}} + O(t^2)). \quad (3.8)$$

Igualando os coeficientes de mesmo grau, segue que

$$1 = \frac{\phi''(c)}{2}a_1^2 \quad \text{e} \quad \frac{\phi''(c)}{2}2a_1a_2 = -\frac{\phi'''(c)}{3!}3a_1^3.$$

Portanto

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}} \quad \text{e} \quad a_2 = -\frac{\phi'''(c)}{3(\phi''(c))^2}.$$

Assim temos a seguinte expressão assintótica para inversa de h , numa vizinhança de $t = 0$,

$$h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}t^{\frac{1}{2}} - \frac{\phi'''(c)}{3(\phi''(c))^2}t + O(t^{\frac{3}{2}}).$$

Lembrando que $g^{-1}(t) = h(t - c)$, temos

$$\begin{aligned} (t - c) = h^{-1}(h(t - c)) &= h^{-1}(g^{-1}(t)) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}}(g^{-1}(t))^{\frac{1}{2}} - \frac{\phi'''(c)}{3(\phi''(c))^2}g^{-1}(t) + O((g^{-1}(t))^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aplicando novamente a fórmula de Taylor temos

$$\begin{aligned} f(t) &= f(c) + f'(c)(t - c) + O((t - c)^2); \\ \phi'(t) &= \phi''(c)(t - c) + \frac{\phi'''(c)(t - c)^2}{2} + O((t - c)^3). \end{aligned}$$

Analisando o grau, em ambas as expressões acima, observamos que $\frac{f(t)}{\phi'(t)}$ admite uma expansão assintótica do tipo

$$\frac{f(t)}{\phi'(t)} = \frac{b_{-1}}{(t - c)} + b_0 + O((t - c)).$$

Os coeficientes b_{-1} e b_0 podem ser determinados como segue

$$b_{-1} = \lim_{t \rightarrow c^+} (t - c) \frac{f(t)}{\phi'(t)} = \lim_{t \rightarrow c^+} \frac{f(c) + O((t - c))}{\phi''(c) + O((t - c))} = \frac{f(c)}{\phi''(c)}$$

e

$$b_0 = \lim_{t \rightarrow c^+} \left(\frac{f(t)}{\phi'(t)} - \frac{f(c)}{\phi''(c)(t - c)} \right) = \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2}.$$

Assim temos

$$\frac{f(t)}{\phi'(t)} = \frac{f(c)}{\phi''(c)(t - c)} + \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2} + O((t - c))$$

Avaliando a expressão acima em $\phi^{-1}(t + \phi(c)) = g(t)$, ficamos com

$$\frac{f(\phi^{-1}(t + \phi(c)))}{\phi'(\phi^{-1}(t + \phi(c)))} = \frac{f(c)}{\phi''(c)(g(t) - c)} + \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2} + O(g(t) - c).$$

Por (3.9) temos que

$$g(t) - c = \sqrt{\frac{2}{\phi''(c)}} t^{\frac{1}{2}} - \frac{\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2} t + O(t^{\frac{3}{2}}).$$

Portanto

$$\frac{f(\phi^{-1}(t + \phi(c)))}{\phi'(\phi^{-1}(t + \phi(c)))} = \frac{f(c)}{\sqrt{2\phi''(c)}} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2} + O(t^{\frac{1}{2}}).$$

Substituindo esta expressão no integrando de I_b , ficamos com

$$I_b = e^{-n\phi(c)} \int_0^{\phi(b) - \phi(c)} \left(\frac{f(c)}{\sqrt{2\phi''(c)}} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2} + O(t^{\frac{1}{2}}) \right) e^{-nt} dt.$$

Usando o Lema de Watson, obtemos

$$I_b(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2n\phi''(c)}} f(c) e^{-n\phi(c)} + \left(\frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2} \right) \frac{e^{-n\phi(c)}}{n} + O\left(\frac{e^{-n\phi(c)}}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (3.10)$$

Similarmente para o intervalo $[a, c]$, temos

$$I_a(n) = \sqrt{\frac{\pi}{2n\phi''(c)}} f(c) e^{-n\phi(c)} - \left(\frac{f'(c)}{\phi''(c)} - \frac{f(c)\phi'''(c)}{2(\phi''(c))^2} \right) \frac{e^{-n\phi(c)}}{n} + O\left(\frac{e^{-n\phi(c)}}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (3.11)$$

Somando I_a e I_b obtemos a expansão desejada se c é um ponto no interior do intervalo $[a, b]$. Caso $c = a$ ou $c = b$ as expressões (3.10) e (3.11) fornecem o comportamento assintótico desejado. \square

3.3 Método da Descida mais Íngreme

O Método da Descida mais Íngreme é baseado em uma ideia muito simples, mas por outro lado é uma ferramenta poderosa para estudar o comportamento assintótico, quando $n \rightarrow \infty$, de integrais da forma

$$I(n) = \int_{\gamma} f(s) e^{n\phi(s)} ds, \quad (3.12)$$

onde γ é uma curva de Jordan no plano complexo e f e ϕ funções analíticas numa região contendo γ . A ideia é usar a analiticidade do integrando para justificar que podemos deformar o contorno γ em um novo contorno β , de forma que a parte imaginária de ϕ seja constante ao longo do contorno β .

Se $\phi(s) = u(s) + iv(s)$ em (3.12) e se existe o contorno $\beta : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}$, como acima, então

$$I(n) = e^{ink} \int_{\beta} f(s) e^{nu(s)} ds,$$

onde $k = v(\beta(0))$. Embora s seja complexo, $u(s)$ é sempre real e assim podemos usar algumas das ideias apresentadas para o estudo das integrais do tipo Laplace para investigar o comportamento assintótico de $I(n)$, quando $n \rightarrow \infty$. Observamos no entanto que no caso em que f ou ϕ possua alguma singularidade como, por exemplo um pólo, contribuições importantes para a integral $I(n)$ podem surgir no processo de deformação da curva γ .

Como veremos a seguir, se existir um caminho suave no plano onde $v(s)$ é constante, então neste caminho $u(s)$ tem decrescimento ou crescimento maximal. Para determinar o comportamento assintótico de $I(n)$ usamos, em geral, um caminho de decrescimento maximal, que é conhecido como Caminho de Descida mais Íngreme e por isto o chamamos este método de o Método da Descida Mais Íngreme.

Sempre que possível optamos por tomar um Caminho de Descida mais Íngreme que passe por algum ponto $s_0 \in \mathbb{C}$ onde $\phi'(s_0) = 0$. Pois assim podemos, via Métodos de Laplace e Lema de Watson, determinar o comportamento assintótico de (3.12), apenas analisando a integral na vizinhança deste ponto crítico.

Note que, se s_0 é um ponto crítico de ϕ então segue do teorema do modulo máximo para funções harmônicas que s_0 é um ponto de sela do gráfico em \mathbb{R}^3 da função u . Por causa desta observação alguns autores se referem a este método por Método do Ponto de Sela.

3.3.1 Caminhos de Descida Mais Íngreme

Um fato bem conhecido da teoria de funções reais de várias variáveis é que se $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $(x, y) \in U$ é tal que $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ então $\nabla f(x, y)$ aponta para direção em que f tem maior taxa de variação numa vizinhança do ponto (x, y) . Além do mais, quando $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ este vetor aponta para a direção em que f tem a maior taxa de crescimento numa pequena vizinhança possuindo (x, y) e por outro lado, $-\nabla f(x, y)$ aponta para a direção em que f tem a maior taxa de decrescimento também numa pequena vizinhança do ponto (x, y) .

A direção para o qual uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem a maior taxa de decrescimento será chamada de Direção de Descida mais Íngreme. Pelos fatos citados acima, sempre que $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ a direção de máxima descida será dada pelo vetor $-\nabla f(x, y)$.

Vamos considerar novamente funções complexas $\phi : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas com $\phi(s) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde $s = x + iy$. A cada ponto $s_0 = x_0 + iy_0$ temos associado a direção para a qual a função u tem seu decrescimento máximo, isto é, a Direção de Descida Mais Íngreme. Diremos que uma curva suave $\gamma \subset U$ é uma Curva de Descida Mais Íngreme para u se $\gamma'(t)$ aponta sempre para a Direção de Descida Mais Íngreme.

Proposição 3.1. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ uma região e $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa com $\phi(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Fixe $c \in \mathbb{R}$ e suponha que $v^{-1}(c)$ seja o traço de alguma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ não constante. Então γ é uma curva de taxa de variação máxima para u .*

Demonstração. Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ uma curva suave cujo o traço é o conjunto $v^{-1}(c)$. Pela definição de γ segue que

$$\nabla v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0. \quad (3.13)$$

Usando as equações de Cauchy-Riemann temos que

$$\nabla v(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} v(\gamma(t)), \frac{\partial}{\partial y} v(\gamma(t)) \right) = \left(-\frac{\partial}{\partial y} u(\gamma(t)), \frac{\partial}{\partial x} u(\gamma(t)) \right)$$

pela relação de ortogonalidade dada por (3.13) segue que

$$\gamma'(t) = \pm \left(\frac{\partial}{\partial x} u(\gamma(t)), \frac{\partial}{\partial y} u(\gamma(t)) \right).$$

Para concluir que γ é uma curva com taxa máxima de variação é suficiente observar que

$$|u(x, y) - u(\gamma(0))| \leq |\phi(x + iy) - \phi(\gamma(0))|$$

e que a igualdade é válida se, e somente se, $v(x, y) - v(\gamma(0)) = 0$. □

Capítulo 4

Análise Assintótica de $F_n(z)$ Longe do Ponto Crítico

Neste capítulo vamos encontrar uma expansão assintótica, quando $n \rightarrow \infty$, de $F_n(z)$ definida em (2.9). Salientamos que a expansão obtida aqui é uniforme para todo z fora de uma vizinhança fixada do ponto crítico da função $\phi(z)$.

