

Variável Complexa - 1

Leandro Cioletti

Notas de Aula
Janeiro - Maio de 2022



Autor

Leandro Cioletti

Versão 1. Março – Junho de 2021

Versão 2. Julho – Dezembro de 2021

Versão 3. Janeiro – Maio de 2022

Variável Complexa - 1
Notas de Aula. Janeiro – Maio de 2022¹

¹Copyright © 2022 Leandro Cioletti – Todos os direitos reservados.

Sumário

	Página
Módulo 1	1
Semana 1	2
Introdução	2
O Corpo dos Números Complexos	7
Módulo, Conjugado, Partes Real e Imaginária	11
Representação Polar e as Raízes n -ésimas da Unidade	14
Apêndice	20
Observações Históricas	20
Lista 1	23
Semana 2	26
Noções de Topologia no Plano Complexo	26
Convergência de Sequências de Números Complexos	26
Topologia no Plano Complexo	29
Conjuntos Conexos e Domínios	34
Caminhos no Plano Complexo	35
Conjuntos Conexos e Conexidade por Caminhos	40
Limites e Continuidade de funções em \mathbb{R}^2	43
Integrais de Linha e o Teorema de Green	46
Apêndice	54
Supremo e Ínfimo de Subconjuntos da Reta	54
Lista 2	57
Semana 3	59
Limites, Continuidade de Funções Complexas	59
A Derivada Complexa	63
As Condições de Cauchy-Riemann	66
Funções Holomorfas	74
A Exponencial Complexa	77
Funções Trigonômicas e Trigonômicas Hiperbólicas Complexas	80

<i>SUMÁRIO</i>	iii
Lista 3	82
Semana 4	84
Os Ramos do Argumento e do Logaritmo	84
Potências Arbitrárias	93
Lista 4	95
Semana 5	97
Séries Numéricas	97
Sequências de Funções e Convergência	105
Séries de Potências	111
Séries de Potências Centradas na Origem	112
Séries de Potências Centradas em $z = z_0$	122
Funções Analíticas	123
Princípio da Identidade	137
Lista 5	150
Módulo 2	153
Semana 7	154
A Integral Complexa	154
Primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo	154
Lista 6	155
Referências Bibliográficas	157
Índice Remissivo	158

Módulo 1

Semana 1

“You know also that the beginning is the most important part of any work”

—Plato’s Republic

1.1 Introdução

O conjunto dos números complexos \mathbb{C} pode ser construído de diversas maneiras. Algumas destas construções adotam abordagens puramente algébricas, enquanto outras são um pouco mais geométricas. O objetivo desta seção é apresentar três alternativas para se construir o conjunto dos números complexos.

Sem dúvida, entre todas as construções conhecidas a mais simples (porém abstrata) é aquela que introduz o conjunto dos números complexos como um conjunto abstrato de símbolos munido de duas operações binárias (soma e produto). Seus elementos são simplesmente símbolos da forma $a + ib$, onde a e b podem ser quaisquer números reais e a letra “ i ” é simplesmente um símbolo especial que será chamado de unidade imaginária. Por exemplo, $1 + i\pi$ é um elemento deste conjunto. Mas como nada foi dito ainda sobre as operações algébricas, por enquanto o símbolo $1 + i\pi$ só tem o significado de ser um amontoado de 4 caracteres escritos numa ordem especial. Em particular, nesta notação, apesar de sugerir, o símbolo “ $+$ ” ainda não tem significado de uma soma e nem o símbolo $i\pi$ de um produto. Poderíamos prosseguir com a brincadeira (sem graça e aparentemente sem sentido) de listar mais elementos deste conjunto, escrevendo por exemplo símbolos como $7 + i3$ ou $\frac{1}{2} + i9$ e assim por diante. Claramente, nada de interessante apareceria disto e muito menos claro ainda seria qual a relação deste conjunto com a ideia intuitiva de que já temos do que sejam números.

As responsáveis por estabelecer a relação entre o conjunto dos símbolos da forma $a + ib$ e a ideia de números são as operações algébricas de soma e produto definidas abaixo:

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Vamos ver agora um pouco do porquê a introdução destas operações dá vida à notação que usamos para apresentar o conjunto \mathbb{C} . Primeiro observe que se identificamos um elemento da forma $a + i0$ com o número real a , então podemos pensar que as operações definidas acima são extensões das operações usuais de

soma e produto de números reais. Isto é, a soma dos números complexos identificados com os números reais a e c é dada por $(a + i0) + (c + i0) = (a + c) + i0$ e portanto identificada com o número real $a + c$. Analogamente, o produto dos números complexos identificados com os números reais a e c , é dado pela expressão $(a + i0) \cdot (c + i0) = ac + i0$ que por sua vez é identificada com o número real ac .

Da forma como foram definidas as operações em \mathbb{C} somos levados naturalmente a identificar a unidade imaginária i com o número complexo $0 + i1$. Consequentemente, temos a relação $i^2 = i \cdot i = (0 + i1) \cdot (0 + i1) = -1 + 0i = -1$. Desta simples observação podemos concluir que existe pelo menos um número complexo $z = a + ib \in \mathbb{C}$ que resolve a equação $z^2 + 1 = 0$. Este fato enfatiza a importância da unidade imaginária dentro do conjunto \mathbb{C} , já que não existe nenhum número real x tal que $x^2 + 1 = 0$. Seguindo, vemos que a definição de produto nos permite interpretar o símbolo ib em $a + ib$ como um produto da unidade imaginária pelo número real b . Para isto usamos primeiros as identificações mencionadas acima, em seguida que $i \cdot b = (0 + i1)(b + 0i) = 0 + ib$ e por último identificamos $0 + ib$ com ib obtendo a interpretação desejada. O leitor mais atento deve ter observado que até este momento fomos cuidadosos com a ordem dos termos da nossa notação. Vamos voltar a este assunto mais a frente.

Com o exposto até aqui já podemos imaginar como proceder para extrair as demais propriedades algébricas básicas dos números complexos. Por outro lado, uma boa parcela dos leitores deve ter ficado com a sensação de que esta é uma construção muito abstrata e um tanto quanto artificial. Para remediar isto, vamos apresentar, em seguida, outra construção de caráter também algébrico, porém feita a partir de objetos matemáticos bem mais familiares, matrizes!

Antes de prosseguir observamos que independentemente de como seja construído o conjunto dos números complexos nele sempre devem existir três elementos muito especiais:

- uma unidade imaginária, tradicionalmente denotada por i ;
- um elemento neutro para a operação de produto, frequentemente denotado por 1 ou $\mathbb{1}$;
- um elemento neutro para a operação de soma, frequentemente denotado pelo símbolo 0 .

Além do mais, é fundamental, em qualquer que seja a construção, que a seguinte propriedade seja válida:

(P1) - o quadrado da unidade imaginária (quadrado com relação ao produto definido) somado ao elemento neutro do produto de ser igual ao elemento neutro da soma.

A fim de apresentar uma nova construção do conjunto dos números complexos satisfazendo a propriedade (P1) vamos explorar o espaço de matrizes. A exposição feita aqui é semelhante à apresentada na referência [Soa16]. A princípio esta estratégia poderia soar um pouco estranha, mas a verdade é que o conjunto de matrizes

com suas operações usuais é uma das poucas estruturas algébricas fora da lista \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{R} que conhecemos quando estamos começando a estudar matemática.

Como já mencionamos, certos espaços de matrizes já possuem estruturas naturais de soma e produto e assim parte das tarefas da construção (que consiste em apresentar as propriedades algébricas) já estariam realizadas. Por questão de simplicidade, é mais prudente iniciar nossa exploração pelo mundo das matrizes 2×2 com entradas reais. É claro que mais simples ainda seria começar pelas matrizes 1×1 com entradas reais, porém este espaço com suas operações usuais é idêntico (do ponto de vista algébrico) ao conjunto dos números reais. Desta forma não seria possível escolher nenhum elemento dentro deste conjunto para fazer o papel da unidade imaginária de forma que a propriedade (P1), nele, fosse satisfeita.

Denote por $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes 2×2 com entradas reais. Vamos adotar as notações $\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$ para denotar, respectivamente, as matrizes identidade e nula em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Isto é,

$$\mathbf{1} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{0} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lembre-se que $\mathbf{1}$ é o elemento neutro da operação usual de produto em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{0}$ é o elemento neutro da soma, neste conjunto. Portanto, perguntar se a propriedade (P1) é satisfeita em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ é equivalente a perguntar se existe alguma matriz $X \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$X \cdot X + \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad \text{equivalentemente} \quad X^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Se tal matriz existir ela é candidata natural para representar a unidade imaginária.

Para resolver a equação acima, precisamos verificar se existem $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com um pouco de paciência e utilizando o velho método de tentativa e erro, descobrimos rapidamente que o problema acima admite a solução $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$ e $w = 0$. Desta forma temos um candidato a unidade imaginária, que respeitando a tradição será denotado por

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apesar da propriedade (P1) ser satisfeita em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, não podemos usar o espaço como um todo para construir o conjunto \mathbb{C} . Uma das razões, que não mencionamos anteriormente, é que independentemente de como construímos \mathbb{C} a operação de produto deve ser comutativa. Por outro lado, é bem conhecido que a operação de produto em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ não é comutativa. Apesar desta nossa tentativa inicial ter sido frustrada rapidamente por esta obstrução, restaria ainda a esperança de se prosseguir com a construção considerando um subconjunto próprio de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ em que a operação de produto fosse comutativa. Adotando esta estratégia a primeira coisa que viria em mente é restringir nossa atenção apenas ao subconjunto das matrizes diagonais em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, pois sabemos que a multiplicação de matrizes restritas a este subconjunto é certamente comutativa. Mas,

infelizmente, isto nos causaria outro problema. A candidata à unidade imaginária, construída acima, não é um elemento do conjunto das matrizes diagonais. Já que a candidata a unidade imaginária proposta acima foi construída pelo método de erro e tentativa, poderíamos voltar à equação $X^2 + \mathbb{1} = 0$ e verificar se seria possível encontrar uma matriz diagonal em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que resolvesse este problema. Após alguns poucos cálculos descobriríamos que nenhuma matriz diagonal em $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ pode ser uma solução desta equação.

Para continuar nossa busca precisamos investigar se existem outros subconjuntos de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ que além de possuir a nossa já construída unidade imaginária seja tal que a operação de produto restrita a ele é comutativa. Isto nos leva naturalmente a considerar a seguinte pergunta.

Pergunta. Existe algum subconjunto de $\mathcal{C} \subset \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ possuindo a nossa candidata à unidade imaginária e também satisfazendo a seguinte propriedade: para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$ temos $A \cdot B = B \cdot A$?

Uma maneira de atacar este problema é começar construindo uma coleção matrizes, a mais simples possível, de forma que todos os elementos deste conjunto comutem entre si e também com a matriz

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para isto vamos usar o fato bem conhecido de que a matriz identidade $\mathbb{1}$ comuta com qualquer matriz e em particular com a matriz i . Na verdade, para todo $a \in \mathbb{R}$ temos que a matriz

$$a\mathbb{1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

comuta com a matriz i . De forma mais geral, dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ temos que as matrizes

$$a\mathbb{1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad bi = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

comutam.

Antes de prosseguir aproveitamos para observar que este é um bom momento para falarmos sobre a operação de soma, que permaneceu por um tempo esquecida da nossa discussão. O que queremos dizer é que em qualquer construção de \mathbb{C} a soma de quaisquer dois elementos deste conjunto deve também ser um elemento deste conjunto. Desta forma nossa construção dos números complexos precisa possuir o elemento

$$a\mathbb{1} + bi = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Isto nos motiva a propor o seguinte conjunto de $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ como uma construção do conjunto dos números complexos

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Várias propriedades exigidas de uma construção do conjunto dos números complexos já foram verificadas para este conjunto. Seguindo nossas notações uma matriz arbitrária pertencente ao nosso conjunto \mathbb{C} pode ser escrita como $a\mathbb{1} + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Uma outra propriedade importante que ainda não mencionamos sobre a construção de \mathbb{C} é que todo elemento não-nulo deve possuir um inverso multiplicativo. Isto é, para todo $a\mathbb{1} + bi$ em \mathbb{C} deve existir um elemento $c\mathbb{1} + di$ em \mathbb{C} tal que $(a\mathbb{1} + bi) \cdot (c\mathbb{1} + di) = \mathbb{1}$. O inverso multiplicativo de $a\mathbb{1} + bi$ é normalmente denotado por $(a\mathbb{1} + bi)^{-1}$.

Apesar da nossa construção não ter levado isto em conta, esta propriedade será válida. Para verificar este fato, vamos começar recordando que uma matriz $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ possui uma inversa se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. No nosso caso temos

$$\det(a\mathbb{1} + bi) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2.$$

Portanto, se a ou b for não-nulo então existe a inversa de $a\mathbb{1} + bi$. Como estamos trabalhando com matrizes 2×2 , conhecemos explicitamente a forma de sua inversa. Mais precisamente, nos casos em que a ou b são não-nulos o inverso multiplicativo de $a\mathbb{1} + ib$ sempre existe e é dado por

$$(a\mathbb{1} + bi)^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{a}{a^2 + b^2} \mathbb{1} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i,$$

o que permite verificar imediatamente que a matrix $(a\mathbb{1} + bi)^{-1}$ está no nosso conjunto \mathbb{C} .

Resta ainda mostrar que o produto entre duas matrizes do conjunto definido acima resulta em outra matriz que também pertence a este conjunto e que elas comutam entre si. De fato, dados dois elementos arbitrários $(a\mathbb{1} + bi)$ e $(c\mathbb{1} + di)$ do nosso conjunto \mathbb{C} , temos que

$$\begin{aligned} (a\mathbb{1} + bi) \cdot (c\mathbb{1} + di) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \\ &= (ac - bd)\mathbb{1} + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Procedendo das mesma maneira podemos verificar que

$$\begin{aligned} (a\mathbb{1} + bi) \cdot (c\mathbb{1} + di) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = (c\mathbb{1} + di) \cdot (a\mathbb{1} + bi). \end{aligned}$$

Este argumento conclui a nossa construção do conjunto dos números complexos. Antes de passar para a próxima construção que terá um caráter mais geométrico observamos que se, por um abuso de notação, omitimos o símbolo $\mathbb{1}$ da notação $a\mathbb{1} + ib$, então ficamos com simplesmente com $a + ib$. Este pequeno abuso de notação tornaria a notação dos elementos desta nova construção praticamente indistinguível daquela usada na construção apresentada no início deste capítulo.

1.2 O Corpo dos Números Complexos

“The sweeping development of mathematics during the last two centuries is due in large part to the introduction of complex numbers; paradoxically, this is based on the seemingly absurd notion that there are numbers whose squares are negative”

—E. Borel, 1952

Nesta seção vamos apresentar a prometida construção geométrica dos números complexos \mathbb{C} e em seguida vamos apresentar a definição do que é uma estrutura algébrica chamada de corpo.

O caráter geométrico presente nesta nossa próxima construção vem do fato que de agora vamos pensar o conjunto \mathbb{C} como sendo o conjunto de todos os pontos do espaço Euclidiano bi-dimensional $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Desta forma um ponto $z \in \mathbb{C}$ é representado por $z = (x, y)$ e portanto podemos pensar que os pontos de \mathbb{C} são vetores. Agora precisamos definir as operações de soma e produto entre estes elementos. A soma é definida como sendo a soma usual de vetores, isto é, se $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ então $z + w = (a + c, b + d)$. A multiplicação, por sua vez, é definida da seguinte maneira $z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$.

Desta forma o elemento neutro da operação de soma é dado pelo vetor $(0, 0)$ que denotaremos simplesmente por 0 . Já o neutro da multiplicação será o vetor $(1, 0)$, que denotaremos por $\mathbb{1}$. Por último verificamos que a unidade imaginária é representada pelo vetor $(0, 1)$, que também será denotado simplesmente por i . Desta forma um número complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito como $a\mathbb{1} + ib$, onde ib representa simplesmente a multiplicação do escalar b pelo vetor $(0, 1)$. Podemos novamente abusar da notação e omitir como na construção anterior o símbolo $\mathbb{1}$ e assim escrever um número complexo simplesmente na forma $a + ib$.

Antes de continuar é importante entender a diferença do significado da notação $a + ib$ nos três contextos discutidos até agora:

- na primeira construção $a + ib$ significava apenas uma concatenação de 4 caracteres;
- na segunda construção $a + ib$ representava a matriz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$;
- nesta terceira construção $a + ib$ representa o vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Afinal de contas o que há de comum nesta três construções? Existem então três conjuntos distintos de números complexos? Ou melhor o que é “o” conjunto dos números complexos?

A resposta para a primeira pergunta está ligada ao conceito de *corpo*.

Definição 1.1 (Corpo). *Um conjunto não-vazio \mathcal{C} munido de duas operações binárias, digamos “+” e “.” é chamado de corpo se as seguintes propriedades são satisfeitas. Dados $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{C}$ temos:*

- (1) *comutatividade*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
- (2) *associatividade*: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$;
- (3) *distributividade*: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$;
- (4) *elemento neutro para operação “+”*: isto é, existe um elemento em \mathcal{C} denotado por 0 satisfazendo $0 + z = z$;
- (5) *elemento neutro para operação “.”*: isto é, existe um elemento em \mathcal{C} denotado por 1 satisfazendo $1 \cdot z = z$;
- (6) *todo elemento $z \in \mathcal{C}$ possui um simétrico para operação “+”, denotado por $(-z)$, tal que $z + (-z) = 0$* ;
- (7) *todo elemento $z \in \mathcal{C}$ diferente do elemento 0 possui um inverso para operação “.”, ou seja existe um elemento denotado por z^{-1} tal que $z \cdot z^{-1} = 1$* .

A operação “+” que aparece na definição acima é em muitos contextos chamada de soma e a operação “.” é chamada de produto. A última, por sua vez, é até frequentemente omitida. Um corpo é então um conjunto \mathcal{C} munido de duas operações binárias “+” e “.” de forma que as condições de (1) a (7) da definição acima são satisfeitas. Desta maneira um corpo deve ser entendido como o trio ordenado $(\mathcal{C}, +, \cdot)$. Quando não houver perigo de confusão com relação a quem são as operações binárias, vamos denotá-lo simplesmente por \mathcal{C} .

Seguimos agora com resposta para a segunda pergunta. A rigor a resposta é afirmativa já que os conjuntos em cada uma das três construções apresentadas são completamente distintos. Por outro lado, estas três estruturas algébricas têm algo em comum que fazem com que do ponto de vista algébrica elas sejam indistinguíveis entre si. Isto é expresso de maneira precisa pela ideia de *isomorfismo* de corpos.

Definição 1.2 (Isomorfismos de Corpos). *Dizemos os dois corpos $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ e $(\mathcal{D}, \oplus, \odot)$ são isomorfos se existe uma bijeção $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que φ e sua inversa φ^{-1} preservam as operações binárias. Isto é, para todos $x, y \in \mathcal{C}$ e $u, v \in \mathcal{D}$ temos que:*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$ e $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$;
- $\varphi^{-1}(u \oplus v) = \varphi^{-1}(u) + \varphi^{-1}(v)$ e $\varphi^{-1}(u \odot v) = \varphi^{-1}(u) \cdot \varphi^{-1}(v)$.

É possível mostrar que as três construções apresentadas nestas notas definem três corpos distintos e além do mais que estes três corpos são dois-a-dois isomorfos, no sentido da definição dada acima.

Agora estamos prontos para responder a última pergunta. O que é o conjunto dos números complexos? Neste texto o conjunto dos números complexos \mathbb{C} será definido como o conjunto apresentado na primeira construção. É claro pelos comentários anteriores que não há diferença de pensar nos pontos de \mathbb{C} como vetores de \mathbb{R}^2 ou mesmo como matrizes 2×2 . Estes pontos de vista vão ajudar a compreender melhor os problemas a serem estudados. Para exemplificar isto, observamos que é mais fácil entender o significado da operação da soma $z + w$ pensando nos

pontos z e w sendo vetores. É mais fácil lembrar como funciona o produto $z \cdot w$ pensando na representação matricial da segunda construção. E por último é mais fácil fazer manipulações algébricas usando a primeira construção. Muito provavelmente em pouco tempo o leitor deve notar que estará trabalhando com as três construções/representações simultaneamente, sem perceber!

No restante desta seção faremos alguns cálculos simples para nos familiarizarmos com as operações com números complexos. Começamos observando que para efetuar o produto de $z = x_1 + iy_1$ e $w = x_2 + iy_2$ basta usar as propriedades distributiva e comutativa juntamente com a identidade $i^2 = -1$ como segue:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) - y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Em particular, temos

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (1.1)$$

Esta igualdade é bastante útil para ajudar a expressar quocientes de números complexos. O seguinte exemplo ilustra este fato. Para reduzir

$$\frac{(5 + i\pi) + (-1 + 4i)}{\sqrt{3} + 4i}$$

à forma $x + iy$, primeiro simplificamos o numerador:

$$\frac{(5 + i\pi) + (-1 + 4i)}{\sqrt{3} + 4i} = \frac{4 + i(\pi + 4)}{\sqrt{3} + 4i}.$$

Próximo passo consiste em observar que a expressão acima permanece inalterada se a multiplicamos e dividimos pelo número complexo $\sqrt{3} - 4i$

$$\begin{aligned} \frac{4 + i(\pi + 4)}{\sqrt{3} + 4i} &= \frac{4 + i(\pi + 4)}{\sqrt{3} + 4i} \cdot \frac{\sqrt{3} - 4i}{\sqrt{3} - 4i} \\ &= \frac{(4 + i(\pi + 4))(\sqrt{3} - 4i)}{3 + 4^2} \\ &= \frac{(4\sqrt{3} + 4\pi + 16) + i(\sqrt{3}\pi + 4\sqrt{3} - 16)}{19} \\ &= \frac{(4\sqrt{3} + 4\pi + 16)}{25} + i \frac{(\sqrt{3}\pi + 4\sqrt{3} - 16)}{19}. \end{aligned}$$

Observe que uma identidade análoga a (1.1) pode ser obtida considerando o caso mais geral em que os números reais x e y são substituídos por números complexos arbitrários z e w , isto é,

$$(z + iw) \cdot (z - iw) = z^2 - izw + w^2 + iwz = z^2 + w^2.$$

Entretanto, neste caso mais geral, não é possível assegurar que o lado direito da igualdade acima seja um número positivo. Aliás é muito simples construir diversos

exemplos que este resultado é inclusive um número negativo! Sugerimos que o leitor pense neste instante em um exemplo, para não cair na armadilha de pensar em z^2 como um número positivo.

Vamos encerrar esta seção chamando atenção para duas propriedades importantíssimas ligadas a estrutura algébrica de corpo que o conjunto dos números complexos possui.

Um fato bem conhecido sobre os números reais é que se $x, y \in \mathbb{R}$ são tais que $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$. No conjunto dos números complexos esta propriedade permanece válida. Já que a operação de produto em \mathbb{C} é bastante peculiar esta generalização requer então uma prova.

Proposição 1.3. *Sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$ números complexos. Se $z \cdot w = 0$ então $z = 0$ ou $w = 0$.*

Demonstração. Primeiro observamos que o produto de qualquer número complexo por zero é sempre zero. Portanto se multiplicamos ambos os lados da igualdade $z \cdot w = 0$ pelo número complexo $(a - ib)(c - id)$ ficamos com

$$z \cdot w \cdot (a - ib)(c - id) = 0 \cdot (a - ib)(c - id) = 0.$$

Lembrando da identidade $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ podemos verificar que o lado esquerdo da igualdade acima é dado por

$$\begin{aligned} z \cdot w \cdot (a - ib)(c - id) &= (a + ib)(c + id)(a - ib)(c + id) \\ &= (a + ib)(a - ib)(c + id)(c + id) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão na igualdade anterior concluímos que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0$. Mas agora temos um produto de dois números reais igual zero. Portanto pelo menos um dos fatores deve ser zero. Se for o primeiro, então $a^2 + b^2 = 0$ mas então $a = 0$ e $b = 0$ logo $z = a + ib = 0$. No outro caso o argumento é análogo. ■

A afirmação da proposição acima é na verdade válida para um corpo qualquer. Explorando a estrutura de corpo somos conduzidos inclusive a apresentar uma prova bem mais simples deste fato, usando uma ideia semelhante àquela empregada na prova acima. Basta observar que se \mathcal{C} é um corpo e $u, v \in \mathcal{C}$ são tais que $u \cdot v = 0$, então ou temos $u = v = 0$ ou um deles é diferente de zero. Digamos $u \neq 0$. Como estamos em um corpo e $u \neq 0$ então existe o inverso multiplicativo de u , isto é u^{-1} . Multiplicando ambos lados da equação $u \cdot v = 0$ por u^{-1} ficamos com $u^{-1} \cdot u \cdot v = 0 \cdot u^{-1}$. Simplificando as expressões em ambos os lados concluímos que $v = 0$. No caso $v \neq 0$ podemos usar argumentação semelhante já que a operação de produto é comutativa, o que permitiria trocar a ordem dos produtos e chegar à conclusão que $u = 0$. Este é exemplo muito interessante em que considerar a estrutura abstrata inspira a escrita de provas mais simples.

A outra propriedade que queremos destacar é que diferentemente do conjunto dos números reais o conjunto dos números complexos não admite uma relação de ordem compatível com a relação de ordem da reta. Vamos elaborar um pouco sobre isto. Em \mathbb{R} sabemos que dados dois números distintos x e y uma das seguintes alternativas sempre é válida. Ou $x < y$ ou $y < x$. Deste fato segue que o quadrado de qualquer número real não-nulo é sempre positivo. Desta observação podemos concluir que não existe nenhuma relação de ordem em \mathbb{C} compatível com a relação de ordem da reta já que $i^2 = -1$.

1.3 Módulo, Conjugado, Partes Real e Imaginária

Seja $z \in \mathbb{C}$ da forma $z = x + iy$, onde x e y são reais. Chamamos x de parte real de z e y de parte imaginária de z e nos referimos a elas usando as seguintes notações $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$. Pensando no número complexo z como um ponto de \mathbb{R}^2 , os números reais $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ representam as coordenadas de z . O subconjunto de todos os pontos de \mathbb{C} que satisfazem $\operatorname{Im}(z) = 0$ é chamado às vezes de eixo real e pensando em \mathbb{C} como \mathbb{R}^2 este conjunto então seria correspondente ao eixo x . Definimos também o eixo imaginário como sendo o conjunto dos números complexos satisfazendo $\operatorname{Re}(z) = 0$.

A noção de distância em \mathbb{C} será definida de maneira semelhante a \mathbb{R}^2 . Primeiro definimos o módulo de um número complexo $z = x + iy$ como sendo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Note que o módulo de z é exatamente a norma Euclideana do vetor de coordenadas (x, y) . Em seguida, dados $z, w \in \mathbb{C}$ definimos a distância entre eles como sendo $|z - w|$. Da observação anterior, segue que se pensamos que z e w são pontos de \mathbb{R}^2 então $|z - w|$ representa exatamente a distância Euclidiana entre estes dois pontos. Feita esta observação podemos concluir imediatamente que vale a desigualdade triangular também é válida em \mathbb{C} , isto é,

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

De maneira geral, podemos dizer que conceito de módulo importa para o conjunto dos números complexos toda a geometria Euclidiana. Sendo assim é natural imaginar que novas relações geométricas devam surgir da estrutura de produto presente em \mathbb{C} . Para explorar estas possibilidades vamos introduzir mais um conceito fundamental sobre números complexos.

Definição 1.4. O conjugado de um número complexo $z = x + iy$ é definido por $\bar{z} = x - iy$.

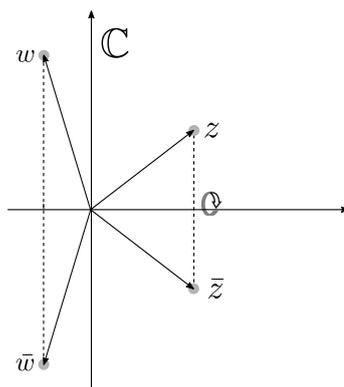


Figura 1.1: Os números complexos z e w representados no plano Euclidiano com seus respectivos conjugados.

Como ilustrado na Figura 1.1, \bar{z} pode ser interpretado geometricamente como sendo a reflexão de z em torno do eixo real.

Além do mais, podemos por meio da conjugação estabelecer uma forte relação entre produto (álgebra) e o norma (geometria) em \mathbb{C} que é dada pela identidade

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (1.2)$$

Abaixo vamos explorar o poder desta conexão apresentando uma prova da importantíssima desigualdade triangular usando majoritariamente a estrutura algébrica de \mathbb{C} . Antes, será conveniente apresentar algumas outras identidades que seguem diretamente das definições de conjugado e módulo e algumas de suas consequências.

Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ com $z = x + iy$ as seguintes identidades são válidas:

$$(I.1) \quad x = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z});$$

$$(I.2) \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z});$$

$$(I.3) \quad z \text{ está no eixo real, se e somente se, } z = \bar{z};$$

$$(I.4) \quad \overline{\bar{z}} = z;$$

$$(I.5) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$$

$$(I.6) \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w};$$

$$(I.7) \quad |zw| = |z||w|;$$

$$(I.8) \quad \text{se } w \neq 0 \text{ então } \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|};$$

$$(I.9) \quad |\bar{z}| = |z|.$$

Observamos que (I.7)-(I.9) são consequências de (I.6). A prova destas identidades podem ser feitas de diversas maneiras. Abaixo mostramos um argumento simples que fornece, por exemplo, (I.7) sem a necessidade de se trabalhar explicitamente das coordenadas dos números complexos z e w .

Para obter (I.7) a partir de (I.6) basta proceder da seguinte maneira. Primeiro usamos a identidade (1.2) para o número complexo zw e logo em seguida a identidade (I.6) para obter

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

Para finalizar basta tomar raiz-quadrada de ambos os lados da igualdade acima e lembrar que se x e y são números reais não-negativos, então $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.

Proposição 1.5. *Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ temos:*

$$i) \quad |z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2;$$

$$ii) \quad |z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2;$$

$$iii) \quad |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que a igualdade enunciada no item *i)* é verdadeira para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Note que segue da igualdade (1.2) que

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}. \end{aligned}$$

Usando (I.6) e (I.4) temos que $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{\bar{w}} = \bar{z}w = w\bar{z}$. O que mostra que a segunda e a terceira parcelas do lado direito da igualdade acima são conjugados uma da outra e vice-versa. Aplicando a identidade (I.1) ao número complexo $z\bar{w}$ e em seguida usando a observação feita no início deste parágrafo podemos concluir que $2\text{Re}(z\bar{w}) = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = z\bar{w} + w\bar{z}$. Usando esta igualdade na expressão que obtivemos acima para $|z+w|^2$ e lembrando que $z\bar{z} = |z|^2$ concluímos finalmente que

$$|z+w|^2 = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\text{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

A prova de *ii)* é consequência imediata do item *i)*. De fato, basta substituir w por $-w$, aplicar (I.6) depois (I.3) para verificar que

$$\text{Re}(z\overline{-w}) = \text{Re}(z\overline{(-1)w}) = \text{Re}(z\overline{(-1)\bar{w}}) = -\text{Re}(z\bar{w})$$

e observar que $|w| = |-w|$.

Para provar o item *iii)* basta somar lado-a-lado os dois itens anteriores. ■

Precisamos estabelecer mais dois fatos antes de apresentarmos a nossa prometida prova puramente algébrica da desigualdade triangular. Este fatos são na verdade estimativas das partes real e imaginária de um número complexo. Apesar da prova destas estimativas serem bastante simples, elas serão muito úteis por todo o texto.

Lema 1.6. *Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ temos*

$$-|z| \leq \text{Re}(z) \leq |z|$$

$$-|z| \leq \text{Im}(z) \leq |z|.$$

Demonstração. Esta prova é baseada em alguns fatos simples sobre números reais que serão recordados neste momento. O primeiro deles é o seguinte: se x e y são quaisquer números reais satisfazendo $|x| \leq |y|$, então $-|y| \leq x \leq |y|$. Outros fatos importantes que vamos utilizar são:

- a função raiz-quadrada é uma função monótona não-decrescente, isto é, para todo $0 \leq x \leq y$ temos $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$; e
- $\sqrt{x^2} = |x|$.

Já que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ temos sempre $x^2 \leq x^2 + y^2$ e também $y^2 \leq x^2 + y^2$ segue dos fatos citados acima que

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Já que qualquer número complexo z pode sempre ser escrito da seguinte forma $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$, temos da definição de módulo de um número complexo e das desigualdades acima para $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$ que

$$|\text{Re}(z)| \leq \sqrt{(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2} = |z|$$

e

$$|\text{Im}(z)| \leq \sqrt{(\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2} = |z|$$

Destas duas desigualdades e da observação sobre números reais feita no primeiro parágrafo desta prova, temos que

$$\begin{aligned} -|z| &\leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \\ -|z| &\leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|. \end{aligned}$$

■

Após estes longos preparativos, agora temos tudo pronto para finalmente apresentar nossa prova algébrica para a desigualdade triangular.

Teorema 1.7 (Desigualdade Triangular). *Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ temos*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Demonstração. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Pelo item *i*) da Proposição 1.5 temos

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Pelo Lema 1.6, (I.6) e (I.9) temos que $\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| = |z| |\bar{w}| = |z| |w|$. Usando esta desigualdade na igualdade acima ficamos com

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z| |w| + |w|^2.$$

Observando agora que o lado direito da desigualdade acima é um quadrado perfeito ficamos com

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z| |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Para finalizar basta lembrar que se x e y são números reais não-negativos e $x^2 \leq y^2$, então temos $x \leq y$. ■

1.4 Representação Polar e as Raízes da Unidade

A principal ideia desta seção é que se pensamos em um número complexo como um vetor em \mathbb{R}^2 então podemos descrevê-lo por suas coordenadas polares. Por causa da Fórmula de De Moivre (que será apresentada abaixo) veremos que este tipo de descrição será extremamente útil para trabalharmos sem dificuldades com potências de um número complexo z . Assim poderemos obter expressões matemáticas sucintas para z^n , qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Nesta seção será mais conveniente considerar um número complexo $z = x + iy$ como um ponto no espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 de coordenadas (x, y) . Lembre-se que todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ não-nulo admite uma representação única em coordenadas polares (r, θ) , com $0 < r$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Em coordenadas polares a coordenada r do ponto (x, y) é dada pela norma deste vetor, isto é, $r = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a coordenada θ é o ângulo determinado pelo segmento reta que une o ponto à origem e o semi-eixo positivo dos x , medido em radianos e no sentido anti-horário. As coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

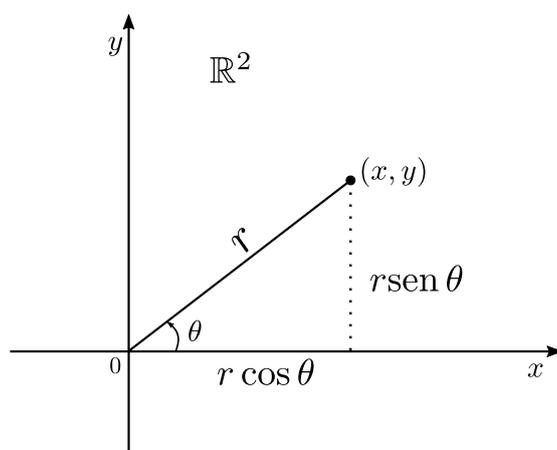


Figura 1.2: A descrição em coordenadas polares de um número complexo $z = x + iy$.

Daí segue que qualquer número complexo não-nulo $z = x + iy$ pode ser escrito como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, onde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esta é chamada de representação ou forma polar do número complexo z . O ângulo θ da forma polar é chamado de *um argumento* de z . Já que as funções seno e cosseno são funções periódicas de período 2π é natural pensar no ângulo $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, como também sendo um argumento de z . Para evitar este tipo de multiplicidade na determinação de um argumento é que restringimos acima as medidas de ângulos ao intervalo $[0, 2\pi)$. Desta maneira, cada número complexo não-nulo tem um argumento definido de forma única. Mais a frente quando estivermos trabalhando com as funções exponencial e logaritmo complexo vamos discutir em detalhes o conceito de *ramo do argumento*.

Exemplificando, o número complexo $z = 1 + 1i$ é identificado com o ponto $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ que tem norma $\|(1, 1)\| = \sqrt{2}$ e está localizado na bissetriz do primeiro quadrante sendo assim representado em coordenadas polares por $x = \sqrt{2} \cos(\pi/4)$ e $y = \sqrt{2} \operatorname{sen}(\pi/4)$. Portanto a representação polar de $z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4))$.

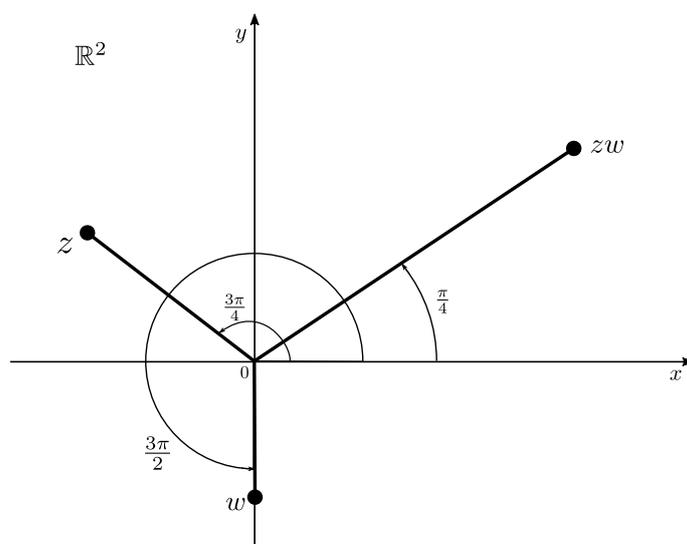
Vamos ver agora como fica a representação polar de um produto de dois números complexos. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ cujas representações polares são dadas por

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ w &= s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta). \end{aligned}$$

Para obter a representação polar de zw basta efetuar o produto destes dois números em suas representações polares e usar as fórmulas bem conhecidas para seno e cosseno da soma de dois ângulos como segue:

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \\ &= rs((\cos \theta \cos \beta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta) + i(\cos \theta \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \theta \cos \beta)) \\ &= rs(\cos(\theta + \beta) + i \operatorname{sen}(\theta + \beta)). \end{aligned} \tag{1.3}$$

É muito importante observar que $\theta + \beta$ não é necessariamente um argumento de zw , no sentido de que este ângulo pode estar fora do intervalo $[0, 2\pi)$. Isto poderia acontecer se os argumentos de z e w fossem, por exemplo, ambos maiores que π . Veja o exemplo da figura abaixo:

Figura 1.3: Um argumento do produto zw

No exemplo da figura acima temos

$$z = |z|(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4))$$

$$w = |w|(\cos(3\pi/2) + i \operatorname{sen}(3\pi/2)).$$

Aplicando a fórmula que deduzimos acima, ficamos com

$$zw = |z||w|(\cos(9\pi/4) + i \operatorname{sen}(9\pi/4)).$$

Note que tudo está correto, mas como o ângulo que nossa fórmula para o produto fornece resulta em um valor maior que 2π quem de fato representará o argumento do produto zw , no intervalo anteriormente especificado $[0, 2\pi)$, será o ângulo $\pi/4$, como mostrado na figura acima.

Este exemplo alerta para o fato de que, em geral, não é verdade que um argumento de um produto zw é igual a soma dos argumentos de z e w . Porém a menos de múltiplos inteiros de 2π isto é de fato verdadeiro. Mais a frente, quando apresentarmos a definição de ramo do argumento, de um número complexo z , que será denotado por $\arg(z)$, poderemos escrever esta última observação de modo mais sucinto através da notação abaixo

$$\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi},$$

onde para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ o símbolo $\alpha \pmod{2\pi}$ denota o único ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ com a propriedade que existe um único inteiro k tal que $\theta + 2k\pi = \alpha$.

Tomando $w = z$ em (1.3) obtemos

$$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)).$$

Esta igualdade sugere que as potências sucessivas z admite a seguinte representação

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta afirmação é de fato verdadeira e pode ser facilmente obtida procedendo uma indução formal em n e usando a identidade (1.3). Esta identidade é conhecida como Fórmula de De Moivre. Vamos usá-la no que segue para extrair raízes de um número complexo não-nulo arbitrário.

Seja w um número complexo não-nulo. Uma raiz n -ésima (ou de ordem n) de w é um número complexo z satisfazendo a equação

$$z^n = w.$$

Para procurar uma raiz n -ésima de w vamos reescrever a equação acima usando coordenadas polares. Sejam $\beta \in [0, 2\pi)$ um argumento de w e $s = |w|$ a norma de w . Vamos escrever z em coordenadas como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Pela Fórmula de De Moivre temos que $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$. Portanto

$$z^n = w \iff r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta). \quad (1.4)$$

Tomando módulo dos dois lados da última igualdade acima, usando (I.7), $s > 0$, $r \geq 0$ e que $|\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha| = 1$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$|r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))| = |s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)|$$

$$\Downarrow$$

$$r^n |\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)| = s |\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta|$$

$$\Downarrow$$

$$r^n = s.$$

Portanto $r = \sqrt[n]{s}$ e isto implica que qualquer solução z da equação $z^n = w$ é tal que $|z| = \sqrt[n]{s}$. Já que $s > 0$ e $r^n = s$ podemos concluir de (1.4) que o argumento θ de qualquer solução da equação satisfaz $\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta$. Já que dois números complexos são iguais se e somente se suas partes real e imaginária coincidem, podemos afirmar que θ é solução do sistema não-linear

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \cos \beta \\ \operatorname{sen}(n\theta) = \operatorname{sen}(\beta). \end{cases}$$

Usando que as funções seno e cosseno são funções periódicas de período 2π concluimos que para cada $k \in \mathbb{Z}$ fixado o ângulo $\theta \equiv \theta(k, \beta)$ satisfazendo a igualdade $n\theta = \beta + 2k\pi$ é uma solução do sistema acima. Para representar z em coordenadas polares é preciso escolher dentre todas estas soluções apenas aquelas que satisfazem a condição $\theta \in [0, 2\pi)$. Desta forma só nos interessa os valores de k para os quais temos

$$0 \leq \frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n} < 2\pi. \quad (1.5)$$

Lembrando que $\beta \in [0, 2\pi)$ temos que

$$0 \leq \frac{\beta}{n} < \frac{2\pi}{n}. \quad (1.6)$$

Usando a primeira desigualdade que aparece em (1.5) e em seguida a segunda desigualdade em (1.6) obtemos a seguinte as seguintes desigualdades

$$-\frac{2\pi k}{n} \leq \frac{\beta}{n} < \frac{2\pi}{n} \implies -\frac{2\pi k}{n} < \frac{2\pi}{n} \implies -k < 1 \implies k > -1.$$

Já que k tem que ser um número inteiro então k deve ser escolhido de forma que $k \geq 0$.

Usando agora a segunda desigualdade em (1.5) e a primeira desigualdade em (1.6) temos que

$$\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n} < 2\pi \implies \frac{2k\pi}{n} < 2\pi - \frac{\beta}{n} < 2\pi \implies 2k\pi < 2n\pi \implies k < n.$$

Juntando esta restrição com a anterior podemos ver que devemos escolher $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Desta forma cada um dos números complexos

$$z_k = \sqrt[n]{s} \left(\cos \left(\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\beta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (1.7)$$

é uma solução de $z^n = w$. Como esta equação admite no máximo n soluções e a lista acima possui exatamente n elementos concluímos finalmente que os números $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ são todas as soluções possíveis desta equação.