Para expor as ideias do resultado que queremos obter para F_n , vamos iniciar considerando a seguinte integral

$$G_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{n\phi(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{n(s-1-\ln(s))} ds, \quad (4.1)$$

onde γ denota uma curva de Jordan suave, orientada positivamente e envolvendo a origem, que será precisamente especificada mais adiante na Definição 4.1.

Afim de obter expansões assintóticas precisas para G_n , quando $n \rightarrow \infty$, vamos aplicar O método da descida mais íngreme. Já que para a função ϕ de (4.1) temos

$$\phi'(z) = 1 - \frac{1}{z},$$

$z_0 = 1$ é seu único ponto crítico. Logo vem do Método da Descida Mais Íngreme que o caminho, passando por $z = 1$, tal que $\text{Re}(\phi(z))$ decaia com maior taxa é dado por $\text{Im}(\phi(z)) = 0$. Na figura abaixo, esboçamos as curvas $\text{Im}(\phi(z)) = 0$ (pontilhada), $\text{Re}(\phi(z)) = 0$ (curva sólida).

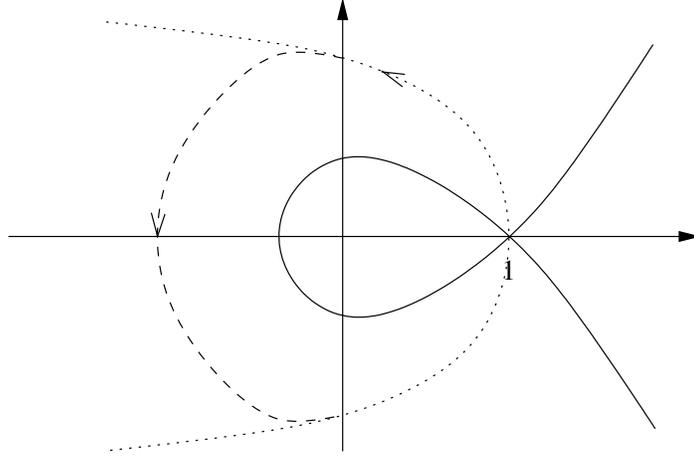


Figura 4.1: caminho de descida mais íngreme e curva de Szegö

Antes de prosseguirmos faremos uma pequena observação. Note que os pontos da curva de Szegö D_∞ , dados por

$$|ze^{1-z}| = 1 \quad \text{e} \quad |z| \leq 1, \quad (4.2)$$

são soluções da equação $\text{Re}(\phi(z)) = 0$ restrita ao disco unitário. De fato, suponha que $z = x + iy \in D_\infty$. Então tomando o logaritmo principal em (4.2) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \ln |z| + \ln(|e^{1-z}|) \\ &= \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + \ln(e^{1-x}) \\ &= \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - x + 1. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por (-1) obtemos $0 = \text{Re}(\phi(z))$. Logo, D_∞ coincide com a parte fechada da curva sólida da Figura 4.1.

Proposição 4.1. *Seja $\tilde{\gamma}$ o contorno fechado suave igual, no semi-plano direito, à curva pontilhada e à curva tracejada no semi-plano esquerdo (no semi-plano esquerdo pode ser qualquer curva suave que não intersecta a curva sólida) definidas na Figura 4.1. Então se U é uma vizinhança suficientemente pequena do ponto $z = 1$, existe uma constante $c > 0$, que depende de U , tal que*

$$G_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} e^{n\phi(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma} \cap U} e^{n\phi(s)} ds + O(e^{-nc}). \quad (4.3)$$

Demonstração. Sejam $\tilde{\gamma}(t)$ uma parametrização suave por partes de $\tilde{\gamma}$ no intervalo $[-1, 1]$ e U uma vizinhança contida no primeiro e quarto quadrantes. Suponha que $\tilde{\gamma}(0) = 1$. Pela continuidade de $\tilde{\gamma}$, sabemos que existe um número $0 < \delta < 1$ tal que para todo $t \in [-1, 1] \setminus [-\delta, \delta]$, temos $Re(\phi(\tilde{\gamma}(t))) < 0$ e $\tilde{\gamma}(t) \in U$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. De fato se fixamos $\delta > 0$ satisfazendo a condição acima, podemos fazer uma afirmação um pouco mais forte. Isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que $Re(\phi(\tilde{\gamma}(t))) < -c$, para todo $t \in [-1, 1] \setminus [-\delta, \delta]$ e $\tilde{\gamma}(t) \in U$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Seja $\tilde{\gamma}_\delta(t)$ a restrição de $\tilde{\gamma}(t)$ ao intervalo $[-1, 1] \setminus [-\delta, \delta]$. Já que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_\delta} e^{n\phi(s)} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_\delta} |e^{n\phi(s)}| |ds| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_\delta} e^{nR(\phi(s))} |ds| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} e^{-cn} L(\tilde{\gamma}_\delta), \end{aligned}$$

onde $L(\tilde{\gamma}_\delta)$ denota o comprimento de $\tilde{\gamma}_\delta$, temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_\delta} e^{n\phi(s)} ds = O(e^{-cn}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} e^{n\phi(s)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma} \cap U} e^{n\phi(s)} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_\delta} e^{n\phi(s)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma} \cap U} e^{n\phi(s)} ds + O(e^{-cn}). \end{aligned}$$

□

A proposição acima motiva a seguinte definição.

Definição 4.1 (Contorno Admissível). *Um contorno γ é dito admissível se*

- (i) *é uma curva Jordan suave contornando a origem no sentido anti-horário;*
- (ii) *tem distância positiva da curva sólida na Figura 4.1, exceto para parte que se encontra uma vizinhança fixada U de $z_0 = 1$. No conjunto U o contorno γ coincide com o caminho da descida mais íngreme (linha pontilhada na Figura 4.1).*

4.1 Análise de G_n numa vizinhança de $z = 1$

Nesta seção iremos estabelecer algumas mudanças de variáveis com o objetivo de aprofundar a análise de G_n numa vizinhança do ponto crítico $z = 1$. A ideia é aplicar, holomorficamente, uma vizinhança da origem sobre a vizinhança U do ponto $z = 1$, de forma que o eixo imaginário seja levado sobre o Caminho de Descida Mais Íngreme. Daí, com uma nova aplicação holomorfa, aplicamos o eixo real sobre o eixo imaginário. Assim, isso nos levará a uma integral sobre um intervalo do eixo real na qual se aplica o Método de Laplace.

Temos que $\phi(1) = \phi'(1) = 0$ e para $k \geq 2$, $\phi^{(k)}(1) \neq 0$, pois neste caso

$$\phi^{(k)}(z) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{z^k}. \quad (4.4)$$

Assim, uma vez que ϕ é uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, pode ser representada, numa vizinhança de $\lambda = 1$, pela série de potências

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} (\lambda - 1)^n. \quad (4.5)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \sum_{n \geq 2} \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} (\lambda - 1)^n \\ &= \frac{1}{2} (\lambda - 1)^2 + (\lambda - 1)^2 \sum_{n \geq 3} \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} (\lambda - 1)^{n-2} \\ &= \frac{1}{2} (\lambda - 1)^2 (1 + R(\lambda)), \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde

$$R(\lambda) = 2 \sum_{n \geq 3} \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} (\lambda - 1)^{n-2}. \quad (4.7)$$

Afirmção 4.1. A função $R(\lambda)$ definida acima é analítica no mesmo disco de convergência da Série (4.5) e $|R(\lambda) + 1| > 0$ em alguma vizinhança de $\lambda = 1$.

Demonstração. Seja $D_\rho(1)$ o disco de convergência da Série (4.5) e seja $\lambda_1 \in D_\rho(1)$. Então, pela convergência da série acima, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} (\lambda_1 - 1)^n \right| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, uniformemente em n temos

$$\left| \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} (\lambda_1 - 1)^{n-2} \right| \leq \frac{M}{(\lambda_1 - 1)^2} = \bar{M}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} (\lambda - 1)^{n-2} \right| &= \left| \frac{\phi^{(n)}(1)}{n!} \frac{(\lambda - 1)^{n-2}}{(\lambda_1 - 1)^{n-2}} (\lambda_1 - 1)^{n-2} \right| \\ &\leq \bar{M} \left| \frac{(\lambda - 1)}{(\lambda_1 - 1)} \right|^{n-2} \end{aligned}$$

Logo, por um critério de comparação, a Série (4.7) converge absolutamente em

$$|\lambda - 1| < |\lambda_1 - 1| < \rho.$$

Assim, pelo teorema de Taylor, converge uniformemente em no disco $D_{|\lambda_1 - 1|}(1) \subset D_\rho(1)$. Como λ_1 é tomando arbitrariamente em $D_\rho(1)$, podemos concluir que a convergência é uniforme em $D_\rho(1)$. Portanto, a mesma define $R(\lambda)$ como função analítica neste disco.