Um caso particular muito importante é o caso em que $w = 1$. Neste caso as soluções da equação $z^n = 1$ são chamadas de raízes n -ésimas da unidade. Para $w = 1$, temos $s = 1$ e $\beta = 0$. Logo fórmula das raízes n -ésimas obtida acima se reduz a

$$z_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Este conjunto é chamado do conjunto das raízes n -ésimas da unidade. Ele pode ser também descrito, graças a Fórmula de De Moivre, de uma maneira ainda mais sucinta, isto é, como um conjunto de potências sucessivas do número complexo $\omega = z_1 =$ isto é, $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$.

A título de exemplo vamos calcular as raízes cúbicas e quarta da unidade. Primeiro as raízes cúbicas da unidade. Usando a fórmula deduzida acima temos que as raízes cúbicas da unidade são dadas por $\{1, \omega, \omega^2\}$, onde

$$\omega = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e pela Fórmula de De Moivre

$$\omega^2 = \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Para calcular as raízes quartas da unidade basta proceder como acima, mas observando que agora o conjunto é dado por $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3\}$, com ω neste caso dado por

$$\omega = \cos \left(\frac{2\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{4} \right) = i.$$

Logo $\omega^2 = i^2 = -1$ e $\omega^3 = -i$.

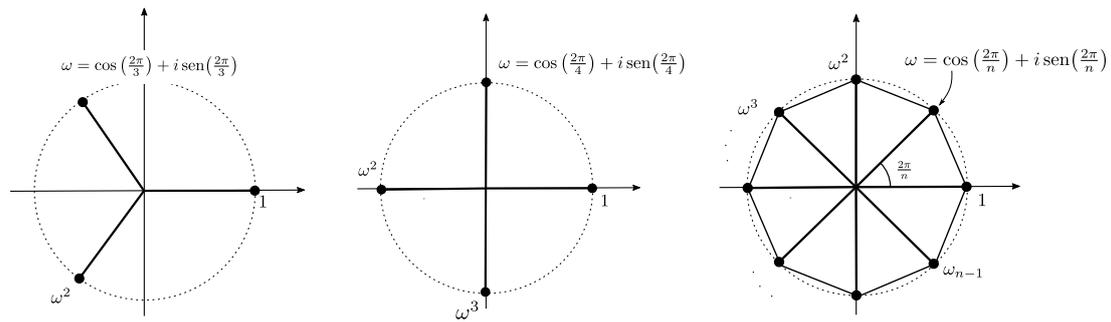


Figura 1.4: Primeira figura representa as raízes cúbicas da unidade, a segunda as raízes quartas da unidade, e a última o caso geral das raízes n -ésimas da unidade.

Para finalizar esta seção observamos que as raízes n -ésimas da unidade determina o conjunto de vértices de um polígono regular n lados inscrito no círculo de centro zero e raio um, como mostrado na Figura 1.4.

Apêndice

Esta seção é baseada em um dos volumes da fantástica coleção de livros de Análise escritas por Barry Simon. Fora o exemplo que é totalmente desenvolvido aqui as demais informações seguem de perto a exposição de Barry Simon e podem ser encontradas no Capítulo 1 da referência [Sim15].

1.A Observações Históricas

O uso de expressões como “imaginário” e “complexo” atestam que o processo de aceitação dos números complexos foi bastante difícil. Podemos pensar que, dada a fórmula para soluções da equação quadrática, que raízes quadradas de números negativos tivessem um passado muito antigo. Muitos imaginam que a motivação para se introduzir números complexos tenha vindo de tempos antigos e de pessoas que se sentiam desconfortáveis com o fato de equações como $x^2 + 1 = 0$ não ter solução. A verdade é que os números complexos vieram mesmo do estudo de equações cúbicas, da forma

$$x^3 - ax - b = 0.$$

Em 1515, Scipione del Ferro (1465-1526) deduziu que

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} \quad (1.8)$$

era uma solução desta cúbica, mas nunca publicou sua descoberta. O mais intrigante e que mesmo em casos onde

$$\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27} < 0 \quad (1.9)$$

a solução de del Ferro fornecia, depois de simplificada, um número real como solução da cúbica!

Um caso muito particular mas que ilustra bem como deve ter sido desafiante para del Ferro entender o que estava acontecendo é o caso em que tomamos $b = 2$ e $a = 3\sqrt[3]{2}$. Estes valores foram escolhidos para fazer com que a expressão do lado esquerdo da desigualdade (1.9) seja exatamente -1 e portanto

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt[2]{(-1)}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt[2]{(-1)}}$$

O que obviamente era uma expressão que del Ferro, na época, deveria considerar muito intrigante, principalmente porque o número x que aparece acima (apesar

desta representação complexa) é na realidade um número real! Vamos provar este fato abaixo, porém, usando ferramentas do século XX.

Primeiro precisamos fazer uma escolha para $\sqrt[2]{(-1)}$. A escolha mais natural hoje em dia é definir este número como sendo uma das duas soluções distintas da equação $z^2 = -1$. Na seção anterior vimos como calcular as raízes desta equação e que elas são dadas por $z = i$ e $z = -i$. A simetria presente na expressão de del Ferro fará com que o valor x seja o mesmo para qualquer uma das duas escolhas $\sqrt[2]{(-1)} = i$ ou $\sqrt[2]{(-1)} = -i$. Por simplicidade vamos tomar $\sqrt[2]{(-1)} = i$. Substituindo na expressão acima ficamos com

$$x = \sqrt[3]{1+i} + \sqrt[3]{1-i}.$$

Raciocinando de maneira análoga, podemos definir $\sqrt[3]{1+i}$ como sendo (na notação da seção anterior) a solução z_0 da equação $z^3 = 1+i$. Para isto basta escrever $1+i$ em coordenadas polares $1+i = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sen \pi/4)$ e usar a fórmula dada para z_0 , obtendo a seguinte expressão:

$$\sqrt[3]{1+i} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sen\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

Repetimos o mesmo procedimento para $\sqrt[3]{1-i}$. Novamente, para encontrar a solução z_0 da equação $z^3 = 1-i$ primeiro escrevemos $1-i$ em coordenadas polares $1-i = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i \sen(7\pi/4))$. Depois aplicamos a fórmula para z_0 e temos que

$$\sqrt[3]{1-i} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sen\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right).$$

Já que os senos que aparecem nas duas expressões em destaque acima, quando somados, se anulam e os cossenos têm o mesmo valor descobrimos que

$$x = 2\sqrt[6]{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt[6]{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Com esta raiz em mãos é simples descobrir quais são as outras duas, basta aplicar o algoritmo da divisão de polinômios e em seguida a Fórmula de Bhaskara. Feito isto descobrimos que todas as suas raízes são reais e dadas por

$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}, \quad x = -\sqrt[3]{4} \quad \text{e} \quad x = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}.$$

A fórmula de del Ferro (1.8) foi publicada em um livro de Girolamo Cardano (1501-1576) em 1545. Apesar do livro de Cardano ter exemplos onde $b^2/4 - a^3/27 < 0$ ele nunca aplicou a fórmula neste casos!

Vinte e sete anos mais tarde, Rafael Bombelli (1526-1572) publicou um livro que continha instruções do que viria a ser no futuro as regras da aritmética no conjunto dos números complexo e as usou para encontrar raízes reais de cúbicas a partir da fórmula de del Ferro. A publicação chave para deslançar a teoria dos números complexos foi o trabalho de Wallis e Euler que apareceram por volta de 1748. Em particular, nesta época Euler esclarece como deveriam ser entendidas as raízes da unidade. Usando suas técnicas ele mostra que (1.8) era uma fórmula que na verdade representa não apenas uma, mas em diversos casos várias das

raízes da cúbica. Mesmo após estas grandes descobertas ainda foram necessários mais cem anos para a comunidade matemática aceitar completamente os números complexos. Assim muito do trabalho de Cauchy (que é um dos pais fundadores da teoria do cálculo integral e diferencial de funções complexas) foi realizado em uma atmosfera em que mesmo o próprio Cauchy não se sentia muito confortável.

O ponto de vista geométrico dos números complexos, como pontos do plano Euclidiano, foi introduzido por Jean-Robert Argand(1768-1822) e Caspar Wessel (1745-1818) e defendida por Gauss. Argand e Wessel não eram matemáticos profissionais. Wessel era um agrimensor e apresentou sua interpretação geométrica para a Academia Real Dinamarquesa em 1797. Em seguida, em 1799 seu trabalho foi publicado e pouco depois esquecido e não teve nenhum impacto. Mais tarde a abordagem geométrica foi redeseñolvida por dois matemáticos dinamarqueses Sophus Christian Juel e o famoso Sophus Lie.

Argand era um contador e livreiro, e em 1806 publicou por conta própria seu trabalho em um livro que apareceu sem o seu nome! Em 1813 um matemático Francês, Jacques Français, publicou um artigo que dava sequência ao trabalho de Argand, onde ele solicitou que o autor do misterioso livro se revelasse. Desta forma Argand recebeu reconhecimento por seu trabalho e figuras geométricas como as da Figura 1.2 são frequentemente chamadas de diagramas de Argand.

Lista 1

1. Reduza à forma $x + iy$

- a) $(1 - 5i)^2 - 4i$;
- b) $-i(-1 + i) + 2$;
- c) $(3 + i)(1 - 11i)$;
- d) $(\sqrt{2} - i\sqrt{5})(\sqrt{5} + i\sqrt{2})$;

2. Novamente reduza à forma $x + iy$

- a) $\frac{3 - 4i}{2i}$;
- b) $\frac{2 + 5i}{-1 + i\sqrt{3}}$;
- c) $\frac{(2 - 2i)^2}{1 + i}$;
- d) $\frac{z - \bar{z}i}{\bar{z} - zi}$;

3. Faça o esboço e identifique os seguintes conjuntos

- a) $|z| = |z - 2|$;
- b) $|z| = |\bar{z} - 1|$;
- c) $a|z| = |z - 1|$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;
- d) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z - 1)$;
- e) $\operatorname{Im}(z - 1) = |z + 1|$;
- f) $|\bar{z}| = |z - 1|$;

4. Usando a primeira desigualdade triangular, mostre que $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

5. Deduza a desigualdade $|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

6. Mostre que, se $z_2 \neq -z_3$ então $\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$.

7. Resolva as equações

- a) $z - \bar{z} = 1$;
- b) $z + \bar{z}i = 2 + i$;
- c) $z + 2\bar{z} = 1 - i$.

8. Mostre que $|z_1 + z_2| < |1 + \bar{z}_1 z_2|$, desde que $|z_1| < 1$ e $|z_2| < 1$.
9. Encontre todas as soluções das equações
- $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$;
 - $z^5 = -1$;
 - $\bar{z}^3 = 1$;
 - $z^7 = -(1 + i)$.
10. Seja $P(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio de grau 2 com coeficientes reais e suponha que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então as soluções da equação $P(x) = 0$ são números complexos com parte imaginária não nula. Se z_1 e z_2 são estas soluções, mostre que $z_1 = \bar{z}_2$. Mais geralmente, se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau $n > 0$ arbitrário, com coeficientes reais, e se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $P(z_0) = 0$, então tem-se que $P(\bar{z}_0) = 0$.
11. Considere a equação $az^2 + bz + c = 0$, onde a, b e $c \in \mathbb{C}$. Deduza uma expressão para suas raízes.
12. Deduza a fórmula $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$, se $z \neq 1$.
13. Use o exercício anterior para mostrar que se $\omega \neq 1$, satisfaz a equação $\omega^n = 1$, então $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$.
14. Demonstre a fórmula De Moivre

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

15. Usa o exercício anterior para mostrar que
- $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$;
 - $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$;
 - $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$;
 - $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta$.
16. Use o exercício anterior para deduzir expressões para $\operatorname{sen} 4\theta$ e $\cos 4\theta$.
17. Calcule $(2 + i)(3 + i)$ e deduza a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \left(\frac{1}{2} \right) + \arctan \left(\frac{1}{3} \right).$$

18. Calcule $(5 - i)^4(1 + i)$ e deduza a igualdade

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) - \arctan \left(\frac{1}{239} \right).$$

19. Mostre que três pontos a, b e c no plano complexo são colineares, se e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{bmatrix} = 0.$$

20. Uma maneira de definir uma ordem “ $<$ ” em um corpo \mathcal{C} consiste em dar um subconjunto \mathcal{C}^+ de \mathcal{C} tal que:

- i) se $x, y \in \mathcal{C}^+$ então $x + y \in \mathcal{C}^+$ e $xy \in \mathcal{C}^+$ (o conjunto \mathcal{C}^+ é chamado de conjunto dos números positivos);
- ii) dado $x \in \mathcal{C}$ então apenas uma das possibilidades se verifica: ou $x \in \mathcal{C}^+$, ou $x = 0$ ou $-x \in \mathcal{C}^+$.

Em seguida dizemos que $x < y$ se e somente se $y - x \in \mathcal{C}^+$. Note que segue das propriedades i) e ii) que o quadrado de qualquer elemento não-nulo de \mathcal{C} é um elemento do subconjunto dos positivos. De fato, se $x \in \mathcal{C}^+$ então $x^2 \in \mathcal{C}^+$ por i). Por outro lado, se $-x \in \mathcal{C}^+$ então $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 \in \mathcal{C}^+$, por i) novamente. Conclua que o corpo \mathbb{C} não pode admitir nenhuma ordem do tipo definido acima.

Semana 2

“Talk with M. Hermite. He never evokes a concrete image, yet you soon perceive that: the more abstract entities are to him like living creatures.”

—Henri Poincare

2.1 Noções de Topologia no Plano Complexo

Nesta seção vamos apresentar de forma mais simples possível alguns conceitos topológicos necessários para desenvolvimento da teoria de funções contínuas e deriváveis de uma variável complexa. A abordagem adotada aqui não é a mais geral possível, como feita em livros de topologia, mas sim baseada nos textos sobre Espaços Métricos. Uma boa referência para uma exposição mais completa sobre os aspectos métricos e a topologia de \mathbb{C} é o Capítulo II da referência [Con78]. A vantagem desta abordagem é que a grande maioria dos conceitos topológicos podem ser apresentados usando sequências.

2.1.1 Convergência de Sequências de Números Complexos

Dizemos que uma sequência $\{z_1, z_2, \dots\}$, notação $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de números complexos converge para um número complexo $w \in \mathbb{C}$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0 \quad \text{e escrevemos} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w.$$

Em algumas ocasiões vamos optar também por uma das seguintes notações alternativas para nos referir ao limite acima:

- $z_n \rightarrow w$, quando $n \rightarrow \infty$;
- $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$.

Observamos que esta noção de convergência não é nova, já que o módulo em \mathbb{C} coincide com a distância Euclidiana em \mathbb{R}^2 . Isto quer dizer que olhando para z_n e w como pontos de \mathbb{R}^2 a condição $|z_n - w| \rightarrow 0$ se traduz no fato que a distância entre os elementos da sequência z_n e w em \mathbb{R}^2 fica arbitrariamente pequena quando n tende a infinito.

Para os mais aficionados pelas definições matematicamente rigorosas a noção de convergência apresentada acima pode se definida como segue.

Definição 2.1 (Limite de uma sequência). Dizemos que uma sequência de números complexos $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um número complexo $w \in \mathbb{C}$ se para cada $\epsilon > 0$ dado, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ (que pode depender de ϵ) tal que para todo $n \geq N_0$ temos $|z_n - w| < \epsilon$.

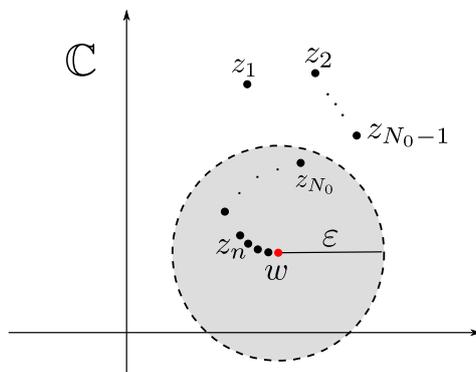


Figura 2.1.1: Definição de limite de uma sequência. Neste figura podemos ver que para $\epsilon > 0$ escolhido, todos os elementos da sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujos índices são maiores ou iguais a um certo N_0 , são tais que a distância deles à w é menor do que ϵ .

Uma observação importante. Já que o objetivo deste texto é ser um texto introdutório à teoria de funções de uma variável complexa, vamos evitar ao máximo trabalhar com a definição rigorosa de limite dada acima. Em alguns poucos casos, em que isto não for possível, fornecemos figuras ilustrando os argumentos ou conceitos de forma que o leitor seja capaz de absolver boa parte das ideias envolvidas.

Lema 2.2. Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em \mathbb{C} . A sequência $z_n \rightarrow w$, quando $n \rightarrow \infty$, se e somente se, as sequências de números reais $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergem, quando $n \rightarrow \infty$. Além do mais,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(w) \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(w).$$

Demonstração. A prova deste lema é uma simples aplicação do Lema 1.6, da Desigualdade Triangular (Teorema 1.7) e da identidade (I.7) (página 12).

Primeiro assumimos que $z_n \rightarrow w$, quando $n \rightarrow \infty$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \left| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) \right) - \operatorname{Re}(w) \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(w)) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(w)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(z_n - w)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos que para todo $z, w \in \mathbb{C}$ temos $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w) = \operatorname{Re}(z - w)$. Analogamente provamos a convergência da sequência das partes imaginárias.

Reciprocamente, vamos supor que $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow a$ e $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow b$, quando $n \rightarrow \infty$. Seja $w = a + ib$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |z_n - w| &= |\operatorname{Re}(z_n) + i \operatorname{Im}(z_n) - (a + ib)| \\ &= |(\operatorname{Re}(z_n) - a) + i(\operatorname{Im}(z_n) - b)| \\ &\leq |(\operatorname{Re}(z_n) - a)| + |i(\operatorname{Im}(z_n) - b)| \\ &\leq |\operatorname{Re}(z_n) - a| + |\operatorname{Im}(z_n) - b|. \end{aligned}$$

Portanto tomando o limite em ambos os lados verificamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(z_n) - a| + \lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{Im}(z_n) - b| = 0.$$

■

Uma grande dificuldade que enfrentamos para trabalhar com o conceito de limite é que, em geral, não é fácil determinar o ponto para onde nossa sequência converge, mesmo sabendo *a priori* que ela é convergente. Por esta razão é conveniente ter em mãos outras condições equivalente para facilitar nossa tarefa. Uma das mais famosas e utilizadas caracterizações de convergência é a de sequências de Cauchy.

Definição 2.3. Dizemos que uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ dado existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N_0$ temos

$$|z_n - z_m| < \varepsilon.$$

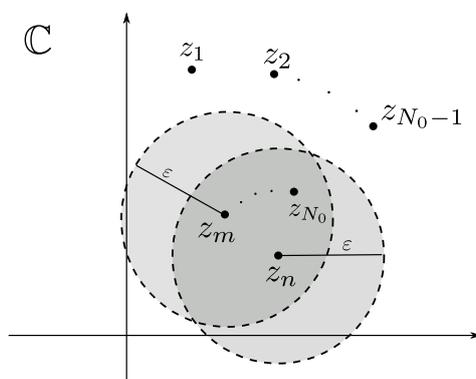


Figura 2.1.2: Sequência de Cauchy. Segundo a definição para uma sequência ser uma sequência de Cauchy dado $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um índice N_0 tal que se m e n são ambos maiores ou iguais a N_0 então a distância entre z_n e z_m é no máximo ε . Em outras palavras, para índices suficientemente grandes todos os elementos estarão ε -próximos um dos outros.

Um fato muito importante sobre o conjunto dos números reais é que ele munido de suas operações usuais forma um *corpo ordenado e completo*. O adjetivo completo, significa que toda sequência de Cauchy de números reais é convergente e vice-versa. Como consequência de \mathbb{R} ser completo e do Lema 1.6, segue que \mathbb{C} também é completo. De fato, seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em \mathbb{C} . Nosso primeiro passo é mostrar que podemos aplicar o Lema 1.6 para mostrar que as sequências de números reais $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em \mathbb{R} . Já que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em \mathbb{C} , sabemos que para qualquer

$\varepsilon > 0$, existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N_0$ temos $|z_n - z_m| < \varepsilon$. Pelo Lema 1.6 temos então que

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| = |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon$$

$$|\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z_m)| = |\operatorname{Im}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Mostrando que as partes real e imaginária da sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são ambas sequências de Cauchy. Como \mathbb{R} é completo então cada uma destas sequências é convergente, isto é, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n).$$

Ainda resta mostrar que z_n converge para $z = x + iy$, quando $n \rightarrow \infty$. Mas para basta aplicar o Lema 2.2.

2.1.2 Topologia no Plano Complexo

Vamos voltar nossa atenção agora para alguns conceitos topológicos que serão necessários para o desenvolvimento do nosso estudo. A maioria dos conceitos deve ser razoavelmente familiar para a maioria dos estudantes de cálculo e portanto não serão muito novos e podem ser visto apenas como os antigos mas apresentados em um novo vocabulário.