Uma vez que $R(\lambda)$ é uma função analítica ela também é uma função contínua. Daí, por definição de continuidade, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|R(\lambda) - R(1)| < \epsilon, \quad \text{sempre que } \lambda \in D_\delta(1) \cap D_\rho(1).$$

Como $R(1) = 0$, temos

$$|R(\lambda)| < \epsilon, \quad \text{sempre que } \lambda \in D_\delta(1) \cap D_\rho(1).$$

Então, tomando $\epsilon < 1$ e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$0 < |1 - \epsilon| < |1 - R(\lambda)| < |R(\lambda) + 1|.$$

Como queríamos demonstrar. □

Observação 4.1. $|R(\lambda) + 1| > 0$ implica que podemos compor $h(z) = \sqrt{z}$, cujo ramo é o eixo real negativo, com a função analítica $R(\lambda) + 1$.

Observação 4.2. A decomposição (4.6) é válida para qualquer função analítica que tenha um ponto de sela de ordem 1. Ou seja, se $g(z)$ é analítica em z_0 com $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ e $g^{(k)}(z_0) \neq 0$ para $k \geq 2$, então podemos escrever $g(z)$ como o produto de duas funções analíticas definidas em uma vizinhança de z_0 .

Proposição 4.2. *Seja $\phi : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, uma função analítica tal que $\phi(1) = \phi'(1) = 0$ e $\phi''(1) \neq 0$. Então existem vizinhanças $U, V \subset \mathbb{C}$ de 0 e 1, respectivamente e uma aplicação biholomorfa $\lambda : U \rightarrow V$, tal que*

$$\phi(\lambda(\xi)) = \xi^2, \quad \text{para todo } \xi \in U. \quad (4.8)$$

Veja a Figura 4.2, onde U está representada pelo disco de raio ρ e V pelo disco de raio δ .

Demonstração. Por (4.6), existe uma vizinhança V de 1, tal que para todo $\lambda \in V$, temos

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2(1 + R(\lambda)).$$

Pela Observação 4.1 a raiz de ϕ está bem definida em V e vamos denotá-la por ξ . Assim para todo $\lambda \in U_\delta(1)$, temos

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda - 1)\sqrt{1 + R(\lambda)}.$$

Claramente $\xi(\lambda)$ é uma função analítica e aplica uma vizinhança V de $\lambda = 1$ em uma vizinhança U de $\xi = 0$. Um cálculo simples mostra que,

$$\xi'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Então usando o Teorema da Função Inversa, concluímos que podemos escrever $\lambda = \lambda(\xi)$, definindo uma função que aplica uma vizinhança V de $\xi = 0$ sobre uma vizinhança U de $\lambda = 1$. □

Teorema 4.1 (Teorema da Função Inversa). *Seja $D \subseteq \mathbb{C}$ uma região aberta, $a \in D$ e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Se $f'(a) \neq 0$ então existem vizinhanças D_a de a e $D_{f(a)}$ de $f(a)$ tal que $f : D_a \rightarrow D_{f(a)}$ é inversível e vale $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$*

Observação 4.3. A proposição 4.2 é válida para qualquer função analítica que tenha um ponto de sela de ordem 1. Ou seja, se $g(z)$ é analítica em z_0 com $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ e $g^{(k)}(z_0) \neq 0$ para $k \geq 2$, então existe uma aplicação biholomorfa λ que aplica uma vizinhança V da origem numa vizinhança U de $z = z_0$ tal que $g(\lambda(z)) = z^2$. Esse fato é conhecido na literatura como o Teorema da Forma Local das Funções Analíticas.

Proposição 4.3. *A aplicação λ aplica o eixo imaginário sobre o caminho de descida mais íngreme, isto é, $\lambda(i\mathbb{R} \cap U_\rho(0)) = \gamma \cap U_\delta(1)$.*

Demonstração. O caminho de descida mais íngreme em $U_\delta(1)$ é caracterizado da seguinte forma

$$\gamma \cap U_\delta(1) = \{z \in U_\delta(1) : \text{Im}(\phi(z)) = \text{Im}(\phi(1)) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Re}(\phi(z)) \leq \text{Re}(\phi(1)) = 0\}.$$

Sabemos que se $\xi \in i\mathbb{R} \cap U_\rho(0)$, então ξ^2 é real e não positivo, isto é, $\xi^2 \leq 0$. Por outro lado, pela Proposição 4.2 temos que $\phi(\lambda(\xi)) = \xi^2$. Portanto, $\text{Re}(\phi(\lambda(\xi))) \leq 0$ e $\text{Im}(\phi(\lambda(\xi))) = 0$. Logo, pela caracterização acima, $\lambda(\xi) \in \gamma \cap U_\delta(1)$, como havíamos afirmado. □

Se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno podemos tomar a vizinhança U em (4.3) como um disco $U_\delta(1)$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \lambda(\xi)$ e usando Proposição 4.2 obtemos

$$G_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\rho}^{i\rho} e^{n\xi^2} \lambda'(\xi) d\xi + O(e^{-nc}).$$

Vamos introduzir uma nova mudança de variáveis para transformar a integral acima em uma integral Gaussiana. Ela também será usada no próximo capítulo. Assim considere

$$t = t(\xi) = -i\sqrt{n}\xi \tag{4.9}$$

Observemos que a imagem, por essa troca de variáveis, de $i\mathbb{R} \cap U_\rho(0)$, é o intervalo $(-\rho\sqrt{n}, \rho\sqrt{n})$. Assim, se $z \in U_\delta(1)$, então a mudança de variáveis $z = z(t) = \lambda\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$ leva

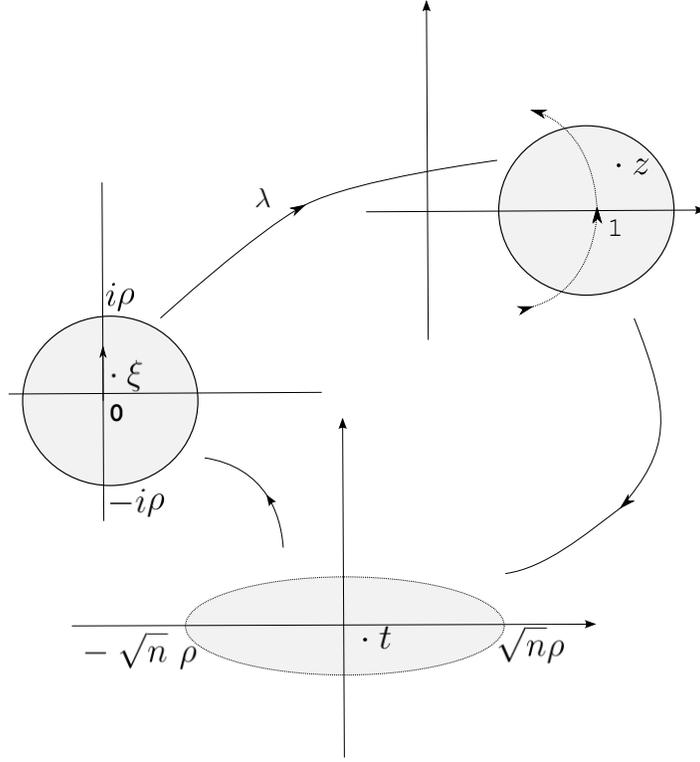


Figura 4.2: Mudanças de Variáveis

caminho de descida mais íngreme no eixo real.

Com efeito,

$$\phi(z) = \phi(\lambda(it/\sqrt{n})) = \frac{-t^2}{n}$$

Dai, se $z \in \gamma \cap U_\delta(1)$ então, $\lambda^{-1}(z) \in i\mathbb{R} \cap U_\rho(0)$, Ou seja, $\frac{it}{\sqrt{n}} \in i\mathbb{R} \cap U_\rho(0)$. Logo $i(\frac{it}{\sqrt{n}}) \in \mathbb{R}$, o que implica que $t \in \mathbb{R}$.

Usando (4.9) obtemos a seguinte expressão para G_n

$$G_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} e^{-t^2} \lambda'(it/\sqrt{n}) dt + O(e^{-nc})$$

Observe que embora λ tenha sido definida implicitamente, podemos usar o Teorema da Função Inversa e obter uma expansão em série de Taylor para λ centrada em $\xi = 0$, uma vez que $\lambda^{-1} = \xi(\lambda)$ é definida explicitamente. Por exemplo, podemos escrever

$$\lambda(\xi) = 1 + \sqrt{2}\xi + \frac{2}{3}\xi^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}\xi^3 + c_4\xi^4 + O(\xi^5)$$

assim,

$$\lambda'(\xi) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\xi + \frac{\sqrt{2}}{6}\xi^2 + 4c_4\xi^3 + O(\xi^4).$$

Ou seja,

$$\lambda'(it/\sqrt{n}) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}\frac{it}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{6n}t^2 + 4c_4\frac{1}{\sqrt{n}^3}(it)^3 + O\left(\frac{t^4}{n^2}\right).$$

Multiplicando $\frac{e^{-t^2}}{2\pi\sqrt{n}}$ em ambos os lados obtemos

$$\frac{\lambda'(it/\sqrt{n})e^{-t^2}}{2\pi\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}e^{-t^2}}{2\pi\sqrt{n}} + \frac{4ite^{-t^2}}{6\pi n} - \frac{\sqrt{2}t^2e^{-t^2}}{12\sqrt{nn}} + \frac{4c_4(it)^3e^{-t^2}}{2\pi n^2} + O\left(\frac{t^4}{n^{2+\frac{1}{2}}}\right)e^{-t^2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{\lambda'(it/\sqrt{n})e^{-t^2}}{2\pi\sqrt{n}} dt &= \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}e^{-t^2}}{2\pi\sqrt{n}} dt + \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{4ite^{-t^2}}{6\pi n} dt - \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}t^2e^{-t^2}}{12\pi\sqrt{nn}} dt \\ &\quad + \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{4c_4(it)^3e^{-t^2}}{2\pi n^2} dt + \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} O\left(\frac{t^4}{n^{2+\frac{1}{2}}}\right)e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Note que

$$\int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{4ite^{-t^2}}{6\pi n} dt = \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{4c_4(it)^3e^{-t^2}}{2\pi n^2} dt = 0,$$

pois são integrais de funções ímpares sobre intervalos simétricos.