Dado um ponto $z \in \mathbb{C}$ e $r > 0$ definimos o **disco aberto** de centro z e raio r , notação $D(z, r)$, como sendo o conjunto de todos os números complexos que estão a distância no máximo r de z , isto é, $D(z, r) \equiv \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$. Definimos o **disco fechado** de centro z e raio r , notação $\overline{D}(z, r)$, como sendo o conjunto de todos os números complexos que estão a distância menor ou igual a r do número complexo z , isto é, $\overline{D}(z, r) \equiv \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq r\}$. A fronteira de ambos $D(z, r)$ e $\overline{D}(z, r)$ é definida como sendo o conjunto de todos os pontos do plano complexo que estão a distância exatamente r do ponto z , isto, $\{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\}$. Este conjunto será denotado, em geral, por $\partial D(z, r)$, mas caso seja conveniente também podemos denotá-lo por $\partial \overline{D}(z, r)$. Como o disco aberto de centro zero e raio um irá desempenhar um papel de destaque neste texto, vamos reservar uma notação especial para este conjunto. Ao invés de usar a notação $D(0, 1)$ vamos nos referir a este disco pela notação \mathbb{D} , isto é $\mathbb{D} \equiv \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$. O conjunto \mathbb{D} também será chamado as vezes de disco unitário.

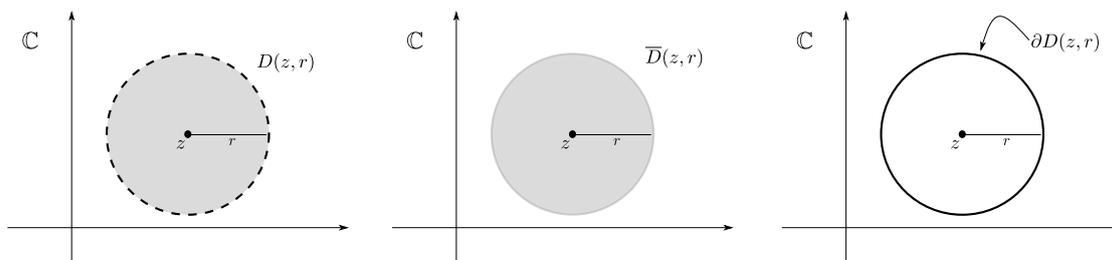


Figura 2.1.3: Os discos abertos e fechados de centro z e raio $r > 0$ e a fronteira destes discos.

Dado um conjunto $U \subset \mathbb{C}$ vamos dizer que $z \in U$ é um **ponto interior** de U se existe algum $r > 0$ tal que o disco aberto $D(z, r)$ esteja inteiramente contido em U

ou em outras palavras $D(z, r) \subset U$. O conjunto de todos os pontos interiores de U será denotado por $\text{int}(U)$ e chamado de **interior de U** . Dizemos que um conjunto $U \subset \mathbb{C}$ é um **conjunto aberto** se todo ponto $z \in U$ é um ponto interior de U . Equivalentemente, um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ é aberto se, e somente se, $\text{int}(U) = U$.

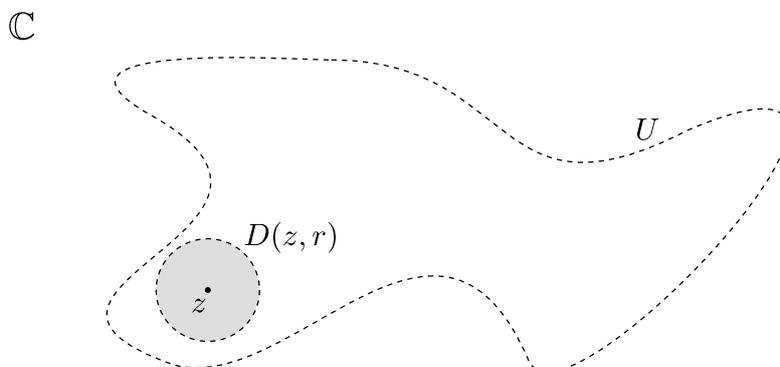


Figura 2.1.4: Nesta figura z representa um ponto interior de um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$.

Observe que esta definição de conjunto aberto do plano complexo é totalmente semelhante a definição de conjunto aberto em \mathbb{R}^2 . É conveniente usar a convenção que o conjunto vazio é um conjunto aberto. Observamos que existem diversos subconjuntos $B \subset \mathbb{C}$ com interior vazio, isto é, $\text{int}(B) = \emptyset$. Mesmo assim é sempre verdade que $\text{int}(B)$ é um conjunto aberto, qualquer que seja $B \subset \mathbb{C}$.

Um conjunto $F \subset V$ é dito **conjunto fechado** se seu complementar $F^c \equiv \mathbb{C} \setminus F \equiv \{z \in \mathbb{C} : z \notin F\}$ é um conjunto aberto. Já que convencionamos que o conjunto vazio é aberto e já que todo o plano complexo \mathbb{C} também é um conjunto aberto, então o complementar do vazio que é igual a todo plano complexo \mathbb{C} é um conjunto fechado; bem como o complementar de \mathbb{C} que é igual ao conjunto vazio também é um conjunto fechado. Podemos mostrar que os únicos subconjuntos de \mathbb{C} que são simultaneamente abertos e fechados são apenas: \emptyset (conjunto vazio) e \mathbb{C} .

Um fato muito importante sobre os conjuntos fechados de \mathbb{C} é que eles podem ser completamente caracterizados por sequências. Para isto precisamos de mais uma definição. Um ponto $z \in \mathbb{C}$ é chamado de **ponto de acumulação** de um subconjunto $B \subset \mathbb{C}$ se existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos: $z_n \in B$ e $z_n \rightarrow z$, quando $n \rightarrow \infty$.

Um ponto $z \in B$ é chamado de **ponto isolado** se existe algum $r > 0$ de forma que $D(z, r) \cap B = \{z\}$. Ou seja um ponto z de um conjunto B é um ponto isolado se existe um disco de centro em z e raio $r > 0$ tal que o único ponto de B que está dentro deste disco aberto é o próprio ponto z .

Proposição 2.4. *Um subconjunto não-vazio $F \subset \mathbb{C}$ é um conjunto fechado se, e somente se, todo ponto de acumulação de F pertence a F .*

Já que o complementar de um conjunto fechado é um conjunto aberto segue da proposição acima que os conjuntos abertos também podem ser completamente caracterizados por sequências.

O **fecho** de um subconjunto arbitrário $B \subset \mathbb{C}$ é definido como sendo a união de todos os pontos de acumulação do conjunto B . O fecho de B é denotado por \bar{B} . Note que se $B \neq \emptyset$, então $\bar{B} \neq \emptyset$. Além do mais qualquer que seja $B \subset \mathbb{C}$

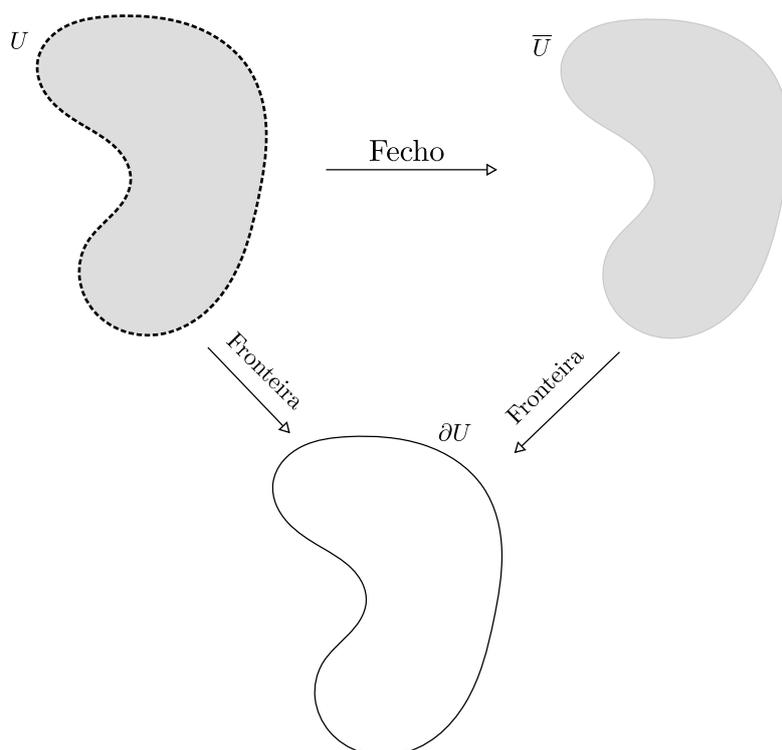


Figura 2.1.5: A esquerda um subconjunto U do plano complexo. A direita o fecho e em baixo a fronteira de U . Esta figura também destaca que $\partial U = \partial \bar{U}$.

temos sempre $B \subset \bar{B}$. O leitor é convidado a verificar que o fecho do disco aberto de centro z e raio $r > 0$ é exatamente o disco fechado de centro z e raio r .

Dado um subconjunto arbitrário $B \subset \mathbb{C}$ definimos a **fronteira** de B como sendo o conjunto $\partial B \equiv \bar{B} \setminus \text{int}(B)$. Em outras palavras, ∂B é o conjunto formado por todos os pontos do fecho de B que não pertencem ao interior de B . Convidamos o leitor a pensar em exemplos de subconjuntos de \mathbb{C} que possuem fronteira vazia. Note que as definições de fronteira de discos (abertos e fechados) dada anteriormente coincidem com a noção de fronteira definida neste parágrafo.

Um subconjunto $B \subset \mathbb{C}$ é chamado de **conjunto limitado** se existe algum número real (finito) $r > 0$ tal que $B \subset D(0, r)$, isto é, B é limitado se ele está inteiramente contido em um disco de raio $r > 0$. Alternativamente, B é limitado se existe $r > 0$ tal que para todo $z \in B$ temos que $|z| < r$. Se $B \subset \mathbb{C}$ é um conjunto limitado, então definimos o **diâmetro** de B como sendo o número real

$$\text{diam}(B) \equiv \sup_{z, w \in B} |z - w|,$$

onde “sup” denota o supremo do conjunto de todas as distâncias $|z - w|$ com z e w variando por todo conjunto B . A única propriedade que vamos precisar nesta seção sobre supremo é que se z e w são dois pontos arbitrários em B então a seguinte desigualdade é satisfeita

$$|z - w| \leq \text{diam}(B).$$

Veja o Apêndice 2.A, para maiores detalhes sobre a definição precisa e propriedades básicas de supremos.

Finalmente estamos prontos para apresentar uma das noções mais importantes desta seção que é a noção de compacidade. Dizemos que um subconjunto $K \subset \mathbb{C}$ é um **conjunto compacto** se K é ao mesmo tempo um conjunto fechado e limitado.

Existe uma caracterização, muito importante, dos compactos de \mathbb{C} em termos de seqüências. Para enunciarmos este resultado precisamos antes da definição do que é uma subsequência.

Uma **subseqüência** de uma seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ de números complexo é simplesmente uma seqüência $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ construída selecionando-se da seqüência original somente os elementos de índice $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, onde $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pode ser escolhida como sendo qualquer seqüência infinita estritamente crescente de números naturais.

Por exemplo, $\{z_4, z_7, z_{39}, z_{100}, \dots\}$ é um exemplo de uma subsequência da seqüência $\{z_1, z_2, z_3, z_4, \dots\}$. Neste exemplo $n_1 = 4, n_2 = 7, n_3 = 39, n_4 = 100$ e assim por diante. Em geral, qualquer função estritamente crescente $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ determina uma subsequência e vice-versa. Mais precisamente, dada uma seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \equiv \{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ a subsequência determinada por f é definida como sendo a seqüência $\{z_{f(1)}, z_{f(2)}, z_{f(3)}, \dots\}$. Esta subsequência é denotada por $(z_{f(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Apesar de ser bastante clara e sugestiva, esta notação é menos usada que a notação anterior $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Mas elas podem ser encaradas do mesmo ponto de vista pensando que $n_k = f(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, para alguma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente. Um fato importante de se observar é que, vista como um conjunto, uma subsequência deve ser sempre um subconjunto da seqüência original, isto é, $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \equiv \{z_{n_1}, z_{n_2}, \dots\} \subset \{z_1, z_2, \dots\} \equiv (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Uma grande vantagem da notação $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é que se quisermos considerar uma subsequência desta subsequência, basta modificar a notação acrescentando mais um subíndice ficando, por exemplo, com $(z_{n_{k_p}})_{p \in \mathbb{N}}$, onde fica subentendido que $k_1 < k_2 < k_3 \dots$ e $\{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\} \subset \{n_1, n_2, \dots\}$.

Teorema 2.5. *Um conjunto $K \subset \mathbb{C}$ é compacto se, e somente se, toda seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contida em K , possui alguma subsequência que converge para algum ponto pertencente a K .*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que se K é compacto então qualquer seqüência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contida em K , possui alguma subsequência convergente. Para isto vamos considerar as seguintes duas seqüências de números reais associadas à $(z_n)_{n \in \mathbb{R}}$ dadas por

$$x_n \equiv \operatorname{Re}(z_n) \quad \text{e} \quad y_n \equiv \operatorname{Im}(z_n).$$

Já que estamos assumindo que K é compacto e $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está contida em K , então K é limitado. Assim existe $r > 0$ tal que $|z_n| < r$. Aplicando o Lema 1.6 concluímos que $|x_n| < r$ e $|y_n| < r$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora usamos o fato que toda seqüência de números reais limitada, possui uma subsequência convergente. Logo existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ quando $k \rightarrow \infty$. Agora olhamos para a subsequência $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Já que ela é uma subsequência de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ então ela é limitada. Portanto podemos garantir que ela possui uma subsequência $(y_{n_{k_p}})_{p \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{n_{k_p}} \rightarrow y$, quando $p \rightarrow \infty$. Note que $x_{n_{k_p}} \rightarrow x$, quando $p \rightarrow \infty$ uma vez que qualquer subsequência de uma seqüência convergente também é convergente e o limite é o mesmo. Para finalizar esta parte da prova vamos mostrar que $(z_{n_{k_p}})_{p \in \mathbb{N}}$

converge para $z = x + iy$, quando $p \rightarrow \infty$. De fato, pela desigualdade triangular temos que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |z_{n_{k_p}} - z| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\operatorname{Re}(z_{n_{k_p}}) + i\operatorname{Im}(z_{n_{k_p}}) - (x + iy)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_{k_p}} + iy_{n_{k_p}} - (x + iy)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |(x_{n_{k_p}} - x) + i(y_{n_{k_p}} - y)| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |(x_{n_{k_p}} - x)| + \lim_{k \rightarrow \infty} |(y_{n_{k_p}} - y)| = 0. \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que se K tem a propriedade de que qualquer sequência em K possui subsequência que converge para um ponto em K , então K é limitado e fechado.

Suponha por absurdo que K não é limitado. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in K$ tal que $n < |z_n|$. Logo qualquer subsequência $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz $n_k < |z_{n_k}|$ e portanto não converge o que é um absurdo.

Resta mostrar que K é fechado. Pela Proposição 2.4 sabemos que isto é equivalente a mostrar que K possui todos seus pontos de acumulação, isto é, $K = \overline{K}$. Seja $z \in \overline{K}$. Então pela definição do fecho de K , podemos afirmar que existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e além do mais $z_n \rightarrow z$. Já que a sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, qualquer de suas subsequências também convergem e para o mesmo limite, que no caso é z . Da propriedade do nosso conjunto K existe pelo menos uma subsequência $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge para um ponto de K , mas como acabamos de mencionar o limite desta subsequência é exatamente z e portanto pela nossa hipótese, este deve ser um ponto de K . O que mostra que todo ponto de \overline{K} é também um ponto de K , isto é, $\overline{K} \subset K$. Mas por outro lado, sabemos que a inclusão reversa $K \subset \overline{K}$ é sempre válida para qualquer conjunto. Logo $K = \overline{K}$ e portanto K é fechado e isto encerra a prova do teorema. ■

Outra propriedade importante sobre conjuntos compactos, que será usada na prova do importante Teorema de Cauchy-Goursat, é enunciada no teorema abaixo.

Teorema 2.6 (Teorema de Cantor). *Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $K_n \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto não-vazio. Suponha que $K_n \supset K_{n+1}$ e $\operatorname{diam}(K_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Então existe um único ponto $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,*

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Demonstração. Já que para cada $n \in \mathbb{N}$ estamos assumindo que K_n é não-vazio, então existe algum $z_n \in K_n$. Como $\operatorname{diam}(K_n) \rightarrow 0$ temos que a sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

De fato, já que $\operatorname{diam}(K_n) \rightarrow 0$ sabemos que para qualquer $\varepsilon > 0$ vai existir existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ então $\operatorname{diam}(K_n) < \varepsilon$. Por hipótese, para qualquer $j \geq N_0$ temos $K_{N_0} \supset K_j$ e portanto os pontos z_n e z_m pertencem a K_{N_0} . Desta observação e da definição de supremo segue que $|z_n - z_m| \leq \operatorname{diam}(K_n) < \varepsilon$ para todo $m, n \geq N_0$ mostrando assim que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Como \mathbb{C} é completo. Sabemos que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z_n \rightarrow z$, quando $n \rightarrow \infty$. Como

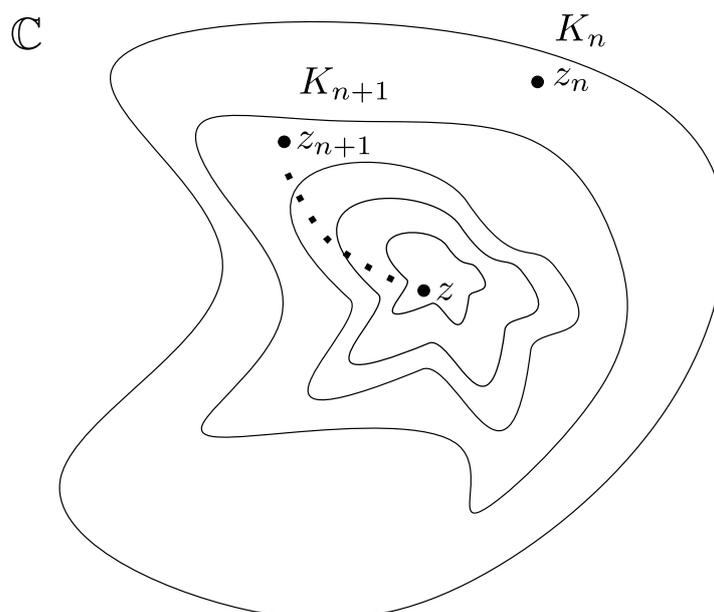


Figura 2.1.6: A construção da sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que K_n é compacto e $\{z_n, z_{n+1}, \dots\}$ é uma sequência em K_n . Então $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ também pertence a K_n . Portanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não-vazio. Para mostrar que z é o único ponto que pertence a esta interseção infinita argumentamos por absurdo. Suponha que exista $z' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ com $z' \neq z$. Então $|z' - z| > 0$. Por outro lado, como $z, z' \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ logo

$$0 < |z - z'| \leq \text{diam}(K_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o que é um absurdo já que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K_n) = 0$. ■

2.1.3 Conjuntos Conexos e Domínios

A última noção de topologia que vamos precisar é a de conexidade. Um conjunto $B \subset \mathbb{C}$ é dito **conexo** se não é possível encontrar dois subconjuntos do plano complexo U e V abertos, disjuntos ($U \cap V = \emptyset$), não-vazios e tais que:

- $B \cap U \neq \emptyset$;
- $B \cap V \neq \emptyset$; e
- $B \subset V \cup U$.

Esta definição de conexidade, formaliza, em um grande número de casos, a ideia do que seria um subconjunto do plano complexo formado por apenas um “pedaço”. Excetuando alguns casos patológicos como, por exemplo, o do conjunto mostrado na Figura 2.2.4, podemos pensar em um conjunto conexo como sendo realmente um conjunto formado por um único “pedaço”. Este é o caso quando o conjunto em questão é um *domínio*.

Na figura abaixo temos um exemplo simples de um conjunto B que não é conexo. Às vezes, nos referimos a tais conjuntos como desconexos.

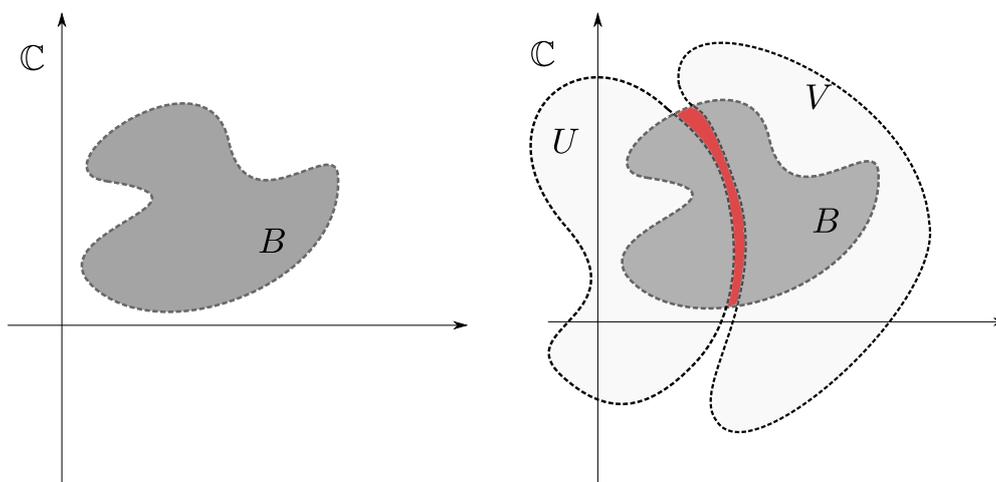


Figura 2.1.7: Exemplo de um conjunto B conexo. No lado esquerdo da figura temos um exemplo de um conjunto conexo B . No lado direito, podemos ver que o B não pode ser separado por abertos U e V não-vazios, disjuntos, ambos interceptando B , e que cobrem B ($B \subset U \cup V$). Informalmente, vemos que B não pode ser separado em dois pedaços (em que cada pedaço é um conjunto aberto).

Um subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ que é ao mesmo tempo aberto e conexo, será chamado de **domínio**. Na próxima seção vamos mostrar que um domínio $U \subset \mathbb{C}$ por ser caracterizado pelos caminhos existente nele.