No que segue vamos usar a famosa identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_{\rho\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2} dt = O(e^{-n\rho^2}).$$

De fato, seja $I = \int_{\rho\sqrt{n}}^R e^{-t^2} dt$. Então

$$I^2 = \int_{\rho\sqrt{n}}^R \int_{\rho\sqrt{n}}^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Seja $T : (0, R) \times (0, R) \rightarrow (\rho\sqrt{n}, R) \times (\rho\sqrt{n}, R)$ a transformação dada por

$$T(x, y) = (x, y) + \rho\sqrt{n}(1, 1).$$

Então, pelo teorema de mudança de variáveis segue que

$$\iint_{T((0,R)\times(0,R))} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{(0,R)\times(0,R)} e^{-(x+\rho\sqrt{n})^2-(y+\rho\sqrt{n})^2} dx dy$$

Assim,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-2x\rho\sqrt{n}-n\rho^2-y^2-2y\rho\sqrt{n}-n\rho^2} dx dy \\ &= e^{-2n\rho^2} \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} e^{-2\rho\sqrt{n}(x+y)} dx dy \\ &\leq e^{-2n\rho^2} \int_0^R \int_0^R e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &\leq e^{-2n\rho^2} \frac{\pi}{2} (-e^{-R^2} + 1) \\ &\leq e^{-2n\rho^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Onde usamos que $e^{-2\rho\sqrt{n}(x+y)} \leq 1$. Logo, $I = O(e^{-n\rho^2})$ como havíamos afirmado.

Temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\rho\sqrt{n}} e^{-t^2} dt + \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} e^{-t^2} dt + \int_{\rho\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= 2 \int_{\rho\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Portanto, segue da afirmação acima que

$$\int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} + O(e^{-n\rho^2}),$$

e daí

$$\begin{aligned} \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}e^{-t^2}}{2\pi\sqrt{n}} dt &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi\sqrt{n}} + O(e^{-n\rho^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} + O(e^{-n\rho^2}) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} t^2 e^{-t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} t \frac{d}{dt} (e^{-t^2}) dt \\ &= -\frac{1}{2} t e^{-t^2} \Big|_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} t^2 e^{-t^2} dt &= \rho\sqrt{n}e^{-n\rho^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} + O(e^{-n\rho^2}) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + O(e^{-n\rho^2}).\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}t^2 e^{-t^2}}{12\pi\sqrt{nn}} dt &= \frac{\sqrt{2}}{12\pi n\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + O(e^{-n\rho^2}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{1}{12n} + O(e^{-n\rho^2}) \right).\end{aligned}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned}\int_{-\rho\sqrt{n}}^{\rho\sqrt{n}} O\left(\frac{t^4}{n^{2+\frac{1}{2}}}\right) e^{-t^2} dt &= O\left(\frac{1}{n^{2+\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a seguinte expressão para G_n

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(1 - \frac{1}{12}n^{-1} + O(n^{-2}) \right)$$

4.2 Expansão Assintótica de $F_n(z)$, $z \notin U_\delta(1)$

Nesta seção obtemos expansão assintótica para $F_n(z)$, quando $n \rightarrow \infty$, com erro limitado uniformemente para todo z fora de uma vizinhança de $z = 1$. O comportamento assintótico de $F_n(z)$ para z em uma vizinhança de $z = 1$ será estudado no capítulo seguinte.

Teorema 4.2. *Fixe $z_0 \in \mathbb{C}$ e considere $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Seja $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e γ um contorno admissível segundo a Definição 4.1. Se*

(i) $\sup_{z \in \gamma} |h(z)| \leq M$, para alguma constante $M > 0$ (que pode depender de γ);

(ii) h é analítica em alguma vizinhança de $z = 1$;

(iii) $h(1) \neq 0$.

Então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(s) e^{n\phi(s)} ds = \frac{h(1)}{\sqrt{2\pi n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Demonstração. Pela hipótese (i) temos

$$\int_{\gamma} h(s) e^{n\phi(s)} ds = \int_{\gamma \cap U_{\delta}(1)} h(s) e^{n\phi(s)} ds + O(e^{-cn}).$$

Considere a mudança de variáveis $s = \lambda\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)$, introduzida na seção anterior, temos que a integral acima é dada por

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \int_{-\rho_0\sqrt{n}}^{\rho_0\sqrt{n}} h(\lambda(it/\sqrt{n})) e^{-t^2} \lambda'(it/\sqrt{n}) dt + O(e^{-cn}).$$

Vamos mostrar agora que podemos expandir esta expressão acima em potências de $1/n$ usando as expansões de λ em torno de 0 e h em torno de 1. Com efeito, da analiticidade local de h temos para t suficientemente pequeno que

$$h(\lambda(it/\sqrt{n})) = h(1) + h'(1)(\lambda(it/\sqrt{n}) - 1) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k(1)}{k!} (\lambda(it/\sqrt{n}) - 1)^k \quad (4.10)$$

com

$$\lambda(it/\sqrt{n}) = 1 + \sqrt{2}it/\sqrt{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k(0)(it/\sqrt{n})^k}{k!}. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} h(\lambda(it/\sqrt{n})) &= h(1) + h'(1) \left(\sqrt{2}it/\sqrt{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k(0)(it/\sqrt{n})^k}{k!} \right) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k(1)}{k!} \left(\sqrt{2}it/\sqrt{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k(0)(it/\sqrt{n})^k}{k!} \right)^k. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Multiplicando (4.12) por $\lambda'(it/\sqrt{n})e^{-t^2}$ e usando (4.11) vem

$$\begin{aligned} h(\lambda(it/\sqrt{n}))\lambda'(it/\sqrt{n})e^{-t^2} &= h(1) \left[\sqrt{2} + g_1(t) \right] e^{-t^2} \\ &+ h'(1)g_2(t) \left[\sqrt{2} + g_1(t) \right] e^{-t^2} \\ &+ g_3(t) \left[\sqrt{2} + g_1(t) \right] e^{-t^2} \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k\lambda^k(0)(it/\sqrt{n})^{k-1}}{k!}; \\
g_2(t) &= \sqrt{2}it/\sqrt{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k(0)(it/\sqrt{n})^k}{k!}; \\
g_3(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k(1)}{k!} \left(\sqrt{2}it/\sqrt{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k(0)(it/\sqrt{n})^k}{k!} \right)^k.
\end{aligned}$$

Fazendo $g(t) = g_1(t) + [h'(1)g_2(t) + g_3(t)] [\sqrt{2} + g_1(t)]$, temos

$$h(\lambda(it/\sqrt{n}))\lambda'(it/\sqrt{n})e^{-t^2} = h(1)\sqrt{2}e^{-t^2} + g(t)e^{-t^2}$$

Usando o método de Laplace e o fato que $g(0) = 0$, obtemos

$$\int_{-\rho\sqrt{n}}^{-\eta\sqrt{n}} g(t)e^{-t^2} dt = O(n^{-1}).$$

Pela hipótese (iii), $h(1) \neq 0$, segue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(s)e^{n\phi(s)} ds = \frac{h(1)}{\sqrt{2\pi n}} (1 + O(n^{-1})). \quad (4.13)$$

□

Se γ é um contorno admissível e $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, podemos aplicar o Teorema 4.2 a função $h_z(s) = (s - z)^{-1}$. Daí obtemos imediatamente uma representação assintótica para F_n dada por

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h_z(s)e^{n\phi(s)} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1 - z)} (1 + O(n^{-1})).$$

Note que o erro na expressão acima é uniforme para $z \in \mathbb{C} \setminus U$, onde U é uma vizinhança de 1. Assim acabamos de mostrar também o seguinte teorema.

Teorema 4.3. *Para qualquer contorno admissível γ e $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ temos*

$$F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1 - z)} (1 + O(n^{-1}))$$

onde o erro é uniforme para $z \in \mathbb{C} \setminus (U_\epsilon(1) \cup \gamma)$ para todo $\epsilon > 0$.