2.2 Caminhos no Plano Complexo

Definição 2.7 (Caminho Suave). *Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado, isto é, $a < b$. Um caminho suave em \mathbb{C} é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ possuindo derivada contínua em todos os pontos de I .*

Antes de prosseguir devemos fazer algumas observações sobre a definição acima. Primeira observação é que a condição de diferenciabilidade imposta nesta definição, deve ser entendida da seguinte forma. Para cada $t \in I$ lembre-se que podemos escrever $\gamma(t) = \text{Re}(\gamma(t)) + i\text{Im}(\gamma(t))$. As funções $t \mapsto \text{Re}(\gamma(t))$ e $t \mapsto \text{Im}(\gamma(t))$ definem duas funções reais chamadas de coordenadas do caminho γ . Por simplicidade, vamos denotá-las por $x(t) \equiv \text{Re}(\gamma(t))$ e $y(t) \equiv \text{Im}(\gamma(t))$. Finalmente, a condição de suavidade é que as funções coordenadas sejam deriváveis e que suas derivadas $t \mapsto x'(t)$ e $t \mapsto y'(t)$ sejam funções contínuas para todo $a < t < b$ e nos pontos $t = a$ e $t = b$ exigimos que os seguintes limites laterais existam e satisfaçam as seguintes igualdades:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} x'(t) = x'(a) \equiv \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(a+h) - x(a)}{h}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow a^+} y'(t) = y'(a) \equiv \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(a+h) - y(a)}{h}$$

É claro que poderíamos também enunciar a condição de suavidade diretamente para γ sem ter que apelar para suas funções coordenadas. Para isto tomaríamos, para cada t no intervalo aberto (a, b)

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

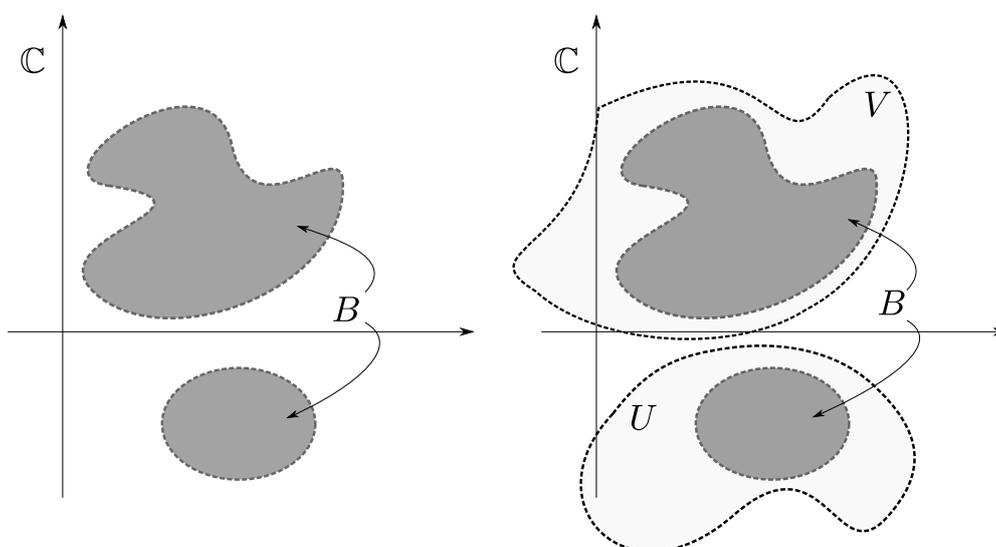


Figura 2.1.8: Exemplo de um conjunto B que é desconexo. O conjunto B , formado pela união dos pontos pertencentes às duas regiões pintadas na cor cinza escuro, no lado esquerdo da figura acima, é um exemplo de um conjunto que não é conexo. A direita mostramos como é possível separar B por abertos U e V disjuntos não-vazios que: ambos interceptam B ; e o cobrem.

e similarmente,

$$\gamma'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} \quad \text{e} \quad \gamma'(b) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\gamma(b+h) - \gamma(b)}{h}.$$

Em seguida, exigiríamos que $\gamma'(t)$ variasse continuamente em $[a, b]$. Esta definição seria mais elegante, mas para torná-la completamente precisa seria necessário antes atentarmos para um detalhe, ainda não falamos o que é continuidade de funções a valores em \mathbb{C} . Muito provavelmente o leitor já deva estar imaginando que isto será feito com a base na definição de continuidade de funções tomando valores em \mathbb{R}^2 , já que na seção passada todos os conceitos topológicos em \mathbb{C} foram construídos em analogia aos de \mathbb{R}^2 .

Considerando então o caminho γ , como uma função tomando valores em \mathbb{R}^2 temos para cada $a < t < b$ a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x(t+h), y(t+h)) - (x(t), y(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) \\ &= (x'(t), y'(t)). \end{aligned}$$

Voltando para o plano complexo temos

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

De maneira análoga, estendemos a igualdade para os pontos $t = a$ e $t = b$.

Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ é um caminho suave em \mathbb{C} o ponto $\gamma(a)$ é chamado de **ponto inicial** e $\gamma(b)$ **ponto terminal** do caminho γ . O conjunto imagem do caminho γ ,

isto é, o conjunto $\gamma(I) \subset \mathbb{C}$ é chamado de **curva** no plano complexo determinada por γ . Em muitas situações abusamos da notação e chamamos a curva determinada por γ de caminho γ . Quando $\gamma(a) = \gamma(b)$ dizemos que γ é um **caminho fechado** ou alternativamente que γ é um curva fechada.

Exemplo 2.8. O segmento de reta em \mathbb{C} unindo os pontos quaisquer fixados $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ pode ser visto como um caminho suave representado pela função $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = ((1-t)x_1 + tx_2) + i((1-t)y_1 + ty_2).$$

Exemplo 2.9. A fronteira de um disco de centro $z = x + iy$ e raio $r > 0$, isto é, $\partial D(z, r)$ pode ser vista como a imagem do caminho $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\gamma(\theta) = z + r(\cos \theta + i \sin \theta) = (x + r \cos \theta) + i(y + r \sin \theta).$$

Da maneira como introduzimos o conceito de um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, temos automaticamente uma maneira de definir sua orientação. Intuitivamente, a orientação é dada pelo percurso do caminho a medida que o parâmetro t cresce de a para b . Assim dizemos que o caminho γ está orientado do ponto inicial $\gamma(a)$ para o ponto terminal $\gamma(b)$.

Definimos também o caminho reverso do $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ pela aplicação $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\gamma^-(t) \equiv \gamma(a + b - t), \quad \text{para todo } t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

Note que as curvas $\gamma([a, b])$ e $\gamma^-([a, b])$ associadas à ambos γ e seu reverso, são exatamente as mesmas, mas do ponto de vista de caminhos temos que o ponto inicial de um é o ponto terminal do outro e vice-versa.

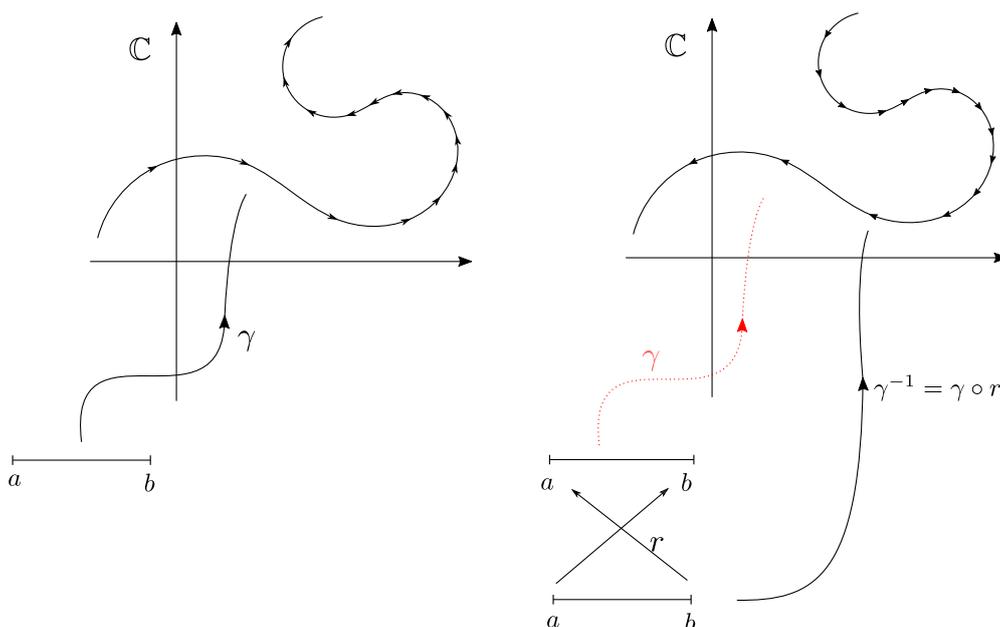


Figura 2.2.1: Um caminho suave $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ e seu reverso $\gamma^{-1} = \gamma \circ r$, onde $r(t) = a + b - t$. Note que r envia a em b e vice-versa, revertendo assim a orientação do intervalo $[a, b]$ e consequentemente o caminho γ .

Exemplificamos agora como obter os caminhos reversos dos caminhos definidos no exemplos dados acima. No Exemplo 2.8 temos $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0, 1]$. Para obter a expressão de γ^{-1} basta aplicar a fórmula (2.1) com $a = 0$ e $b = 1$ obtendo assim $\gamma^{-1}(t) = z_1 + (1 - t)(z_2 - z_1)$. No caso do caminho do Exemplo 2.9 temos $\gamma(\theta) = z + r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, $t \in [0, 2\pi]$. Agora aplicamos a fórmula (2.1) com $a = 0$ e $b = 2\pi$ obtendo portanto $\gamma^{-1}(\theta) = z + r(\cos(2\pi - \theta) + i \operatorname{sen}(2\pi - \theta))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Definição 2.10 (Caminho suave por partes). *Um caminho suave por partes em \mathbb{C} é uma coleção finita de caminhos suaves $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$, \dots , $\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{C}$, satisfazendo para cada $1 \leq i \leq n - 1$ as seguintes relações $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$.*

Será conveniente usar a notação $\gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$ para denotar um caminho suave por partes γ como na definição acima. Analogamente, tal caminho suave por partes é dito fechado se $\gamma_1(a_1) = \gamma_n(b_n)$. Como no caso de caminhos suaves, o ponto $\gamma_1(a_1)$ é chamado de ponto inicial e o ponto $\gamma_n(b_n)$ é chamado de ponto terminal.

Por exemplo, podemos ver um polígono de 6 lados cujos vértices são os pontos $z_1, z_2, \dots, z_6 \in \mathbb{C}$ mostrados na Figura 2.2.2 como um caminho $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_6$.

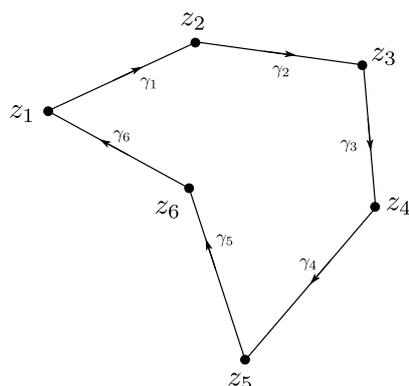


Figura 2.2.2: O polígono determinado pelo caminho suave por partes $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_6$

onde para cada $1 \leq i \leq 6$ temos

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= z_1 + t(z_2 - z_1), & t \in [0, 1]; \\ \gamma_2(t) &= z_2 + t(z_3 - z_2), & t \in [0, 1]; \\ &\vdots \\ \gamma_6(t) &= z_6 + t(z_1 - z_6), & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Em muitas situações é mais conveniente ter os caminhos γ_i 's de $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$ parametrizados de forma que seus domínios sejam intervalos “consecutivos”, isto é, seus pontos de bordo satisfazem

$$a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \dots < b_{n-1} = a_n < b_n.$$

Mais conveniente ainda é poder trabalhar com caminhos cujos intervalos de definição formem uma coleção consecutiva de n subintervalos do intervalo $[0, 1]$.

Dado um caminho suave por partes $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$ podemos associar a ele um novo caminho suave por partes que será chamado de **normalizado**. Para fazer isto, primeiro dividimos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de mesmo comprimento

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Em seguida, para cada $1 \leq j \leq n$, vamos definir uma aplicação bijetiva (afim) $r_j : [j-1/n, j/n] \rightarrow [a_j, b_j]$ que mapeia o subintervalo $[j-1/n, j/n]$ no intervalo $[a_j, b_j]$. Esta bijeção é dada por

$$r_j(t) = n(b_j - a_j)t - j(b_j - a_j) + b_j, \quad t \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right].$$

Estas aplicações r_j 's são muitas vezes chamadas de re-parametrizações. Agora consideramos os caminhos $\gamma_j \circ r_j$ com $1 \leq j \leq n$. Então é fácil ver que $\gamma_j \circ r_j$ é um caminho suave em \mathbb{C} e além do mais o ponto final de $\gamma_{j-1} \circ r_{j-1}$ coincide com o ponto inicial de $\gamma_j \circ r_j$. Desta maneira o caminho γ pode ser visto como definido no intervalo $[0, 1]$.

Dizemos que um caminho suave por partes (normalizado como acima) é **simples**, se aplicação $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ que o define é injetiva, exceto possivelmente pelos pontos $t = 0$ e $t = 1$. Mais precisamente, $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ para $0 \leq s < t < 1$ e é permitido $\gamma(0) = \gamma(1)$. Do ponto de vista geométrico, um caminho simples representa uma curva no plano sem auto-interseção, exceto possivelmente pelos pontos inicial e terminal.

Já temos todos terreno preparado para introduzir uma classe de curvas que serão de enorme importância no estudo de integração no plano complexo.

Definição 2.11 (Curva de Jordan). *Uma curva de Jordan suave por partes é a imagem de um caminho suave por partes, fechado e simples.*

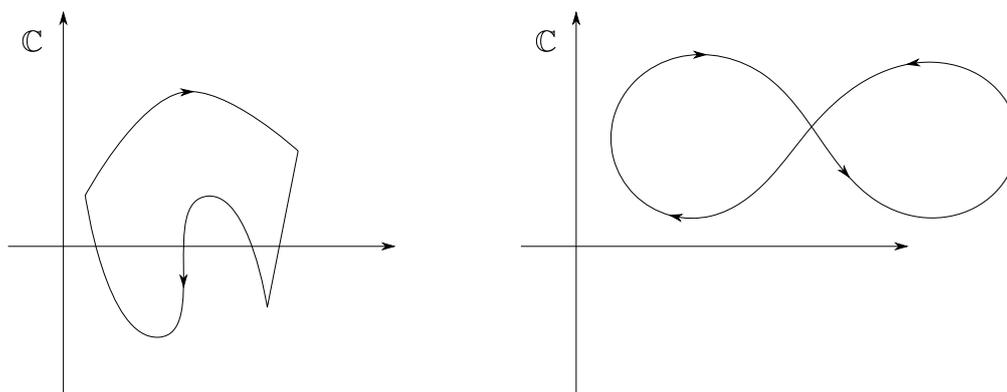


Figura 2.2.3: Caminhos fechados suaves por partes. O caminho da esquerda está associado a uma curva de Jordan. A curva a direita não é uma curva de Jordan pois ela possui um ponto de auto-interseção.

Um dos resultados mais importantes sobre curvas de Jordan é um teorema devido a Jordan. Ele afirma que uma curva de Jordan suave por partes γ divide o plano \mathbb{R}^2 em exatamente dois abertos disjuntos, um deles limitado e o outro ilimitado, sendo γ a fronteira comum entre estes dois abertos. Esse resultado,

embora de fácil intuição é de demonstração bastante elaborada. Atualmente existem vários textos que provam este teorema. O leitor interessado pode encontrar uma prova deste teorema um pouco mais moderna e bem detalhada no Apêndice B da referência [SS03].

Definição 2.12. *O comprimento de um caminho suave $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é definido como sendo o número real*

$$\ell(\gamma) \equiv \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

*Se γ é um caminho suave por partes da forma $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_n$ então definimos o comprimento de γ como sendo $\ell(\gamma) \equiv \ell(\gamma_1) + \dots + \ell(\gamma_n)$.*

Exemplo 2.13. *Se $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ é o caminho dado por $\gamma(\theta) = z + r(\cos \theta + i \sin \theta)$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ temos que*

$$\gamma'(\theta) = \frac{d}{d\theta}[z + r(\cos \theta + i \sin \theta)] = r(-\sin \theta + i \cos \theta).$$

Portanto $|\gamma'(\theta)| = r$ e assim

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(\theta)| d\theta = r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r.$$

Pensando em um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ como uma função descrevendo a posição de uma partícula no instante t o número $\ell(\gamma)$ pode ser interpretado como a distância total percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[a, b]$. Portanto se ela se percorre várias vezes certos trechos da curva determinada por γ o resultado da distância percorrida pode ser maior que o comprimento da curva em si. Se no exemplo anterior substituimos o domínio de γ pelo intervalo $[0, 4\pi]$ vamos verificar que o novo comprimento deste caminho será duas vezes maior que o comprimento encontrado no exemplo anterior. Isto se deve ao fato de que neste novo caminho percorremos o círculo de centro z e raio r duas vezes.

2.2.1 Conjuntos Conexos e Conexidade por Caminhos

Introduzimos na Subseção 2.1.3 o conceito de conexidade e de domínio no plano complexo. Vamos encerrar esta seção falando novamente sobre domínios e suas relações com o conceito de caminho, visto nesta seção.

Definição 2.14 (Conexidade por Caminhos). *Um subconjunto $B \subset \mathbb{C}$ é dito conexo por caminhos se dados quaisquer $z, w \in B$ existe um caminho suave por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma([0, 1]) \subset B$, $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$.*

Proposição 2.15. *Se $U \subset \mathbb{C}$ é um conjunto conexo por caminhos então U é conexo.*

Apesar de ser bastante intuitiva a afirmação da proposição acima, sua prova pode ser um pouco desafiante para o leitor menos experiente. Uma maneira de provar esta proposição é por absurdo. Supomos que U admite uma cisão não-trivial, isto é, existem abertos disjuntos V_1, V_2 , não-vazios tais que $V_1 \cup V_2 = U$.

Já que ambos V_1 e V_2 são não-vazios podemos escolher $z \in V_1$ e $w \in V_2$. Como estamos assumindo que U é conexo por caminhos, então deve existir um caminho suave por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma([0, 1]) \subset U$. Próximo passo seria mostrar que esta última inclusão implica que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ o que é absurdo. Esta parte é a parte mais elaborada deste argumento. Os detalhes serão apresentados em uma série de exercícios guiados no final desta seção.

Devemos advertir que, em geral, a recíproca da proposição acima é falsa.

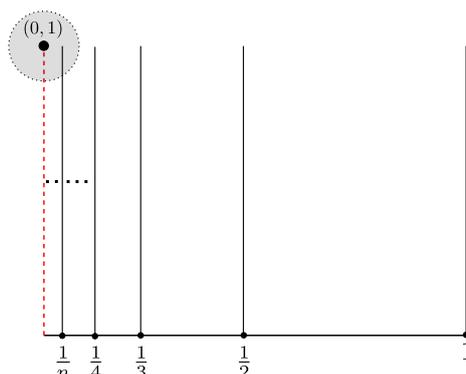


Figura 2.2.4: O Pente Infinito

O “pente infinito” é um exemplo clássico de subconjunto conexo do plano que não é conexo por caminho. O pente infinito é o subconjunto \mathcal{P} do plano complexo, composto pelo ponto $(0, 1) \in \mathbb{C}$ unido com os seguintes segmentos de reta: o segmento unindo o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 0)$ (base do pente); e para cada $n \in \mathbb{N}$, o segmento unindo o ponto $(1/n, 0)$ a $(1/n, 1)$ (os “dentes” do pente), veja a Figura 2.2.4.

A parte mais delicada de mostrar a conexidade do pente está relacionada a ideia intuitiva de que pente parece ter dois “pedaços”: um contendo a “base” e os “dentes” do pente; e outro contendo o ponto $(0, 1)$. Isto porque não existe nenhum “dente” unindo o ponto $(0, 0)$ da base do pente ao ponto $(0, 1)$.

Por outro lado, como sugere a figura acima, é impossível encontrar abertos disjuntos não-vazios U e V tais que $\mathcal{P} \subset U \cup V$ e $(0, 1) \in U$ e $\mathcal{P} \cap V \neq \emptyset$. De fato, se existissem tais conjuntos existiria uma bola aberta centrada em $(0, 1)$ com raio positivo, mas esta bola necessariamente interceptaria infinitos “dentes” evitando assim que o ponto $(0, 1)$ e os demais pontos do pente possam ser separados por abertos.

Vamos mostrar a seguir um resultado muito importante sobre a relação de conexidade e de conexidade por caminhos. Ele afirma que se $U \subset \mathbb{C}$ é um conjunto aberto e conexo então quaisquer par de pontos em U podem ser ligados por um caminho, suave por partes, inteiramente contido em U e vice-versa.

Alertamos o leitor menos experiente que a prova deste teorema pode ser omitida numa primeira leitura e que as ideias envolvidas nela não são usadas no restante do texto.

Teorema 2.16. *Seja U é um subconjunto aberto de \mathbb{C} . Então U é conexo se, e somente se, U é conexo por caminhos.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que se U é um aberto conexo, então U é conexo por caminhos. De fato, primeiro para cada $z \in U$ seja $\mathcal{C}_U(z)$ o conjunto

de todos os pontos $w \in U$ tais que z e w podem ser unidos por um caminho suave por partes inteiramente contido em U , isto é,

$$\mathcal{C}_U(z) = \left\{ w \in U : \begin{array}{l} \text{existe um caminho suave por partes } \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{tal que } \gamma([0, 1]) \subset U, \gamma(0) = z \text{ e } \gamma(1) = w \end{array} \right\}.$$

Desta forma mostrar que U é conexo por caminho se reduz a mostrar que dado qualquer $z \in U$, então temos que $\mathcal{C}_U(z) = U$, uma vez que esta igualdade significaria que se escolhermos qualquer ponto $w \in U$, então somos capazes de encontrar um caminho, completamente contido em U , ligando z a w .