Capítulo 5

Análise de Riemann-Hilbert

Neste capítulo, vamos utilizar as representações (2.9) e (2.10) de p_{n-1} para empregar as técnicas de problemas de Riemann-Hilbert no estudo assintótico de p_n numa vizinhança de 1. A chave para isso, é que a função F_n definida em (2.9) é a transformada de Cauchy de $e^{n\phi}$ com respeito ao contorno γ . Assim, e esta é a característica da transformada de Cauchy que fornece uma conexão com o problema de Riemann-Hilbert, F_n é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$ e os valores de $F_n(z)$ diferem por $e^{n\phi(s)}$, quando z se aproxima de $s \in \gamma$ por lados opostos. Além disso, estas propriedades de F_n juntamente com o comportamento assintótico de $F_n(z)$ quando $z \rightarrow \infty$ caracterizam F_n como uma solução única de um problema de Riemann-Hilbert. Mais precisamente, vamos mostrar no Lema 5.1 que F_n é a única solução de um problema de Riemann-Hilbert escalar que denotaremos por $(RHP)_1$.

5.1 Caracterização de um Problema de Riemann-Hilbert escalar (RHP)

Considere σ um contorno em \mathbb{C} como sendo uma união finita de arcos suaves em \mathbb{C} que se intersectam numa quantidade finita de pontos e, também, que todas as intersecções sejam transversais. Suponha que cada um desses arcos seja orientado, de modo que cada arco de σ possua um lado *positivo* e um *negativo* - o lado positivo (negativo) fica do lado

esquerdo (direito) quando percorremos σ no sentido de sua orientação. Definimos

$$\sigma^0 = \sigma \setminus \{\text{pontos de auto-intersecção}\}$$

Sejam σ contorno com as propriedades citadas acima e $J : \sigma^0 \rightarrow \mathbb{C}$, uma função analítica.

Quando σ não for limitado vamos supor adicionalmente que $J(z) \rightarrow 1$ quando $z \rightarrow \infty$. O

par (σ^0, J) determina o seguinte problema chamado *Problema de Riemann-Hilbert escalar*

Encontrar uma função $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

(i) Φ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \sigma$;

(ii) $\Phi_+(s) = \Phi_-(s) \pm J(s)$;

(iii) $\Phi(z) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$,

onde $\Phi_+(s)$ e $\Phi_-(s)$ denotam os limites de $\Phi(z)$ quando $z \rightarrow s \in \sigma$, respectivamente, pelos lados positivo e negativo de σ .

Observação: A condição (iii) acima, em geral, é chamada de condição de normalização e usada para argumentar sobre a unicidade da solução do problema. Mas a unicidade de solução deste problema pode também ser mostrada por condições um pouco mais gerais. Para nossos propósitos o problema na forma descrita acima será suficiente. Para uma discussão completa veja [1].

Consideremos o seguinte problema de Riemann-Hilbert escalar que denotaremos por $(RHP)_1$. Fixamos um contorno admissível γ e $n \in \mathbb{N}$. O $(RHP)_1$ consiste então em encontrar uma função $Y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

(i) Y é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$;

(ii) $Y_+(s) = Y_-(s) + e^{n\phi(s)}$ para $s \in \gamma$;

(iii) $Y(z) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$.

A seguir enunciamos um resultado que é um fato geral sobre transformadas de Cauchy

Teorema 5.1 (Fórmula de Plemelj). *Seja C um contorno em \mathbb{C} e ψ Hölder contínua sobre C . Então, a integral de Cauchy*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(s)}{s-z} ds$$

possui valores limites $\Phi_+(s)$ e $\Phi_-(s)$ à medida que z tende a $s \in C$ pela esquerda e pela direita, respectivamente. Ambos satisfazem

$$\Phi_+(s) - \Phi_-(s) = \psi(s) \tag{5.1}$$

Veja a demonstração em [1][página 518, capítulo 7].

Lema 5.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ a função F_n , como definido em (2.9), página 26, é a única solução de $(RHP)_1$.*

Demonstração. Segue da representação integral de F_n dada em (2.9) que F_n é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$, logo (i) é válido.

Pelo Teorema 5.1 e pela fórmula (2.9) temos que

$$(F_n)_+(s) - (F_n)_-(s) = e^{n\phi(s)}$$

e portanto (ii) é válido. Usando (2.9) vamos mostrar agora que $F_n(z) \rightarrow 0$, quando $|z| \rightarrow \infty$. De fato,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} \right| |ds|$$

Como γ é um contorno admissível, ou seja, fechado, segue que existem constantes $A = A(n)$ e B tais que $|e^{n\phi(s)}| \leq A$ e $|s| \leq B$. Usando a desigualdade do valor absoluto para integrais e a segunda desigualdade triangular temos, para todo z satisfazendo $|z| > B$, que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} ds \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \left| \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} \right| |ds| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{A}{|s-z|} |ds| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{A}{|z| - B} |ds|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|F_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{n\phi(s)}}{s-z} ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{A}{|z|-B} |ds| \\
&= A \frac{L(\gamma)}{|z|-B} \rightarrow 0, \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

e assim verificamos (iii).

A fim de demonstrar a unicidade primeiro mostramos que a diferença Δ de duas soluções de $(RHP)_1$ é contínua sobre γ e, portanto pelo Teorema de Morera ela é inteira. O Teorema de Liouville, juntamente com a condição (iii), implicam que $\Delta(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. De fato, sejam Y, W soluções de $(RHP)_1$. Definamos $\Delta(z) = Y(z) - W(z)$. Dai,

$$\begin{aligned}
\Delta_+(s) &= Y_+(s) - W_+(s) \\
&= Y_-(s) + e^{n\phi(s)} - W_-(s) - e^{n\phi(s)} \\
&= Y_-(s) - W_-(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_-(s) &= Y_-(s) - W_-(s) \\
&= Y_+(s) - e^{n\phi(s)} - W_+(s) + e^{n\phi(s)} \\
&= Y_+(s) - W_+(s)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta_+(s) - \Delta_-(s) = 0$$

Logo, a função $\Delta(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \gamma$ e contínua em γ . Assim, segue da Observação 1.1, após o Corolário 1.3 do teorema de Morera que Δ é uma função inteira. Pela condição (iii) temos que Δ é limitada. Então, pelo teorema de Liouville segue $\Delta(z) = C$, onde C é uma constante, para todo $z \in \mathbb{C}$. Usando novamente (iii), concluímos que $C = 0$, ou seja, $\Delta(z) = 0$. □

5.2 Expansão assintótica de $F_n(z)$, $z \in U_\delta(1)$

Nesta seção obtemos uma expansão assintótica para $F_n(z)$, quando $n \rightarrow \infty$, e z próximo de $z = 1$. No capítulo anterior, procuramos expansões assintóticas para F_n via método de *Descida Mais Íngreme* e, a menos que z esteja numa vizinhança de $z = 1$, encontramos tais expansões cujo erro é limitado uniformemente. O objetivo dessa seção é obter uma expansão para F_n cujo erro seja limitado uniformemente para todo $z \in U_\delta(1) \setminus \gamma$.

Relembremos da seção 4.1, (4.9), que a mudança de variáveis $z \mapsto t$ com $z = \lambda(it/\sqrt{n})$, $z \in U_\delta$, aplica o *caminho de descida mais íngreme* sobre o eixo real e transforma $n\phi$ na forma normal, $n\phi(z) = -t^2$. Isso motiva as definições

$$h(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{u - \zeta} du, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

$$P_n(z) := h(-i\sqrt{n}\lambda^{-1}(z)), \quad z \in U_\delta(1) \setminus \gamma. \quad (5.3)$$

Note que e^{-z^2} é uma função Lipschitziana em \mathbb{R} , pois sua derivada é limitada, portanto Hölder contínua. Logo, pela Fórmula de Plemelj segue que

$$h_+(t) = h_-(t) + e^{-t^2}$$

para t em \mathbb{R} , onde $h_\pm(t) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} h(t \pm i\eta)$.

Substituindo $s = \lambda(it/\sqrt{n})$ obtemos

$$\begin{aligned} (P_n)_+(s) &= \lim_{z \rightarrow s^+} P_n(z) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} h(t + i\eta) \\ &= h_+(t). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
(P_n)_-(s) &= \lim_{z \rightarrow s^-} P_n(z) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^-} h(t - i\eta) \\
&= h_-(t).
\end{aligned}$$

Dai, concluimos que

$$(P_n)_+(s) = (P_n)_-(s) + e^{n\phi(s)}, \quad \text{para todo } s \in U_\delta(1) \cap \gamma.$$

P_n é, portanto, uma solução local do problema de Riemann-Hilbert $(RHP)_1$, em $U_\delta(1)$. Além disso, P_n é de natureza bastante explícita, uma vez que h está relacionada com a função erro complementar [8] [veja também 6.5] e os coeficientes de Taylor de λ de todas as ordens podem ser calculados explicitamente em $\xi = 0$, através da relação (4.8). Note, no entanto, que a solução local P_n não pode ser continuada analiticamente a uma solução global. Isso porque, $\lambda^{-1}(z) = \xi(z)$ tem singularidades fora de $U_\delta(1)$.

Iremos agora usar essa solução local para obter uma representação assintótica para F_n .

Seja $\epsilon > 0$ tal que o disco fechado $\overline{U_{2\epsilon}(1)}$ está contido em $U_\delta(1)$. Definimos

$$\tilde{m} = \begin{cases} F_n(z), & \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma \cup \overline{U_{2\epsilon}(1)}) \\ F_n(z) - P_n(z), & \text{para } z \in U_{2\epsilon}(1) \setminus \gamma. \end{cases} \quad (5.4)$$

Suponhamos $z \in U_{2\epsilon}(1) \setminus \gamma$. Então $\tilde{m} = F_n(z) - P_n(z)$, por definição. Sabemos que $(F_n)_+(s) = (F_n)_-(s) + e^{n\phi(s)}$ para todo $s \in \gamma$ e que $(P_n)_+(s) = (P_n)_-(s) + e^{n\phi(s)}$ para todo $s \in \gamma \cap U_\delta(1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\tilde{m})_+(s) - (\tilde{m})_-(s) &= (F_n)_+(s) - (F_n)_-(s) - ((P_n)_+(s) - (P_n)_-(s)) \\
&= e^{n\phi(s)} - e^{n\phi(s)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dai, uma vez que \tilde{m} é analítica em $U_{2\epsilon}(1) \setminus \gamma$ e contínua em $\in \gamma \cap U_{2\epsilon}(1)$, segue do teorema de Morera podemos estender \tilde{m} , sobre $U_{2\epsilon}(1)$, a uma função analítica. Denotamos esta função com um domínio de definição $U_{2\epsilon}(1)$ por m .

Considere os seguintes contornos orientados positivamente

$$\Gamma_1 := \partial U_{2\epsilon}(1), \quad \Gamma_2 := \gamma \setminus U_{2\epsilon}(1) \quad \Gamma := \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

A linha tracejada na Figura 5.1 apresenta um esboço de Γ .

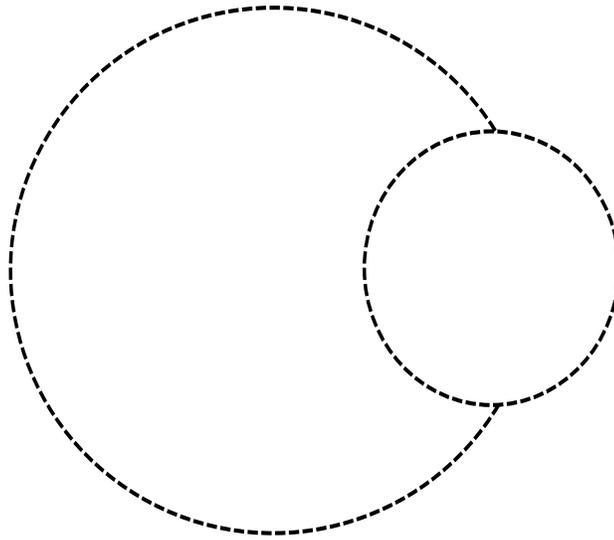


Figura 5.1: Esboço de Γ

Vamos mostrar que a função m é uma solução do seguinte problema de Riemann-Hilbert $(RHP)_2$

Determinar uma função analítica $M : \mathbb{C} \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

- (i) $M_+(s) = M_-(s) - P_n(s)$, para $s \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$
 $M_+(s) = M_-(s) + e^{n\phi(s)}$, para $s \in \Gamma_2$
- (ii) $M(z) \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$.

Como acima M_{\pm} denota os valores limites de M a partir do interior (+) e do exterior (-) de Γ .

De fato, seja $s \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$. Então para $z \in U_{2\epsilon}(1)$ temos

$$\begin{aligned} m_+(s) &= \lim_{z \rightarrow s^+} m(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow s^+} [F_n(z) - P_n(z)] \\ &= F_n(s) - P_n(s). \end{aligned}$$

Por outro lado, para $z \notin \gamma \cup \overline{U_{2\epsilon}(1)}$

$$\begin{aligned} m_-(s) &= \lim_{z \rightarrow s^-} m(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow s^-} F_n(z) \\ &= F_n(s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} m_+(s) - m_-(s) &= F_n(s) - P_n(s) - F_n(s) \\ &= -P_n(s), \end{aligned}$$

o que mostra a primeira equação em (i)

Consideremos agora, $s \in \Gamma_2$. Então

$$\begin{aligned} m_+(s) &= \lim_{z \rightarrow s^+} m(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow s^+} F_n(z) \\ &= (F_n)_+(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_-(s) &= \lim_{z \rightarrow s^-} m(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow s^-} F_n(z) \\ &= (F_n)_-(s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} m_+(s) - m_-(s) &= (F_n)_+(s) - (F_n)_-(s) \\ &= e^{n\phi(s)}, \end{aligned}$$

e isso mostra a segunda desigualdade em (i).

Note que para $|z|$ suficientemente grande, $m(z) = F_n(z)$. Dai, segue de (iii) de $(RHP)_1$ que m satisfaz (ii) de $(RHP)_2$. \square

Observe que a função $W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{m_+(s) - m_-(s)}{s - z} ds$ também resolve $(RHP)_2$. Daí, pela unicidade da solução

$$m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{m_+(s) - m_-(s)}{s - z} ds.$$

Então usando (i) de $(RHP)_2$ obtemos

$$m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-P_n(s)}{s - z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{e^{n\phi(s)}}{s - z} ds. \quad (5.5)$$

As orientações de Γ_1 e Γ_2 são escolhidas no sentido anti-horário de modo que o lado + esteja sempre à esquerda do contorno.

Observe que todo $z \in U_\epsilon(1)$ tem distância mínima ϵ de Γ de modo que o contorno de integração não passa pelas singularidades de $(s - z)^{-1}$ no integrando. Com isso, no que segue vamos considerar $z \in U_\epsilon(1)$. Além disso, a segue de (4.3) que a integral sobre Γ_2 é exponencialmente pequena de modo que a expansão assintótica de m é determinada apenas pela integral sobre Γ_1 .

Iremos agora obter uma expansão assintótica para m . Observe que não podemos usar o cálculo de resíduos para avaliar $\int_{\Gamma_1} \frac{P_n(s)}{s - z} ds$, pois P_n não é uma função meromorfa. Contudo, usando

$$\begin{aligned} \frac{1}{u - \zeta} &= -\frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - u/\zeta} \\ &= -\frac{1}{\zeta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{u}{\zeta}\right)^j \\ &= -\sum_{j=0}^{2r} \frac{u^j}{\zeta^{j+1}} + \frac{u^{2r+1}}{\zeta^{2r+1}(u - \zeta)} \end{aligned}$$

para qualquer $r \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\frac{e^{-u^2}}{u - \zeta} = - \sum_{j=0}^{2r} \frac{u^j}{\zeta^{j+1}} e^{-u^2} + \frac{u^{2r+1} e^{-u^2}}{\zeta^{2r+1}(u - \zeta)} .$$

Assim

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-u^2}}{u - \zeta} du = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{2r} \frac{u^j}{\zeta^{j+1}} e^{-u^2} du + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2r+1} e^{-u^2}}{\zeta^{2r+1}(u - \zeta)} du \quad (5.6)$$

Usando deformação de contorno, uma vez que a função $u^{2r+1} e^{-u^2}$ é analítica, podemos obter uma constante C tal que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2r+1} e^{-u^2}}{u - \zeta} du \right| \leq C, \quad \text{para todo } \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Temos também, pela linearidade da integral,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{2r} \frac{u^j}{\zeta^{j+1}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{2r} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^j}{\zeta^{j+1}} e^{-u^2} du.$$

Note que para j ímpar $u^j e^{-u^2}$ é uma função ímpar, o que implica $\int_{\mathbb{R}} \frac{u^j}{\zeta^{j+1}} e^{-u^2} du = 0$.

Dai podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=0}^{2r} \frac{u^l}{\zeta^{l+1}} e^{-u^2} du = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^r \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2j}}{\zeta^{2j+1}} e^{-u^2} du.$$

Por outro lado, para cada $0 \leq j \leq r$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2j}}{\zeta^{2j+1}} e^{-u^2} du &= \frac{2}{\zeta^{2j+1}} \int_0^{\infty} u^{2j} e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\zeta^{2j+1}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2j-1} u du \end{aligned} \quad (5.8)$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = u^2$, podemos notar que elevando ambos os membros a potência $j - 1/2$, obtemos $u^{2j-1} = x^{j-1/2}$. Já que $dx = 2udu$, segue do teorema de mudança de variáveis para integrais que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2j}}{\zeta^{2j+1}} e^{-u^2} du = \frac{2}{\zeta^{2j+1}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{j-1/2} e^{-x} dx.$$

Para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$ temos que $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx$. Logo, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{u^{2j}}{\zeta^{2j+1}} e^{-u^2} du = \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\zeta^{2j+1}}. \quad (5.9)$$

Usando (5.2), (5.6), (5.7) e (5.9) obtemos a seguinte desigualdade

$$\left| h(\zeta) + \frac{1}{2\pi i \zeta} \sum_{j=0}^r \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\zeta^{2j}} \right| \leq \frac{C}{|\zeta|^{2r+1}} \quad \text{para todo } \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (5.10)$$

Quando $s \in \Gamma_1$, por definição,

$$P_n(s) = h(-i\sqrt{n}\lambda^{-1}(s)).$$

Assim, o lado esquerdo da desigualdade (5.10) pode ser reescrito como

$$\left| P_n(s) + \frac{1}{2\pi i (-i\sqrt{n}\lambda^{-1}(s))} \sum_{j=0}^r \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{(-i\sqrt{n}\lambda^{-1}(s))^{2j}} \right|.$$

o que implica imediatamente, após simplificações de sinais, que (5.10) é dada por

$$\left| P_n(s) - \frac{1}{2\pi\sqrt{n}\lambda^{-1}(s)} \sum_{j=0}^r \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{n^j \lambda^{-1}(s)^{2j}} \right| \leq \frac{C}{|-i\sqrt{n}\lambda^{-1}(s)|^{2r+1}}. \quad (5.11)$$

Relembremos que $\lambda^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s-1)\sqrt{1+R(s)}$. Da afirmação 4.1 temos que $|1+R(s)| > c_1 > 0$, c_1 constante, uniformemente em $U_\delta(1)$. Já que para todo $s \in \Gamma_1$ temos $|s-1| = 2\epsilon$, segue que

$$\begin{aligned} |\lambda^{-1}(s)| &= \frac{1}{\sqrt{2}}|s-1| \cdot |\sqrt{1+R(s)}| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}2\epsilon c_2, \end{aligned}$$

onde $c_2 = \sqrt{c_1}$.