Para mostrar que a igualdade acima é válida vamos mostrar primeiro que para qualquer $z \in U$ dado que $\mathcal{C}_U(z)$ é um subconjunto aberto do plano complexo. Observe que independentemente da escolha de $z \in U$ o conjunto $\mathcal{C}_U(z)$ é não-vazio já que caminho constante liga z a si mesmo. Continuando, para verificar $\mathcal{C}_U(z)$ é aberto tomamos um ponto w arbitrário em $\mathcal{C}_U(z)$. Como $\mathcal{C}_U(z)$ é sempre um subconjunto de U então w é um ponto de U , logo existe algum $r > 0$ tal que $D(w, r) \subset U$. Vamos mostrar que todos os pontos deste disco estão também contidos em $\mathcal{C}_U(z)$. Feito isto podemos concluir que w é um ponto interior de $\mathcal{C}_U(z)$. Para mostrar isto basta observar que pela definição de $\mathcal{C}_U(z)$ que existe algum caminho $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ totalmente contido em U unindo z a w . Por outro lado, dado um ponto arbitrário $w' \in D(w, r)$ temos que o caminho $\gamma_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\gamma_2(t) = w + (t - 1)(w' - w)$, cuja curva associada é o segmento de reta unindo w a w' é também um caminho totalmente contido em $D(w, r) \subset U$. Logo $\gamma_1 * \gamma_2$ é um caminho suave por partes totalmente contido em U unindo z a w' . O que mostra que $w' \in \mathcal{C}_U(z)$. Como w' foi escolhido arbitrariamente em $D(w, r)$ temos que todo este disco está contido em $\mathcal{C}_U(z)$ o que implica que w é um ponto interior de $\mathcal{C}_U(z)$. Já que w também foi escolhido arbitrariamente em $\mathcal{C}_U(z)$ concluimos que este conjunto é aberto, pois todos seus pontos são pontos interiores.

Suponha, por absurdo, que $V \equiv U \setminus \mathcal{C}_U(z)$ é um conjunto não-vazio. Seja z' um ponto qualquer de V . Observe que $\mathcal{C}_U(z')$ é disjunto de $\mathcal{C}_U(z)$, pois se existisse um ponto $z'' \in \mathcal{C}_U(z) \cap \mathcal{C}_U(z')$ existiria um caminho γ_1 suave por partes totalmente contido em U unindo z a z'' e da mesma forma existiria um caminho γ_2 suave por partes totalmente contido em U unindo z'' a z' . Mas então $\gamma_1 * \gamma_2$ seria um caminho suave por partes totalmente contido em U unindo z a z' o que contraria a definição de V . Além de termos $\mathcal{C}_U(z) \cap \mathcal{C}_U(z') = \emptyset$ também temos que

$$V = \bigcup_{z' \in V} \mathcal{C}_U(z')$$

é um conjunto aberto, já que ele é dado como uma união de conjuntos abertos. Desta forma temos $U = \mathcal{C}_U(z) \cup V$ é uma união de dois abertos não-vazios disjuntos o que é um absurdo, já que estamos assumindo que U é conexo. Esta contradição vem do fato de termos assumido que $\mathcal{C}_U(z) \neq U$. Assim concluimos que todo aberto conexo de \mathbb{C} é conexo por caminhos.

Agora vamos provar a recíproca, isto é, se $U \subset \mathbb{C}$ é conexo por caminhos então U é conexo. Para isto, seja U um subconjunto de \mathbb{C} conexo por caminhos. Suponha, por absurdo, que $U = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são abertos não-vazios e

disjuntos. Escolha arbitrariamente $z_1 \in V_1$ e $z_2 \in V_2$. Por hipótese, existe algum caminho suave por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ totalmente contido em U unindo $z_1 = \gamma(0)$ à $z_2 = \gamma(1)$. Como γ está totalmente contida em U para todo $t \in [0, 1]$ temos que $\gamma(t) \in V_1 \cup V_2$. Já que $\gamma(0) = z_1$, V_1 e V_2 são abertos e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma aplicação contínua então o número

$$t^* \equiv \sup_{t \in [0, 1]} \{\gamma(t) \in V_1\}$$

pertence ao intervalo aberto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Vamos mostrar a seguir que $\gamma(t^*) \in \partial V_2$. De fato, para qualquer $\varepsilon > 0$ o disco $D(\gamma(t^*), \varepsilon)$ intercepta V_1 e V_1^c bem como V_2 e V_2^c . Para provar isto usamos a continuidade de γ para verificar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t^*| < \delta$ então $|\gamma(t) - \gamma(t^*)| < \varepsilon$. Em outras palavras para todo t suficientemente próximo de t^* temos $\gamma(t) \in D(\gamma(t^*), \varepsilon)$. Em seguida, observamos que pela definição de t^* para qualquer t fixado satisfazendo $t^* < t \leq 1$ temos $\gamma(t) \in V_2$. Se além desta condição impomos que $|t - t^*| < \delta$ temos que este mesmo ponto $\gamma(t) \in D(\gamma(t^*), \varepsilon)$, pelas escolhas de ε e δ . Destas duas observações segue que a interseção $D(\gamma(t^*), \varepsilon) \cap V_2$ é não-vazia. Por outro lado, como t^* é o supremo dos t 's tais que $\gamma(t) \in V_1$ sabemos que existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $0 < t_n < t^*$, $t_n \rightarrow t^*$ e $\gamma(t_n) \in V_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela definição de convergência de sequências existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_0$ então $|t_n - t^*| < \delta$. Por esta última condição ser verdadeira segue que para qualquer $n \geq N_0$ temos $\gamma(t_n) \in D(\gamma(t^*), \varepsilon)$. Pela definição de t_n temos que $\gamma(t_n) \in V_1$ como V_1 e V_2 são disjuntos temos que $\gamma(t_n) \in V_2^c$ e portanto também é não vazia a interseção $D(\gamma(t^*), \varepsilon) \cap V_2^c$. Destes argumentos podemos concluir que para todo $\varepsilon > 0$ dado que

$$D(\gamma(t^*), \varepsilon) \cap V_2 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad D(\gamma(t^*), \varepsilon) \cap V_2^c \neq \emptyset.$$

e finalmente que $\gamma(t^*) \in \partial V_2$. Mas isto é um absurdo porque como V_2 é aberto sabemos que qualquer ponto de sua fronteira está no seu complemento, mas como γ está completamente contido em U e também temos $U = V_1 \cup V_2$ então segue que $\gamma(t^*)$ está necessariamente em V_1 . Mas como V_1 é aberto existe algum $r > 0$ tal que $D(\gamma(t^*), r) \subset V_1$. Tomando qualquer $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r$ concluiríamos que o disco $D(\gamma(t^*), \varepsilon) \subset D(\gamma(t^*), r) \subset V_1$ mas como $D(\gamma(t^*), \varepsilon) \cap V_2 \neq \emptyset$ então teríamos $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ o que é um absurdo. ■

2.3 Limites e Continuidade de funções em \mathbb{R}^2

Nesta seção revisamos alguns conceitos básicos sobre limites e continuidade de funções definidas em subconjuntos de \mathbb{R}^2 e tomando valores em \mathbb{R}^2 . Os conceitos topológicos considerados nesta seção são definidos de maneira análoga aos das seções anteriores usando a identificação natural de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 .

Vamos nos restringir a aplicações definidas em conjuntos cujo o interior é não-vazio. Para facilitar o leitor pode ter em mente conjuntos de \mathbb{R}^2 correspondentes aos discos abertos de raio positivo ou conjuntos como $D(z, r) \setminus \{z\}$ (o disco aberto de centro z e raio r exceto o ponto z). Como a estrutura de produto complexo

não terá nenhuma relevância nesta seção vamos conduzir as discussões usando a notação usual (x, y) de vetores no plano. Já que esta seção tem caráter de revisão para manter semelhança com os textos de Cálculo em \mathbb{R}^n , vamos usar a linguagem e notação de norma de vetor no lugar de falar do módulo de um número complexo.

O primeiro conceito que vamos recordar é o conceito de limite. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto de interior não-vazio. Vamos dizer que um vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é o limite de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ quando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \in \bar{A}$ se o vetor $f(x, y)$ fica arbitrariamente próximo do vetor (a, b) , quando (x, y) ficar arbitrariamente próximo de (x_0, y_0) . Para denotar este fato usamos a notação

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = (a, b).$$

O problema com esta descrição intuitiva de limite é que nela não temos um significado preciso do que é “arbitrariamente próximo”. Para remediar este problema vamos apresentar abaixo a definição formal de limite e depois mostrar algumas outras formas equivalente dela.

No que segue usamos a notação $\|\cdot\|$ para denotar a norma Euclidiana de um vetor em \mathbb{R}^2 , isto é,

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definição 2.17. *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que interior de A é não vazio e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função. Dizemos que f tem limite quando (x, y) tende a $(x_0, y_0) \in \bar{A}$ (fecho de A) se existe um vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ dado existe um $\delta > 0$ tal que para todo ponto $(x, y) \in A$ satisfazendo $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ temos $\|f(x, y) - (a, b)\| < \varepsilon$. Usamos a notação*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = (a, b),$$

para indicar que o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é o limite da função f quando (x, y) tende a (x_0, y_0) .

Uma observação importante a cerca desta definição é que não é necessário para falar de limite que o ponto (x_0, y_0) esteja no domínio da função f , isto é, não é necessário que a função f esteja definida no ponto (x_0, y_0) . Na verdade, basta que ela esteja definida em pontos suficientemente próximos deste ponto, o que de maneira mais precisa significa dizer que (x_0, y_0) é um ponto do fecho do domínio de f que poderia não estar no domínio da função f . Este é inclusive um dos casos mais interessantes quando estamos falando de limites.

Lembramos que cada função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é determinada por suas funções coordenadas, isto é, existem funções reais $u : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que para todo $(x, y) \in A$ temos $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Além do mais podemos verificar que existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = (a, b),$$

se e somente se,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = a \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = b,$$

onde a definição destes limites acima são feitas de maneira análoga à Definição 2.17, mas substituindo onde aparece $\|f(x, y) - (a, b)\| < \varepsilon$ por $|u(x, y) - a| < \varepsilon$ e $|v(x, y) - b| < \varepsilon$, respectivamente.

Uma função f pode ter limite quando (x, y) tende a um ponto (x_0, y_0) , o ponto (x_0, y_0) pode ser um ponto do domínio de f , mas a imagem do ponto (x_0, y_0) pela função f pode não coincidir com este limite. Este é o caso do seguinte exemplo.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (0, 0), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ (0, 1), & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Então podemos verificar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = (0, 0), \quad \text{porém} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0).$$

Funções que, ao contrário destas do exemplo, têm a propriedade de que para qualquer ponto de seu domínio (x_0, y_0) temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

são chamadas de funções contínuas. Tais funções possuem uma série de propriedades muito especiais e formam um classe de funções razoavelmente grande, onde uma teoria rica de resultados interessantes pode ser desenvolvida.

Definição 2.18. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função. Dizemos que f é contínua em um ponto $(x_0, y_0) \in A$ se*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Se f é contínua em todos os pontos de A , dizemos que f é contínua em A .

A continuidade de um certo ponto de vista é uma propriedade de regularidade muito importante. Outra classe de funções com propriedades muito interessantes também é a classe das funções que admitem derivadas parciais.

Definição 2.19. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função. Dizemos que f tem derivada parcial em relação a x no ponto $(x_0, y_0) \in A$ se existe o seguinte limite*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

Analogamente, f tem derivada parcial em relação a y no ponto $(x_0, y_0) \in A$ se existe o seguinte limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Caso existam as derivadas parciais em relação a x e y elas são denotadas por, respectivamente, por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0).$$

Observamos que estas duas derivadas parciais são vetores em \mathbb{R}^2 . Se u e v são as coordenadas de f então as derivadas parciais acima são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) \right).$$

Se as derivadas parciais de f em relação a x e y existem em todos os pontos de A , podemos definir duas novas funções definidas em A e tomando em \mathbb{R}^2 como segue:

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad \text{e} \quad (x, y) \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(x, y).$$

Caso estas aplicações sejam contínuas em A , vamos dizer que f é uma aplicação de classe C^1 em A . Note que a função $f = (u, v)$ é de classe C^1 em A se, e somente se, as seguintes funções

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x, y)$$

são contínuas em A .

Exemplo 2.20. A função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dada por

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

é uma função de classe C^1 em A , já que suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

2.4 Integrais de Linha e o Teorema de Green

Nesta seção vamos recordar um dos resultados mais importante sobre integrais de linha em \mathbb{R}^2 que é o Teorema de Green. As integrais de linha serão usadas para desenvolvermos a teoria de integração no plano complexo. Embora a integral complexa não seja exatamente igual a integral de linha, que será definida a seguir, elas se relacionam. É importante explorar estas relações para podermos aplicar o Teorema de Green para provar um dos resultados mais importantes sobre integração complexa, que serão discutidos neste texto. Por esta razão vamos dedicar esta seção ao Teorema de Green.

Esta seção está organizada da seguinte maneira. Primeiro recordamos algumas definições e conceitos básicos e em seguida apresentamos uma prova elementar do Teorema de Green, válida em situações bastante gerais.

Para simplificar os enunciados das definições e teoremas desta seção, vamos assumir que daqui por diante $A \subset \mathbb{R}^2$ sempre denotará um domínio (aberto e conexo) e que $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função de classe C^1 em A e dada em coordenadas por $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Definição 2.21 (Integral de Linha). *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho suave inteiramente contido em A . Definimos a integral de f ao longo de γ (ou integral de linha de f ao longo de γ) pela seguinte expressão*

$$\int_{\gamma} f \equiv \int_a^b \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico de \mathbb{R}^2 .

Apresentamos a definição de integral de linha sem especificá-la a partir de coordenadas por motivos de comparação com a integral complexa que será introduzida mais a frente.

De qualquer forma é muito importante ter em mente como se escreve esta integral em coordenadas. Portanto, se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ então temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &\equiv \int_a^b \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b u(x(t), y(t))x'(t) dt + \int_a^b v(x(t), y(t))y'(t) dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Note que esta identidade também revela que a integral de f ao longo de γ está bem definida para classe de funções e caminhos que estamos considerando neste texto já que as funções u, v, x' e y' são funções contínuas e $[a, b]$ é um intervalo de comprimento finito da reta.

Esta identidade também sugere a introdução da seguinte notação alternativa para integral de linha de f ao longo de γ

$$\int_{\gamma} f \equiv \int_{\gamma} u dx + \int_{\gamma} v dy, \quad (2.3)$$

onde o significado preciso das primeira e segunda parcelas do lado direito acima são dados pelas parcelas que aparecem em (2.2), respectivamente.

Observamos que a definição estende-se naturalmente para o caso de caminhos suaves por partes. Mais precisamente, se $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$ é um caminho suave por partes em A , então definimos a integral de linha de f ao longo de γ pela seguinte expressão

$$\int_{\gamma_1 * \dots * \gamma_n} f \equiv \int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f.$$

Em geral, é mais prático adotar notações um pouco mais curtas para denotar a integral de linha acima. Por exemplo, para simplificar a expressão no lado esquerdo da definição acima, chamamos de γ o caminho suave por partes $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$. Quanto ao lado direito podemos usar a notação de somatório. Desta forma a definição pode ser reescrita em uma notação mais condensada como segue

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f.$$

Exemplo 2.22. Seja $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Então a integral de f ao longo do caminho suave $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definido em coordenadas por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_0^{2\pi} \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right), (-\sin t, \cos t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Exemplo 2.23. Neste exemplo consideramos $A = \mathbb{R}^2$ e $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-$ o caminho suave por partes, onde

$$\gamma_1(t) = (0, t), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\gamma_2(t) = (t, 1), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\gamma_3(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\gamma_4(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Note que a curva associada a $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-$ é justamente $\partial([0, 1] \times [0, 1])$ orientado no sentido horário.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Então a integral de linha de f ao longo de $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-$ é dada por

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-} f &= \int_0^1 \langle f \circ \gamma_1(t), \gamma_1'(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle f \circ \gamma_2(t), \gamma_2'(t) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^1 \langle f \circ \gamma_3^-(t), (\gamma_3^-)'(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle f \circ \gamma_4^-(t), (\gamma_4^-)'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(t) = (0, t), & f \circ \gamma_1(t) = (-t^2, 0), & \gamma_1'(t) = (0, 1) \\ \gamma_2(t) = (t, 1), & f \circ \gamma_2(t) = (t^2 - 1, 2t), & \gamma_2'(t) = (1, 0) \\ \gamma_3^-(t) = (1, 1 - t), & f \circ \gamma_3^-(t) = (2t - t^2, 2 - 2t), & (\gamma_3^-)'(t) = (0, -1) \\ \gamma_4^-(t) = (1 - t, 0), & f \circ \gamma_4^-(t) = (1 - 2t + t^2, 0), & (\gamma_4^-)'(t) = (-1, 0). \end{array}$$

Portanto

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-} f = \int_0^1 (t^2 - 1) dt + \int_0^1 (2t - 2) dt + \int_0^1 (-t^2 + 2t - 1) dt$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^1 t \, dt - 4 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Lembramos que as integrais de linha são sensíveis a orientação do caminho de forma que se invertemos a orientação do caminho então mudamos o sinal da integral, como mostrado abaixo

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f.$$

Esta relação pode ser facilmente deduzida da fórmula de mudança de variáveis para integrais como segue. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho suave. Como já vimos anteriormente $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por $\gamma \circ r(t)$, onde $r(t) = a + b - t$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^-} f &= \int_a^b \langle f \circ \gamma^-(t), (\gamma^-)'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle (f \circ \gamma \circ r)(t), \frac{d}{dt}(\gamma \circ r)(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle f(\gamma(r(t))), \gamma'(r(t))r'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle f(\gamma(r(t))), \gamma'(r(t)) \rangle r'(t) dt. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Lembramos agora a fórmula de mudança de variáveis. Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável. Então

$$\int_a^b g(r(t))r'(t) \, dt = \int_{r(a)}^{r(b)} g(t) \, dt.$$

Tomando $g(t) = \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ e aplicando a fórmula de mudanças de variáveis no lado direito de (2.4) ficamos com

$$\begin{aligned}
\int_a^b \langle f(\gamma(r(t))), \gamma'(r(t)) \rangle r'(t) \, dt &= \int_a^b g(r(t))r'(t) \, dt \\
&= \int_{r(a)}^{r(b)} g(t) \, dt \\
&= \int_b^a \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= - \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt \\
&= - \int_{\gamma} f.
\end{aligned}$$

Antes de enunciarmos o Teorema de Green vamos lembrar a definição de compatibilidade entre uma região e sua fronteira.

Definição 2.24. *Suponha que $U \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio e seja $V \subset U$ um subconjunto compacto, cuja fronteira consiste de um número finito de curvas de Jordan suaves por partes e tal que $V \setminus \partial V$ é um domínio. Para cada uma dessas curvas, adotamos o sentido de percurso para o qual o interior de V está sempre à esquerda quando a percorremos. Nestas condições dizemos que V e ∂V têm sentido compatível.*

Esta noção será empregada diversas vezes ao longo do texto e recomendamos que o leitor a tenha em mente.

Exemplo 2.25. *Seja $U = \mathbb{R}^2$ e $V = D(0, r)$, cuja a fronteira é o conjunto $\partial V = \partial D(0, r)$. Para que V e ∂V tenham orientação compatível ∂V deve ser percorrida no sentido anti-horário como mostra a figura abaixo.*

Exemplo 2.26. *Neste exemplo tomamos novamente $U = \mathbb{R}^2$ e V como mostrado na figura abaixo. Para que $\partial V = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$ tenham orientação compatível com V estas curvas devem ser percorridas como mostrado no figura, isto é, γ_1 no sentido anti-horário; e γ_2 e γ_3 no sentido horário.*

Teorema 2.27 (Teorema de Green). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um domínio e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^1 . Seja $V \subset U$ um subconjunto satisfazendo*

- V é compacto;
- $\partial V = \gamma_1 * \dots * \gamma_n$ é formada por uma quantidade finita de curvas de Jordan suaves por partes;
- $V \setminus \partial V$ é um domínio;

Suponha que V e ∂V têm orientação compatível e que f em coordenadas é escrita como $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, então

$$\int_{\partial V} f = \iint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) dx dy.$$

Demonstração. A prova deste teorema como enunciada exige ferramental mais sofisticado do que temos disponível neste momento. Entretanto podemos apresentar uma prova simples e ilustrativa para o caso em que o conjunto V pode ser descrito como uma região que é simultaneamente verticalmente e horizontalmente simples, ou seja,

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad \begin{array}{l} g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \text{ onde } g_1 \text{ e } g_2 \text{ são funções} \\ \text{cujos gráficos são curvas suaves por partes} \end{array} \right\}$$

e

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \quad \begin{array}{l} h_1(x) \leq x \leq h_2(x), \text{ onde } h_1 \text{ e } h_2 \text{ são funções} \\ \text{cujos gráficos são curvas suaves por partes} \end{array} \right\},$$

respectivamente.