Dai, concluímos que $\frac{1}{|\lambda^{-1}(s)|} \leq \tilde{c}$, com $\tilde{c} = \frac{\sqrt{2}}{2\epsilon c_2}$ constante. Donde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{C}{|-i\sqrt{n}\lambda^{-1}(s)|^{2r+1}} &\leq \frac{C\tilde{c}^{2r+1}}{n^{\frac{2r+1}{2}}} \\ &= O(n^{\frac{1}{r+1/2}}). \end{aligned}$$

Usando novamente a igualdade $\lambda^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(s-1)\sqrt{1+R(s)}$, no lado direito da desigualdade (5.11) e a estimativa acima no lado esquerdo de (5.11) obtemos a seguinte representação assintótica para $P_n(s)$

$$P_n(s) = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \sum_{j=0}^r \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{n^j (s-1)^{2j+1} H_j(s)} + O(n^{\frac{1}{r+1/2}}), \quad (5.12)$$

onde $H_j(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+R(s)}\right)^{2j+1}$.

Definindo $G_j(s) = \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi} H_j(s)}$, podemos escrever (5.12) na seguinte forma

$$P_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sum_{j=0}^r \frac{G_j(s)}{n^j (s-1)^{2j+1}} + O(n^{-r}) \right). \quad (5.13)$$

Portanto

$$\int_{\Gamma_1} \frac{-P_n(s)}{s-z} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\int_{\Gamma_1} \sum_{j=0}^r \frac{-G_j(s)}{n^j (s-1)^{2j+1} (s-z)} ds - \int_{\Gamma_1} \frac{O(n^{-r})}{s-z} ds \right). \quad (5.14)$$

Como estamos tomando $z \in U_\epsilon(1)$, segue que $|s-z| \geq \epsilon$, ou seja $\frac{1}{|s-z|} \leq \frac{1}{\epsilon}$. Logo, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{O(n^{-r})}{s-z} ds = O(n^{-r})$. Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \sum_{j=0}^r \frac{-G_j(s)}{n^j (s-1)^{2j+1} (s-z)} ds &= \sum_{j=0}^r \frac{1}{n^j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-G_j(s)}{(s-1)^{2j+1} (s-z)} ds \\ &= \sum_{j=0}^r \frac{g_j(z)}{n^j}, \end{aligned}$$

onde $g_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-G_j(s)}{(s-1)^{2j+1} (s-z)} ds$. Segue da teoria de resíduos que para cada

$0 \leq j \leq r$, $g_j(z)$ é uma função analítica em $U_\epsilon(1)$. Por exemplo, se $j=0$ então

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-G_0(s)}{(s-1)(s-z)} ds \\ &= \frac{G_0(z) - 1}{z-1} \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{1+R(z)}}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+R(z)}}, \end{aligned}$$

podemos aplicar a regra L'Hopital, e obtemos que $g_0(1) = \frac{1}{3}$, $g_0'(1) = -\frac{1}{12}$. O que fornece

$$g_0(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(z-1) + O((z-1)^2).$$

Assim, (5.14) fica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{-P_n(s)}{s-z} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sum_{j=0}^r \frac{g_j(z)}{n^j} + O(n^{-r}) \right). \quad (5.15)$$

Com isso, usando as equações (5.5) e (5.15) obtemos a seguinte representação assintótica para m

$$m(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sum_{j=0}^r \frac{g_j(z)}{n^j} + O(n^{-r}) \right).$$

Escolhamos $\epsilon > 0$ tal que o disco fechado $\overline{U_{2\epsilon}(1)}$ está contido em $U_\delta(1) \cap U$, onde U é determinado pela curva γ (veja a Definição 4.1 (ii)). A partir da discussão acima (veja em particular (5.4), (5.5)), segue que a única solução, F_n , de $(RHP)_1$ pode ser escrita, para $z \in U_\epsilon(1)$, como

$$F_n(z) = P_n(z) + m(z) = P_n(z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sum_{j=0}^r \frac{g_j(z)}{n^j} + O(n^{-r}) \right).$$

Escolhendo ϵ menor, se necessário, podemos assegurar que todos os $G_j(z)$ são analíticas e não nulas em alguma região aberta contida em $\overline{U_{2\epsilon}(1)}$. O resto em (5.11) é uniforme para $s \in \partial U_{2\epsilon}(1)$.

Com isso, demonstramos o principal resultado desse estudo.

Teorema 5.2. *Existe $\epsilon > 0$ e funções analíticas g_j em $U_\epsilon(1)$ tais que para qualquer curva admissível γ e qualquer $r \in \mathbb{N}$ temos*

$$F_n(z) = P_n(z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\sum_{j=0}^r \frac{g_j(z)}{n^j} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \right), \quad (5.16)$$

onde o erro é uniforme para $z \in U_\epsilon(1) \setminus \gamma$ e os coeficientes de Taylor de todos os g_j são calculados explicitamente em $z_0 = 1$. Por exemplo,

$$g_0(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(z - 1) + O((z - 1)^2).$$

Capítulo 6

Localizando Zeros

Temos dois objetivos neste capítulo. O primeiro é mostrar que os zeros dos polinômios de Taylor reescalados, fora de vizinhanças de $z = 1$, convergem para a curva de Szegő. O segundo é enunciar resultados de pesquisa recentes sobre a convergência destes zeros à curva de Szegő nas vizinhanças de $z = 1$, bem como resultados sobre as taxas de convergência destes zeros à curva D_∞ .

Os argumentos e resultados apresentados nesta seção são expostos em detalhes em [9]. Os autores mostram como construir um contorno admissível γ e também $n - 1$ soluções distintas (juntamente com suas expansões assintóticas) da equação

$$e^{n\phi(z)} = F_n(z), \tag{6.1}$$

no interior da região delimitada por γ , para n suficientemente grande.

Por (2.10) podemos afirmar que cada zero de $p_{n-1}(nz)$ é uma solução da equação acima e vice-versa. Já que podemos argumentar que a equação acima possui $n - 1$ soluções distintas, e $p_{n-1}(nz)$ tem no máximo $n - 1$ zeros distintos temos a localização de todos os zeros deste polinômio.

Para mostrar a existência de $n - 1$ soluções distintas para (6.1) é suficiente mostrar a existência de $n - 1$ soluções distintas da equação abaixo no disco unitário $U_1(0)$

$$\tilde{\phi}(z) - \frac{1}{n} \ln F_n(z) = -\frac{2\pi ik}{n}, \tag{6.2}$$

onde $\tilde{\phi}$ é definido como ϕ em (2.9) com a única diferença que o ramo do logaritmo agora é o eixo real positivo em vez do eixo real negativo.

A existência e expansões assintóticas das raízes da equação (6.2) são obtidas por um procedimento padrão. Primeiro se constrói soluções $\alpha_{k,n}$ de

$$A_n(z) = -\frac{2\pi ik}{n} \quad (6.3)$$

onde A_n é uma aproximação bem escolhida da função $G_n(z) := \tilde{\phi}(z) - \frac{1}{n} \ln F_n(z)$. Então, podemos utilizar um argumento de contração para concluir que a equação original 6.2 tem uma única solução $z_{k,n}$ próxima de $\alpha_{k,n}$ para cada $1 \leq k \leq n-1$.

Já que é possível provar que o erro nas derivadas de (5.16) são uniformemente limitados, obtêm-se adicionalmente uma expansão assintótica para $z_{k,n}$, em termos de $\alpha_{k,n}$.

6.1 Zeros longe do ponto crítico.

Neste caso, basta usar aproximação

$$A_n(z) = \tilde{\phi}(z) = z - 1 - \tilde{\ln}(z),$$

onde $\tilde{\ln}$ denota o ramo do logaritmo descrito acima. As soluções $\alpha_{k,n}$ de (6.3) estão todas sobre a curva de Szegő D_∞ . Pode-se mostrar que a distância de $\alpha_{k,n}$ e $z_{k,n}$ é da mesma ordem que $A_n - G_n = \frac{1}{n}(\ln F_n) = O((\ln n)/n)$ (veja Teorema 4.3). Note que este resultado só é válido para $z_{k,n}$ que se encontram em um subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Enunciemos agora um resultado sobre expansão assintótica de $z_{k,n}$.