Lembrando (2.3) podemos decompor a integral de linha de f ao longo de ∂V como segue

$$\int_{\partial V} f = \int_{\partial V} u dx + \int_{\partial V} v dy.$$

A estratégia para provar o Teorema de Green será primeiramente olhar para V como um conjunto verticalmente simples e deduzir a seguinte igualdade

$$\int_{\partial V} u \, dx = - \iint_V \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \, dx dy. \quad (2.5)$$

Em seguida, olhamos para V como um conjunto horizontalmente simples e mostramos que

$$\int_{\partial V} v \, dy = \iint_V \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \, dx dy. \quad (2.6)$$

Após obtidas as duas igualdades acima basta somá-las para finalizar a prova.

Para executar a primeira parte da nossa estratégia vamos olhar para V como uma região verticalmente simples. Para escrever sua fronteira como um caminho suave por partes consideramos os seguinte caminhos suaves:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, g_1(t)), & a \leq t \leq b; \\ \gamma_2(t) &= (b, t), & g_1(b) \leq t \leq g_2(b); \\ \gamma_3(t) &= (t, g_2(t)), & a \leq t \leq b; \\ \gamma_4(t) &= (a, t), & g_1(b) \leq t \leq g_2(b); \end{aligned}$$

Para que a região V e sua fronteira tenham orientação compatível devemos ter $\partial V = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^- * \gamma_4^-$ e portanto

$$\int_{\partial V} u \, dx = \int_{\gamma_1} u \, dx + \int_{\gamma_2} u \, dx + \int_{\gamma_3^-} u \, dx + \int_{\gamma_4^-} u \, dx.$$

Já que $\gamma_2'(t) = (0, 1)$ e $(\gamma_4^-)'(t) = (0, -1)$ a segunda e quarta integrais, do lado direito da igualdade, acima são nulas. Assim ficamos com

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} u \, dx &= \int_{\gamma_1} u \, dx + \int_{\gamma_3^-} u \, dx \\ &= \int_a^b u(t, g_1(t)) \, dt - \int_a^b u(t, g_2(t)) \, dt \\ &= \int_a^b [u(t, g_1(t)) - u(t, g_2(t))] \, dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Observe que para cada t fixado entre a e b podemos usar o teorema fundamental do cálculo para representar

$$u(t, g_1(t)) - u(t, g_2(t)) = \int_{g_2(t)}^{g_1(t)} \frac{\partial}{\partial y} u(t, y) \, dy = - \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial}{\partial y} u(t, y) \, dy$$

Substituindo esta expressão no lado direito de (2.7) e usando o Teorema de Fubini (que afirma que a integral dupla coincide com a integral iterada) ficamos com

$$\int_{\partial V} u \, dx = \int_a^b [u(t, g_1(t)) - u(t, g_2(t))] \, dt$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_a^b \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial}{\partial y} u(t, y) dy dt \\
&= - \iint_V \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) dx dy,
\end{aligned}$$

o que encerra a prova de (2.5).

Passamos agora para a prova de (2.6). Agora vamos olhar para V como uma região horizontalmente simples. Neste caso sua fronteira poderá ser descrita por meio das seguintes curvas suaves

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, c), & h_1(c) &\leq t \leq h_2(c); \\
\gamma_2(t) &= (h_2(t), t), & c &\leq t \leq d; \\
\gamma_3(t) &= (t, d), & h_1(d) &\leq t \leq h_2(d); \\
\gamma_4(t) &= (h_1(t), t), & c &\leq t \leq d;
\end{aligned}$$

Agora

$$\int_{\partial V} v dy = \int_{\gamma_1} v dy + \int_{\gamma_2} v dy + \int_{\gamma_3^-} v dy + \int_{\gamma_4^-} v dy.$$

Já que $\gamma_1'(t) = (1, 0)$ e $(\gamma_3^-)'(t) = (-1, 0)$ podemos verificar que a primeira e terceira integrais no lado direito da igualdade acima são nulas e que a seguinte igualdade é válida

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} v dy &= \int_{\gamma_2} v dy + \int_{\gamma_4^-} v dy. \\
&= \int_c^d v(h_2(t), t) dt - \int_c^d v(h_1(t), t) dt \\
&= \int_c^d [v(h_2(t), t) - v(h_1(t), t)] dt.
\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, para qualquer t fixado entre c e d podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo para representar

$$v(h_2(t), t) - v(h_1(t), t) = \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) dx.$$

Substituindo a expressão acima no lado direito da igualdade anterior e em seguida aplicando novamente o Teorema de Fubini concluímos que

$$\int_{\partial V} v dy = \int_c^d \int_{h_1(t)}^{h_2(t)} \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) dx dt = \iint_V \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) dx dy,$$

o que prova (2.6). Somando (2.5) e (2.6) membro-a-membro encerramos finalmente a prova do Teorema de Green. \blacksquare

Exemplo 2.28. *Vamos usar o Teorema do Green para re-obter o resultado calculado no Exemplo 2.23. Naquele exemplo a função f estava definida em todo \mathbb{R}^2 que na terminologia do nosso enunciado do Teorema de Green corresponde ao domínio*

U. Observe também que a função f daquele exemplo é de classe C^1 . Agora, o compacto V do enunciado do Teorema de Green é o conjunto $V = [0, 1] \times [0, 1]$. Como sabemos sua fronteira é composta por quatro caminhos suaves. É claro que $V \setminus \partial V$ é um domínio. Um outro detalhe importante é que a integral de f ao longo da fronteira de V no Exemplo 2.23 considerava ∂V orientada no sentido horário. Mas note que com esta orientação V e ∂V não estão compativelmente orientados. Logo para aplicar o Teorema de Green precisamos mudar a orientação de ∂V considerada naquele exemplo. Então para re-obter o valor da integral de linha daquele exemplo, basta aplicar o Teorema de Green e depois mudar o sinal do resultado obtido aqui.

Lembramos que $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, 2xy)$ e portanto

$$-\frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}2xy = 2y.$$

Considerando ∂V orientado no sentido anti-horário temos pelo Teorema de Green que

$$\int_{\partial V} f = \iint_{[0,1] \times [0,1]} 2y - (-2y) \, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 4y \, dx dy = \int_0^1 4y \, dy = 2.$$

Apêndice

Neste apêndice relacionamos alguns tópicos e resultados que não são normalmente apresentados em um curso introdutório de cálculo em uma variável complexa. Em geral, os tópicos tratados aqui costumam ser discutido em detalhes e mais profundidade em quaisquer bons livros de Análise Real e Complexa. Ao leitor interessado recomendamos a referência [Abb15].

2.A Supremo e Ínfimo de Subconjuntos da Reta

Um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente, se existe um número $c \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq c$ para todo $b \in B$. O número c é chamado de uma **cota superior** de B . Analogamente, um conjunto B é dito limitado inferiormente, se existe um número $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in B$. Neste caso o número a é chamado de cota inferior de B .

Definição 2.29 (Supremo). *Dizemos que um número real s é a menor cota superior de um conjunto B limitado superiormente se satisfaz as seguintes condições:*

- i) s é uma cota superior de B ;*
- ii) se s' é qualquer outra cota superior de B então $s \leq s'$.*

O número s que é menor cota superior de um conjunto B é denotado por $\sup(B)$ e chamado de supremo do conjunto B .

Quando o conjunto B não é limitado superiormente, ele não possui nenhuma cota superior e nestes casos definimos $\sup(B) = +\infty$.

O conjunto dos números reais goza da seguinte propriedade: qualquer subconjunto limitado de \mathbb{R} possui um supremo.

Na seção anterior nós trabalhamos com supremo. Lá o conjunto B era um conjunto de números reais da forma $B = \{|w - z| \in \mathbb{R} : w, z \in U\}$ para algum $U \subset \mathbb{C}$.

O conceito de supremo generaliza o conceito de máximo. Por exemplo, se B é um conjunto finito digamos $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ podemos sempre encontrar pelo menos um índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $b_i \leq b_j$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Neste caso o elemento b_j é chamado de máximo de B , e denotado por $b_j = \max\{b_1, \dots, b_j\}$. Em alguns casos, muito especiais de conjuntos infinitos B , também podemos encontrar um elemento $s \in B$ tal que $b \leq s$ para todo $b \in B$ e similarmente escrevemos $s = \max(B)$. Note que em ambos os casos o máximo de B e o supremo de B coincidem. É muito difícil e desconfortável trabalhar com o máximo, porque ele,

em geral, pode não existir mesmo para conjuntos limitados superiormente. Este é, por exemplo, o caso do conjunto B dado pelo intervalo aberto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Por outro lado, como comentado acima, se B for limitado então ele sempre terá um supremo. Desta forma para falar de supremo não precisamos nunca nos preocuparmos de antemão com praticamente nenhuma característica particular do conjunto B . Este conforto, no entanto, é obtido às custas do supremo em muitos casos não ser um elemento do próprio conjunto B e por isto alguns cuidados especiais devem ser tomados se for necessário garantir que $\sup(B) \in B$.

Uma das propriedades fundamentais e que será necessária em algumas partes do texto é que o supremo pode ser caracterizado também por sequências, no seguinte sentido. Dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ limitado, sempre existe uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos em B tal que $b_n \rightarrow \sup(B)$, quando $n \rightarrow \infty$. Esta sequência pode ser tomada inclusive de forma que ela seja monótona não-decrescente, isto é, $b_n \leq b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Analogamente, definimos o conceito de ínfimo de um conjunto limitado inferiormente.

Definição 2.30 (Ínfimo). Dizemos que um número real l é a maior cota inferior de um conjunto B limitado inferiormente se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) l é uma cota inferior de B ;
- ii) se l' é qualquer outra cota inferior de B então $l' \leq l$.

O número l que é a maior cota inferior de um conjunto B é denotado por $\inf(B)$ e chamado de ínfimo do conjunto B .

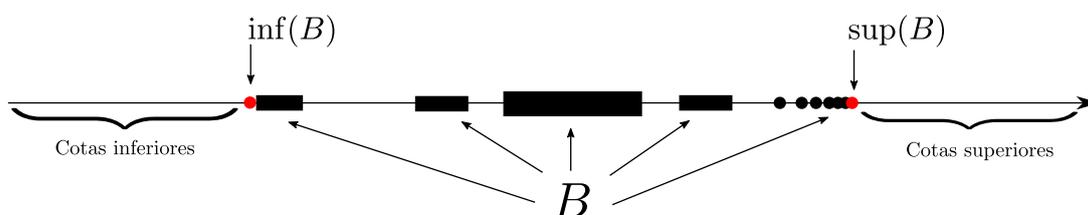


Figura 2.A.1: O supremo e o ínfimo de um conjunto B limitado, representados pelo pontos indicados em vermelho. A direita indicamos o conjunto de todas as cotas superiores de B e a esquerda o conjunto de todas as cotas inferiores de B .

Dado um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ defina o conjunto $-B \equiv \{-b \in \mathbb{R} : b \in B\}$. Então podemos verificar que se B é um conjunto limitado (superiormente e inferiormente) então temos a seguinte igualdade

$$\inf(B) = -\sup(-B).$$

Desta forma as propriedades do ínfimo de conjuntos limitados podem ser obtidas por meio das propriedades do supremo e vice-versa. Esta equação poderia ter sido usada como definição de ínfimo. Apesar disto ter a vantagem de tornar a exposição mais curta, esta maneira acaba sendo pouco intuitiva para iniciantes. Além do mais conceitos introduzidos por negação de negação tendem a gerar bastante confusões.

Observamos que se levamos em conta as convenções listadas abaixo:

- se B não é limitado superiormente $\sup(B) = +\infty$;
- se B não é limitado inferiormente $\inf(B) = -\infty$;
- $\sup \emptyset = -\infty$;
- $\inf \emptyset = +\infty$.

então a igualdade $\inf(B) = -\sup(-B)$, passa a ser válida para qualquer subconjunto $B \subset \mathbb{R}$.

Por questão de conveniência relacionamos abaixo algumas propriedades do supremo e ínfimo que inevitavelmente serão usadas no texto. Antes, precisamos de algumas definições preliminares. A prova da validade das relações seguintes podem ser encontradas, por exemplo, em [Rud76].

Dados subconjuntos não-vazios arbitrários A e B contidos em \mathbb{R} definimos

- $A + B \equiv \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A \text{ e } b \in B\}$;
- $A \cdot B \equiv \{a \cdot b \in \mathbb{R} : a \in A \text{ e } b \in B\}$;
- $k \cdot A \equiv \{k \cdot a \in \mathbb{R} : a \in A\}$

Teorema 2.31. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$.*

1. *Se $A \subset B$ então $\sup(A) \leq \sup(B)$;*
2. *Se $A \subset B$ então $\inf(B) \leq \inf(A)$;*
3. *Se B é limitado superiormente, então dado $\varepsilon > 0$ existe $b \in B$ tal que $\sup(B) < b + \varepsilon$;*
4. *Se B é limitado inferiormente, então dado $\varepsilon > 0$ existe $b \in B$ tal que $b - \varepsilon < \inf(B)$.*
5. *Se A e B são limitados superiormente então $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.*
6. *Se A e B são limitados inferiormente então $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.*
7. *Se $k \geq 0$ e A limitado inferiormente então $\inf(k \cdot A) = k \inf(A)$.*
8. *Se $k \geq 0$ e A limitado superiormente então $\sup(k \cdot A) = k \sup(A)$.*
9. *Se $k \leq 0$ e A limitado superiormente então $\inf(k \cdot A) = k \sup(A)$.*
10. *Se $k \leq 0$ e A limitado inferiormente então $\sup(k \cdot A) = k \inf(A)$.*
11. *Se $A, B \subset [0, +\infty)$ então $\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$;*
12. *Se $A, B \subset [0, +\infty)$ então $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$, caso um dos conjuntos não seja limitado superiormente esta igualdade pode ser apenas $+\infty = +\infty$.*

Lista 2

- Neste exercício z_0 é um número complexo arbitrário fixado. Esboce os conjuntos abaixo, diga se são fechados, abertos ou nenhum deles, esboce sua fronteira, diga quais são domínios e quais são limitados:
 - $\operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Re}(z_0)$;
 - $\operatorname{Im}(z_0) > \operatorname{Re}(z)$;
 - $\operatorname{Re}(z^2) \geq 1$;
 - $\operatorname{Im}(zz_0) > 0$;
 - $|z - z_0| < |\bar{z} - z_0|$;
 - $|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0|$;
 - $1 \leq |z - \bar{z}_0| \leq 3$;
 - $\operatorname{Im}(z^2) \leq 1$.
- Para cada um dos conjuntos abaixo sua fronteira é descrita por uma curva suave por partes. Esboce o conjunto, sua fronteira e dê uma aplicação que a descreva
 - $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \geq 1/2\}$;
 - $V = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$;
 - $V = \{z \in \mathbb{C} : 1/3 \leq |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \geq \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$.
- Calcule a $\int_{\partial V} f$, onde V é cada um dos conjuntos do exercício anterior (V e a ∂V tem orientação compatível) e a função f é dada por
 - $f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$;
 - $f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$;
- Calcule $\int_{\partial V} x^n dy$ e $\int_{\partial V} y^n dx$, onde $n \geq 1$ e V é dado por
 - o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$;
 - o disco $\mathbb{D} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;levando em conta que V e ∂V estão compativelmente orientados.
- Seja V como enunciado do Teorema de Green. Mostre que a área de V é dada por
$$\int_{\partial V} x dy.$$
- Use o exercício anterior para calcular a área de
 - $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$;
 - $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 1 \leq xy \leq 4\}$.

7. Calcule

a) $\int_{\partial V} (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$;

b) $\int_{\partial V} 2xy dx + (y^2 - x^2) dy$,

onde V é

a) o retângulo delimitado pelas retas $y = x, y = -x + 4, y = x + 2, y = -x$;

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 1 \leq xy \leq 4\}$ (V e ∂V tem fronteira compatível).

8. Calcule

$$\int_{\partial V} \frac{y}{(x-1)^2 + y^2} dx + \frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2} dy,$$

onde V é a região limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 3$ e $(x-1)^2 + y^2 = 9$ (V e ∂V tem fronteira compatível).

9. Calcule

$$\int_{\partial V} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} dy,$$

onde V é a região interior a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ orientada no sentido anti-horário.

Semana 3

“At the basis of the distance concept lies, for example, the concept of a convergent point sequence and their defined limits, and one can, choosing these ideas as those fundamental to the point set theory, eliminate the notions of distance ... Thirdly, we can associate with each point of the set certain parts of the space called neighborhoods, and these can again be made building stones of the theory with the elimination of the distance concept. Here the view of a set is in consideration of the association between elements and subsets.”

—F. Hausdorff, 1949

3.1 Limites, Continuidade de Funções Complexas

Uma função complexa é uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida em algum subconjunto $U \subset \mathbb{C}$ e tomando valores em \mathbb{C} que associa cada ponto $z \in U$ um número complexo $f(z)$. Podemos também descrever tais funções usando coordenadas, isto é, para $z = x + iy \in U$ temos $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$ pode ser descrita em coordenadas por $f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Em geral, é prudente evitar trabalhar com coordenadas. Mas isto não quer dizer que não devemos usá-las, mas sim avaliar cuidadosamente se uso delas facilitará ou viabilizará o estudo do problema. Um dos resultados mais importantes da próxima seção às chamadas Condições de Cauchy-Riemann, fornecem um exemplo importante de como a descrição de uma função complexa em termos de suas coordenadas pode ser poderosa.

A noção de limite associado a uma função $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ consiste simplesmente numa tradução da Definição 2.17. Por questão de simplicidade, como na seção anterior, vamos considerar apenas funções definidas em algum conjunto $A \subset \mathbb{C}$ cujo o interior é não-vazio.

Definição 3.1. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto cujo interior é não-vazio, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e $z_0 \in \bar{A}$. Dizemos que um número complexo w_0 é o limite de $f(z)$ quando z tende a z_0 se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $\delta > 0$ tal que se $z \in A$ e $0 < |z - z_0| < \delta$ então temos $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. O limite será denotado por*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{ou} \quad f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} w_0.$$

É comum referir-se ao fato de que $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} w_0$, dizendo simplesmente que $f(z)$ converge para w_0 , quando z tende a z_0 .

A intuição deste conceito de limite é totalmente análoga a de limite de funções em \mathbb{R}^2 . Ou seja, dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta \equiv \delta(\varepsilon, z_0)$ tal que todo ponto z que está δ -próximo de z_0 é enviado por f ε -próximo de w_0 .

Exemplo 3.2. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$. Seja $z_0 = i$. Então, segundo a definição acima temos*

$$\lim_{z \rightarrow i} f(z) = -1.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$. Desta forma, sempre que tomamos z tal que $|z - (-i)| < \delta$, temos

$$\begin{aligned} |z^2 - (-1)| &= |z^2 + 1| = |(z + i)(z - i)| = |z + i| \cdot |z - i| \\ &< (\sqrt{1 + \varepsilon} - 1)|z - i| \\ &= (\sqrt{1 + \varepsilon} - 1)|z + i - 2i| \\ &\leq (\sqrt{1 + \varepsilon} - 1)(|z + i| + |2i|) \\ &< (\sqrt{1 + \varepsilon} - 1)(\sqrt{1 + \varepsilon} - 1 + 2) \\ &= (\sqrt{1 + \varepsilon} - 1)(\sqrt{1 + \varepsilon} + 1) \\ &= (\sqrt{1 + \varepsilon})^2 - 1^2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Uma propriedade muito importante e naturalmente esperada de qualquer definição de limite é que o mesmo seja único. Neste caso é simples verificar a unicidade do limite, basta aplicar a desigualdade triangular como segue. Se $f(z) \rightarrow w_0$, quando $z \rightarrow z_0$ e $f(z) \rightarrow w_1$, quando $z \rightarrow z_0$, então dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |z - z_0| < \delta$ então $|f(z) - w_0| < \varepsilon/2$ e $|f(z) - w_1| < \varepsilon/2$. Logo $|w_0 - w_1| = |w_0 - f(z) + f(z) - w_1| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Para a desigualdade acima ser válida para todo ε é necessário que $|w_0 - w_1| = 0$, o que queríamos demonstrar.

O limite de uma função complexa pode ser expresso também em termos de suas coordenadas. Em outras palavras, uma função complexa tem limite se, e somente se, suas partes real e imaginária têm limite. Mais precisamente, se escrevemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde $z = x + iy$ e se existe o limite $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, onde $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = u_0 + iv_0$, então temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Para verificar que ambas igualdades vamos aplicar o Lema 1.6 que garante

$$|u(x, y) - u_0| \leq |f(z) - w_0| \quad \text{e} \quad |v(x, y) - v_0| \leq |f(z) - w_0|.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in A$ e $|z - z_0| < \delta$ (ou $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$), então $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. Logo segue das últimas duas desigualdades que $|u(x, y) - u_0| < \varepsilon$ e $|v(x, y) - v_0| < \varepsilon$ o que prova a afirmação sobre os limites

das funções coordenadas u e v . A recíproca pode ser provada de forma análoga simplesmente substituindo o argumento do Lema 1.6 pela desigualdade triangular.

As propriedades do limite de uma função complexa são análogas às do limite de funções reais, já que tudo que são usadas em ambas definições são as estruturas de distância (que na reta é definida pelo valor absoluto e no plano complexo pela norma) e de corpo. Relacionamos abaixo algumas das mais básicas e úteis:

Lema 3.3. *Seja $A \subset \mathbb{C}$ conjunto de interior não-vazio, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in \overline{A}$. Suponha*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0.$$

Então existe algum $r > 0$ tal que f é limitada no conjunto $V(A, r) \equiv \{z \in A : 0 < |z - z_0| < r\}$, isto é, existe uma constante M (que pode depender de z_0 e r) tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in V(A, r)$.