Teorema 6.1. *Existem polinômios $Q_j(x, y)$ de grau j na variável y e de grau $\leq 2j - 2$ na variável x tal que para $0 < \beta < 1$, $n^\beta < k \leq n/2$, e $r \in \mathbb{N}$ temos*

$$z_{k,n} = \alpha_{k,n} \left(\sum_{j=1}^{r-1} \frac{Q_j(\alpha_{k,n}, \ln[\sqrt{2\pi n}(\alpha_{k,n} - 1)])}{n^j (1 - \alpha_{k,n})^{2j-1}} \right) + O \left[\left(\frac{\ln n}{n} \right)^r \left(\frac{n}{k} \right)^{r-\frac{1}{2}} \right],$$

onde a constante no erro só depende da escolha de β e r . Os polinômios Q_j podem ser calculados explicitamente. Por exemplo, temos

$$Q_1(x, y) = -\frac{1}{2}y; \quad Q_2(x, y) = -\frac{1}{18}y^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{12}(x^2 + 10x + 1).$$

Para $r = 1$ (isto é, sem termos de correção), este resultado foi provado primeiro em [3, A.47].

Taxas mais rápidas de convergência podem ser obtidas por uso de melhores aproximações de F_n na definição de A_n , as quais são fornecidas pelo Teorema 4.3, ou seja,

$$A_n(z) = \phi(\tilde{z}) + \frac{1}{n} \ln(\sqrt{2\pi n}(1 - z)).$$

O preço que se paga para obter uma taxa mais rápida de aproximação é que as soluções aproximadas, $\alpha_{k,n}$, encontram-se agora sobre curvas D_n que dependem de n , ao invés de estarem na curva de Szegő. As correspondentes expansões dos zeros em termos de tais soluções aproximadas, $\alpha_{k,n}$, serão apresentadas em uma futura publicação pelos autores de [9]. Encontramos em [3, (A.48)] e [5] um estudo sobre tais melhores aproximações.

6.2 Zeros perto do ponto crítico.

Para formular o resultado, primeiro precisamos lembrar a definição da função erro complementar

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

onde o caminho de integração da última integral está sujeito à restrição de $\arg(t) \rightarrow \alpha$ com $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$ quando $t \rightarrow \infty$ ao longo do caminho. É bem conhecido, veja [8], que todas os zeros dessa função estão no segundo e terceiro quadrante do plano complexo (Ou seja, nas regiões $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi$ e $-\pi < \arg(z) < -\frac{\pi}{2}$), e que no segundo quadrante existe uma quantidade enumerável de zeros da função erro complementar. Denotaremos esses zeros por, w_k , $k \in \mathbb{N}$, e podemos ordená-los por módulo $|w_k| < |w_{k+1}|$. Nosso resultado sobre as soluções $z_{k,n}$, de (6.2) é escrita como segue.

Teorema 6.2. . *Existem polinômios q_j de grau j tal que para $0 < \beta < 1$, $1 < k < n^\beta$ e $r \in \mathbb{N}$ temos*

$$z_{k,n} = 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{q_j(\sqrt{2}w_k)}{n^{j/2}} + O\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{r/2}\right),$$

onde a constante no erro só depende da escolha de r e β . Além disso, os polinômios q_j podem ser calculados explicitamente, por exemplo,

$$q_1(x) = x; \quad q_2(x) = \frac{x^2 - 1}{3}; \quad q_3(x) = \frac{x^3 - 7x}{36}.$$

Esse resultado foi provado para $r = 2$ e $\beta < 1/3$ em [3, (A.34)] adaptando e estendendo resultados obtidos anteriormente em [11] e [5].

Se $|w_k| \sim \sqrt{2\pi k}$, quando $k \rightarrow \infty$, segue que o j -ésimo termo na expansão acima é de ordem $(\frac{n}{k})^{j/2}$. Em particular, temos que $|z_{k,n} - 1|$ é de ordem $\sqrt{\frac{k}{n}}$. Consequentemente, a expansão dos $z_{k,n}$ em termos dos zeros da função erro complementar é válido para todos os zeros no círculos de tamanho $n^{(\beta-1)/2}$. Assim, para qualquer $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n^{-(1/2)+\epsilon} < |z_{k,n} - 1| < n^{-\epsilon}$, encontramos nas seções 6.1 e 6.2 expansões distintas das soluções de (6.2).

Um pouco de cálculo mostra que o Teorema 6.2 fornece boas aproximações se os raios dos círculos são reduzidos a uma taxa $O(n^{-1/3})$, por outro lado as aproximações obtidas com $\alpha_{k,n}$ na curva de Szegő (ver Teorema 6.1) são melhores.

Terminamos explicando como a função erro complementar entra em cena na prova do Teorema 6.2. Introduzindo a função auxiliar

$$v(\zeta) := e^{\zeta^2} \operatorname{erfc}(\zeta),$$

verifica-se que $v(\zeta) = 2e^{\zeta^2} - v(-\zeta)$ é válida para $\zeta \in \mathbb{R}$ e, pelo princípio da identidade, em todo plano complexo. Já que v e a função erro complementar têm o mesmo conjunto de raízes, obtemos $2e^{w_k^2} v(-w_k)^{-1} = 1$. Estimativas elementares sobre os argumentos mostram que o valor correto do logaritmo é dada por

$$w_k^2 = -\ln(v(-w_k)/2) + 2\pi i k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

Em seguida, estabelecemos uma relação entre v e a função h definida em (5.2). Para todos ζ com parte real positiva vale a seguinte relação

$$v(\zeta) = 2h(i\zeta) \quad (6.5)$$

Para ver isso verifica-se que $g(\zeta) := 2h(i\zeta)e^{-\zeta^2}$ tem a mesma derivada e o mesmo comportamento limitante para $\zeta \rightarrow \infty$ que a função erro complementar. Seguindo o procedimento descrito no início desta seção e mantendo o resultado do Teorema 5.4 em mente, aproximamos G_n por

$$A_n(z) := \phi(\tilde{z}) - \frac{1}{n} \ln P_n(z).$$

definindo $\alpha_{k,n} := \lambda(w_k/\sqrt{n})$, usando que ϕ e $\tilde{\phi}$ coincidem no semi-plano superior, e que a parte real de w_k é positiva, obtemos das equações (4.8), (6.5) e (6.4)

$$A_n(\alpha_{k,n}) = \phi(\lambda(w_k/\sqrt{n})) - \frac{1}{n} \ln h(-iw_k) = \frac{1}{n} [w_k^2 - \ln(v(-w_k)/2)] = -\frac{2\pi ik}{n}$$

satisfazendo (6.3), como desejado.

Referências Bibliográficas

- [1] Ablowitz, M. J; Fokas, A. S. *Complex Variables-Introduction and Applications-Second Edition* Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2003.
- [2] Andrievskii, V. V; Carpenter, A. J; Varga, R. S. *Angular distribution of zeros of the partial sums of e^z via the solution of inverse logarithmic potential problem*, Comput. Methods Funct. Theory **6** (2006), no. 2, 447–458.
- [3] Bleher, P; Mallison, R. *Zeros of sections of exponential sums*, International Mathematics Research Notices **2006**, Art. ID 38937, 49 pages.
- [4] Buckholtz, J. D. *A characterization of the exponential series*, The American Mathematical Monthly **73** (1966), no. 4, part II, 121–123.
- [5] Carpenter, A. J; Varga, R. S; Waldvogel, J. *Asymptotics for the zeros of the partial sums of e^z . I*, The Rocky Mountain Journal of Mathematics **21** (1991), no. 1, 99–120.
- [6] Deift, P; Zhou, X. *A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the mKdV equation*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 2, 295–370.
- [7] Deift, P; Zhou, X. *Asymptotics for the Painlevé II equation*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), no. 3, 277–337.
- [8] Fettis, H. E; Caslin, J. C; Cramer, K. R. *Complex zeros of the error function and of the complementary error function*, Mathematics of Computation **27** (1973), no. 122, 401–407.

- [9] Kriecherbauer, T; Kuijlaars, A. B. J; McLaughlin, K. D. T-R; Miller, P. D. *Locating the zeros of partial sums of e^z with Riemann-Hilbert methods*
- [10] Miller, P. D. *Applied asymptotic analysis*, Graduate Studies in Mathematics **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [11] Newman, D. J; Rivlin, T. J. *The zeros of the partial sums of the exponential function*, Journal of Approximation Theory **5** (1972), no. 4, 405–412, *Correction*: Journal of Approximation Theory **16** (1976), 299–300.
- [12] Ostrovskii, I. V. *On zero distribution of sections and tails of power series*, Entire Functions in Modern Analysis (Tel-Aviv, 1997), Israel Math. Conf. Proc., vol. **15**, Bar-Ilan University, Ramat Gan, 2001, pp. 297–310.
- [13] Szegő, G. *Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe*, Sitzungsberichte, Berliner Mathematische Gesellschaft **23** (1924), 50–64.
- [14] Varga, R. S. *Scientific computation on mathematical problems and conjectures*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **60**, SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
- [15] Varga R. S; Carpenter, A. J. *Zeros of the partial sums of $\cos(z)$ and $\sin(z)$. I*, Numerical Algorithms **25** (2000), no. 1–4, 363–375.
- [16] Zemyan, S. M. *On the zeroes of the N -th partial sum of the exponential series*, The American Mathematical Monthly **112** (2005), no. 10, 891–909.