Demonstração. Pela definição de limite, dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in A$ com $0 < |z - z_0| < \delta$, temos $|f(z) - w_0| < 1$. Pela segunda desigualdade triangular segue que $|f(z)| - |w_0| \leq |f(z) - w_0| < 1$, o que implica que $|f(z)| \leq 1 + |w_0|$. Para finalizar a prova basta tomar $M \equiv 1 + |w_0|$ e $r = \delta$. ■

Proposição 3.4. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ conjunto de interior não-vazio, $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções complexas e $z_0 \in \overline{A}$. Se*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = w_1 \quad e \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_2$$

então

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} c f_1(z) = c \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = c w_1$, onde c é uma constante complexa;
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) + f_2(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_1 + w_2$;
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) \cdot f_2(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_1 \cdot w_2$;
4. se $w_1 \neq 0$ então $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f_1(z)} = \frac{1}{w_1}$.

Demonstração. Vamos provar os itens 2 e 3. A prova dos itens restantes é semelhante.

Prova do item 2. Pela definição de limite, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $|z - z_0| < \delta_1$ então $|f_1(z) - w_1| < \varepsilon/2$ e se $|z - z_0| < \delta_2$ então $|f_2(z) - w_2| < \varepsilon/2$. Portanto, se $|z - z_0| < \delta \equiv \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos da desigualdade triangular que

$$|f_1(z) + f_2(z) - (w_1 + w_2)| \leq |f_1(z) - w_1| + |f_2(z) - w_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando que $f_1(z) + f_2(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} w_1 + w_2$.

Prova do item 3. Pela definição de limite dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta_1$, então $|f_1(z) - w_1| < \varepsilon/2|w_2|$. Pelo Lema 3.3 existem $\delta_2 > 0$ e uma constante $M > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta_2$, então $|f_1(z)| \leq M$. Também

pela definição de limite podemos encontrar $\delta_3 > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta_3$ então $|f_2(z) - w_2| < \varepsilon/2M$. Aplicando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} |f_1(z)f_2(z) - w_1w_2| &= |f_1(z)f_2(z) - f_1(z)w_2 + f_1(z)w_2 - w_1w_2| \\ &\leq |f_1(z)f_2(z) - f_1(z)w_2| + |f_1(z)w_2 - w_1w_2| \\ &= |f_1(z)| |f_2(z) - w_2| + |w_2| |f_1(z) - w_1| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + |w_2| \frac{\varepsilon}{2|w_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Mostrando assim que $f_1(z) \cdot f_2(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} w_1 \cdot w_2$. ■

De maneira semelhante às funções de \mathbb{R}^2 definimos o conceito de continuidade.

Definição 3.5 (Função Contínua). *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é contínua em $z_0 \in A$ se*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Se f é contínua em todo ponto $z_0 \in A$, dizemos que f é contínua em A .

Note que a continuidade de uma função complexa é equivalente a continuidade de suas funções coordenadas. Isto é, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua se, e somente se, as funções $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ e $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ são contínuas em A .

Podemos também verificar diretamente à partir da definição que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \bar{z}$ é uma função contínua em \mathbb{C} . Usando a proposição anterior podemos também verificar facilmente que a função $g : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = 1/z$ é contínua em \mathbb{C}^* .

A seguir vamos mostrar que uma versão da Proposição 3.4 para o caso de funções contínuas. Além disto vamos incluir nesta nova proposição uma afirmação sobre a continuidade de composições e para isto vamos relembrar o conceito de composição de funções. Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ conjuntos abertos, $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções tais que $g(A) \subset B$. Sob estas condições podemos definir a função composta $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{C}$ pela expressão $f \circ g(z) \equiv f(g(z))$, para cada $z \in A$.

Proposição 3.6. *Sejam $A, B \subset \mathbb{C}$ abertos e $f_1 : B \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2 : B \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções complexas tais que $g(A) \subset B$. Suponha que f_1 e f_2 são contínuas em $z_0 \in B$ e que f_1 é contínua em $g(z_1)$, onde $z_1 \in A$. Então*

1. *são contínuas em $z_0 \in B$ as funções:*

- $cf_1 : B \rightarrow \mathbb{C}$;
- $f_1 + f_2 : B \rightarrow \mathbb{C}$;
- $f_1 \cdot f_2 : B \rightarrow \mathbb{C}$.

2. *se $f_1(z_0) \neq 0$ então a função $\frac{1}{f_1} : B \setminus \{z \in B : f_1(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em z_0 ;*

3. *a função $f_1 \circ g : A \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em z_1 .*

Demonstração. As provas dos itens 1 e 2 são idênticas aos respectivos itens da Proposição 3.4 por isto faremos apenas a prova do item 3. Dado $\varepsilon > 0$ segue da continuidade de f_1 no ponto $g(z_1)$, que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|w - g(z_1)| < \delta_1$ então $|f_1(w) - f_1(g(z_1))| < \varepsilon$. Pela continuidade de g em z_1 podemos encontrar $\delta_2 > 0$ tal que se $|z - z_1| < \delta_2$ então $|g(z) - g(z_1)| < \delta_1$. Assim, tomando $\delta = \delta_2$ temos que se $|z - z_1| < \delta$ então $|f_1(g(z)) - f_1(g(z_1))| < \varepsilon$. ■

3.2 A Derivada Complexa

Nesta seção vamos definir a derivada complexa de uma função $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Para facilitar vamos trabalhar apenas com funções definidas em subconjuntos abertos de \mathbb{C} . A noção de derivada complexa é uma noção que diferencia o cálculo de variáveis reais e complexas. A partir dela veremos surgir uma teoria de cálculo diferencial completamente nova e rica de propriedades interessantes. As novidades oriundas desta nova noção de derivada fazem desta, uma teoria extremamente útil em diversas aplicações em matemática pura e aplicada, física, engenharia e muitas outras áreas.

Definição 3.7. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f tem derivada no sentido complexo em $z_0 \in A$ se existe o seguinte limite*

$$f'(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

A diferença marcante aqui é que apesar da derivada ser definida como no caso de funções reais, pelo limite de quocientes de Newton, agora o quociente de Newton é tomado no sentido da divisão de números complexos. Esta que parece uma pequena diferença terá consequências fantásticas!

Observamos que analogamente ao caso de funções reais a derivada complexa pode também ser obtida pelo seguinte limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Abaixo analisamos a existência da derivada complexa de duas funções bastante simples e importantes neste texto.

Exemplo 3.8. *A função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tem derivada complexa em qualquer $z_0 \in \mathbb{C}$, além do mais $f'(z_0) = 2z_0$. Para verificar este fato, basta observar que*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0.$$

O próximo exemplo mostra como a derivada complexa pode ser radicalmente diferente da derivada no sentido real.

Exemplo 3.9. *Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \bar{z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Então não existe nenhum ponto do plano complexo onde esta função tenha derivada.*

Para verificar este fato vamos considerar z_0 um ponto arbitrário fixado e o quociente de Newton

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \\ &= \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{(\bar{z} - \bar{z}_0)^2}{|z - z_0|^2} \\ &= \frac{(x - x_0 + i(y - y_0))^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 + 2i(x - x_0)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Agora vamos fazer z se aproximar de z_0 por retas paralelas aos eixos coordenados que passando por z_0 .

Primeiro consideramos z da forma $z = t + iy_0$, onde $t \in \mathbb{R}$. Neste caso obtemos, das identidades acima, para $t \neq x_0$ a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{f(t + iy_0) - f(z_0)}{(t + iy_0) - z_0} &= \frac{(t - x_0)^2 - (y_0 - y_0)^2 + 2i(t - x_0)(y_0 - y_0)}{(t - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} \\ &= \frac{(t - x_0)^2}{(t - x_0)^2} = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, se consideramos z da forma $z = x_0 + it$, onde $t \in \mathbb{R}$ temos para $t \neq y_0$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + it) - f(z_0)}{(x_0 + it) - z_0} &= \frac{(x_0 - x_0)^2 - (t - y_0)^2 + 2i(x_0 - x_0)(t - y_0)}{(x_0 - x_0)^2 + (t - y_0)^2} \\ &= -\frac{(t - y_0)^2}{(t - y_0)^2} = -1. \end{aligned}$$

Como os limite quando z tende a z_0 do quociente de Newton ao longo destes dois caminhos é distinto segue que não pode existir a derivada de f no ponto z_0 . Mas já que z_0 é arbitrário, concluimos que esta função não tem derivada em nenhum ponto do plano complexo.

O exemplo acima, mostra como o conceito de derivada complexa é novo. Além do mais ele mostra que em \mathbb{C} é muito simples construir um função que é contínua em todos pontos mas não é derivável em ponto algum. Existem funções com propriedades semelhantes definidas da reta na reta, mas são muito mais complicadas de serem construídas.

Proposição 3.10. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função derivável em $z_0 \in A$. Então f é contínua em z_0 .*

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) \frac{z - z_0}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= 0 \cdot f'(z_0) = 0. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.11. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, f e g funções diferenciáveis em $z_0 \in A$. Então temos*

1. $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$, para qualquer constante $c \in \mathbb{C}$;
2. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;
3. $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;
4. $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$, se $f(z_0) \neq 0$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$, se $g(z_0) \neq 0$.

Demonstração. A prova dos itens 1, 2 e 3 são semelhantes a das proposições anteriores. Por isto vamos apresentar somente a prova dos itens 4 e 5.

Para provar 4 primeiro observamos que podemos reescrever o quociente de Newton de $1/f$ como segue já que $f(z_0) \neq 0$.

$$\frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)}}{z - z_0} = \frac{\frac{f(z_0) - f(z)}{f(z)f(z_0)}}{z - z_0} = -\frac{1}{f(z)f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

Como estamos assumindo que f é derivável em z_0 segue da Proposição 3.10 que f é contínua em z_0 . Desta forma podemos tomar o limite, quando z tende a z_0 na expressão à direita da igualdade acima obtendo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)}}{z - z_0} = -\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

A prova do item 5. Já que estamos assumindo que g é derivável em z_0 e também $g(z_0) \neq 0$ podemos aplicar os itens 3 e 4 para concluir que

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(z_0) = f'(z_0)\frac{1}{g(z_0)} + f(z_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) \\ &= \frac{f'(z_0)}{g(z_0)} - f(z_0)\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2} \\ &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.12 (Regra da Cadeia). *Sejam A, B abertos de \mathbb{C} e $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ funções tais que $g(A) \subset B$. Se g é derivável em z_0 e f é derivável em $f(g(z_0))$, então*

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Demonstração. Defina a função $h : B \rightarrow \mathbb{C}$ como segue

$$h(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(g(z_0))}{w - g(z_0)} - f'(g(z_0)), & \text{se } w \neq g(z_0); \\ 0, & \text{se } w = g(z_0). \end{cases}$$

Observe que h está bem definida em B e é contínua em $g(z_0)$ uma vez que f , por hipótese, é derivável em $g(z_0)$. Como também é continuidade g em z_0 , temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (h \circ g)(z) = h(g(z_0)) = 0. \quad (3.1)$$

Para todo $w \in B$ temos a seguinte igualdade (válida também para $w = g(z_0)$)

$$f(w) - f(g(z_0)) = (h(w) + f'(g(z_0)))(w - g(z_0)).$$

Substituindo w por $g(z)$ na identidade acima e dividindo ambos os lados por $z - z_0$ obtemos:

$$\frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} = (h(g(z)) + f'(g(z_0))) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}.$$

Lembrando de (3.1) podemos concluir da expressão do lado direito da igualdade acima que existe a derivada de $f \circ g$ em z_0 e temos

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(g(z)) - f(g(z_0))}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (h(g(z)) + f'(g(z_0))) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(g(z_0))g'(z_0). \end{aligned}$$

■

3.3 As Condições de Cauchy-Riemann

Nesta seção vamos analisar algumas das consequências da existência da derivada complexa. Em particular, estaremos interessados nas propriedades funções coordenadas de uma função que tem derivada complexa em uma certa região do plano complexo. Um dos resultados principais são as condições de Cauchy-Riemann e sua recíproca enunciados na sequência.

Proposição 3.13 (Condições de Cauchy-Riemann). *Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função da forma $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ derivável em z_0 . Então*

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) = -\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0).$$

Demonstração. Primeiro passo é expressar em coordenadas o quociente de Newton de f como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} \\
&= \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} \cdot \frac{x - x_0 - i(y - y_0)}{x - x_0 - i(y - y_0)} \\
&= \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot (x - x_0 - i(y - y_0)) \\
&= \frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))(x - x_0) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\
&\quad + i \frac{(v(x, y) - v(x_0, y_0))(x - x_0) - (u(x, y) - u(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.
\end{aligned}$$

Já que estamos assumindo que f é diferenciável em z_0 o limite, quando $z \rightarrow z_0$, do quociente de Newton acima existe e é independente do caminho. Desta forma podemos tomá-lo ao longo dos segmentos de reta passando por z_0 e paralelos aos eixos coordenados.

Tomando o limite, na igualdade acima, quando $z \rightarrow z_0$ ao longo da reta $t + iy_0$, com $t \rightarrow x_0$ obtemos

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t + iy_0) - f(z_0)}{t + iy_0 - (x_0 + iy_0)} \\
&= \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{(u(t, y_0) - u(x_0, y_0))(t - x_0) + (v(t, y_0) - v(x_0, y_0))(y_0 - y_0)}{(t - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} \\
&\quad + i \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{(v(t, y_0) - v(x_0, y_0))(t - x_0) - (u(t, y_0) - u(x_0, y_0))(y_0 - y_0)}{(t - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{u(t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t - x_0} + i \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{v(t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t - x_0} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Repetindo o procedimento acima, mas agora fazendo z tender a z_0 pela reta $x_0 + it$, com $t \rightarrow y_0$ temos

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + it) - f(z_0)}{x_0 + it - (x_0 + iy_0)} \\
&= \lim_{t \rightarrow y_0} \frac{(u(x_0, t) - u(x_0, y_0))(x_0 - x_0) + (v(x_0, t) - v(x_0, y_0))(t - y_0)}{(x_0 - x_0)^2 + (t - y_0)^2} \\
&\quad + i \lim_{t \rightarrow y_0} \frac{(v(x_0, t) - v(x_0, y_0))(x_0 - x_0) - (u(x_0, t) - u(x_0, y_0))(t - y_0)}{(x_0 - x_0)^2 + (t - y_0)^2} \\
&= \lim_{t \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, t) - v(x_0, y_0)}{t - y_0} - i \lim_{t \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, t) - u(x_0, y_0)}{t - y_0}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}v(x_0, y_0) - i \frac{\partial}{\partial y}u(x_0, y_0).$$

Dos dois últimos conjuntos de igualdades segue o resultado. \blacksquare

Uma maneira muito prática de lembrar das condições de Cauchy-Riemann consistem em lembrar que f vista como função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 tem derivada total representada por sua matriz Jacobiana (matriz dos gradientes das funções coordenadas) 2×2 como mostrado abaixo:

$$Df(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y}u(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x}v(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y}v(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Desta forma para que este Jacobiano represente um número complexo e necessário que ele seja da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

o que se traduz precisamente nas condições de Cauchy-Riemann.

Como vimos acima as condições de Cauchy-Riemann são necessárias para que f seja derivável em um ponto z_0 em seu domínio. Mas o exemplo abaixo mostra que elas podem, em geral, não ser suficientes para garantir a existência da derivada complexa

Exemplo 3.14. A função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x + iy) = \begin{cases} 0, & \text{se } xy = 0; \\ 1, & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

satisfaz as condições de Cauchy-Riemann em $z_0 = 0$, pois as derivadas parciais das funções coordenadas u e v são nulas na origem. Porém ela não pode ter derivada complexa na origem já que ela não é nem mesmo contínua neste ponto.

Uma condição razoavelmente geral que garante a existência da derivada complexa de uma função f satisfazendo as condições de Cauchy-Riemann será dada na próxima proposição. Mas para prová-la vamos precisar do seguinte lema auxiliar

Lema 3.15. Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função admitindo derivadas parciais contínuas em $(x_0, y_0) \in A$. Então temos

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = (x - x_0) \left(\frac{\partial}{\partial x}F(x_0, y_0) + H(x - x_0, y - y_0) \right) \quad (3.2)$$

$$+ (y - y_0) \left(\frac{\partial}{\partial y}F(x_0, y_0) + K(x - x_0, y - y_0) \right), \quad (3.3)$$

onde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} H(x - x_0, y - y_0) = 0 \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} K(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Demonstração. A prova deste lema é baseada no Teorema do Valor Médio para funções definidas na reta. Vamos considerar $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$. Como A é aberto existe $\delta > 0$ tal que se $\|(h, k)\| < \delta$ então $(x_0 + h, y_0 + k) \in A$.

Note que

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0 + k) + F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0). \quad (3.4)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio a primeira diferença, do lado direito da igualdade acima, podemos garantir que existe $0 < t < 1$ tal que

$$\frac{F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0 + k)}{h} = \frac{\partial}{\partial x} F(x_0 + th, y_0 + k).$$

Como estamos assumindo que as derivadas parciais de F são contínuas, temos que a diferença que aparece abaixo tende a zero, quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

$$H(h, k) = \frac{\partial}{\partial x} F(x_0 + th, y_0 + k) - \frac{\partial}{\partial x} F(x_0, y_0).$$

Isolando o termo $\frac{\partial}{\partial x} F(x_0 + th, y_0 + k)$ na igualdade acima e o substituindo na igualdade anterior, obtemos a seguinte identidade

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0 + k) = h \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0, y_0) + H(h, k) \right). \quad (3.5)$$

Similarmente, temos para a segunda diferença em (3.4) podemos mostrar que existe $0 < t' < 1$ tal que

$$\frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{t'} = \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0 + t'k).$$

Pela continuidade das derivadas parciais temos

$$K(h, k) = \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0 + t'k) - \frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0)$$

tende a zero quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Procedendo de maneira análoga obtemos

$$F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = k \left(\frac{\partial}{\partial y} F(x_0, y_0) + K(h, k) \right). \quad (3.6)$$

Para encerrar a prova basta somar as igualdades (3.5) e (3.6). ■

Proposição 3.16. *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa dada por $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, admitindo derivadas parciais*

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} v(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} v(x, y),$$

em todos os pontos de algum disco $D(z_0, r) \subset A$ e contínuas em $z_0 = x_0 + iy_0$. Se as Condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em z_0 então f possui derivada em z_0 . Além do mais, temos que $f'(z_0)$ pode ser descrita de duas formas alternativas:

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0)$$

ou

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) - i \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0).$$

Demonstração. Uma das ideias principais desta prova é escrever a função f em termos de suas coordenadas e em seguida usar o Lema 3.15.

Para cada $z \in A$ temos

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0)) \\ &= (x - x_0) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + H_1(x - x_0, y - y_0) \right) \\ &\quad + (y - y_0) \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0) + K_1(x - x_0, y - y_0) \right) \\ &\quad + i(x - x_0) \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) + H_2(x - x_0, y - y_0) \right) \\ &\quad + i(y - y_0) \left(\frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) + K_2(x - x_0, y - y_0) \right). \end{aligned}$$

Usando as condições de Cauchy-Riemann podemos reescrever a igualdade acima como segue

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= (z - z_0) \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) \right) \\ &\quad + (H_1(x - x_0, y - y_0) + iH_2(x - x_0, y - y_0))(x - x_0) \\ &\quad + (K_1(x - x_0, y - y_0) + iK_2(x - x_0, y - y_0))(y - y_0). \end{aligned}$$

Próximo passo é dividir ambos os lados da igualdade acima por $z - z_0$, ficando com a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) \\ &\quad + (H_1(x - x_0, y - y_0) + iH_2(x - x_0, y - y_0)) \frac{x - x_0}{z - z_0} \\ &\quad + (K_1(x - x_0, y - y_0) + iK_2(x - x_0, y - y_0)) \frac{y - y_0}{z - z_0}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pelo Lema 1.6 temos para todo $z \neq z_0$

$$\left| \frac{x - x_0}{z - z_0} \right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left| \frac{y - y_0}{z - z_0} \right| \leq 1.$$

Estas duas estimativas junto com o fato que as quatro funções H_1, H_2, K_1 e K_2 tendem a zero quando $z \rightarrow z_0$ implicam em

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (H_1(x - x_0, y - y_0) + iH_2(x - x_0, y - y_0)) \frac{x - x_0}{z - z_0} = 0$$

e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (K_1(x - x_0, y - y_0) + iK_2(x - x_0, y - y_0)) \frac{y - y_0}{z - z_0} = 0.$$

Usando estes dois limites e a igualdade (3.7) podemos finalmente verificar que existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0).$$

■

Exemplo 3.17. Uma aplicação direta da Proposição 3.16 mostra que a função $f(z) = z\bar{z}$ só possui derivada na origem. De fato, neste caso temos $f(x + iy) = x + 2 + y^2$, logo $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$ para todo $x + iy \in \mathbb{C}$. Logo

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) = 0.$$

Da Proposição 3.13 segue que em todos os pontos onde f tem derivada as Condições de Cauchy-Riemann devem ser satisfeitas. Analisando a derivadas parciais acima verificamos que as condições de Cauchy-Riemann são verificadas apenas no ponto $z = 0$. Como as derivadas parciais de u e v são contínuas podemos aplicar a Proposição 3.16 para garantir que existe $f'(0) = 0$. Então f possui derivada apenas em $z = 0$.

Podemos reformular, heurísticamente, as condições de Cauchy-Riemann em termos das variáveis z e \bar{z} . Para fazer isto usamos inicialmente as seguintes relações

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (3.8)$$

Depois representamos uma função complexa, em coordenadas, em termos dessas variáveis como mostrado abaixo

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + v\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

Em seguida apelamos para uma suposta Regra da Cadeia para concluir que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \right) \quad (3.9)$$

Pensando em z e \bar{z} nas igualdades (3.8) como variáveis, temos que

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = -\frac{1}{2i}$$

Usando estas duas relações em (3.9) ficamos com

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Assim é imediato verificar que as Condições de Cauchy-Riemann são válidas se, e somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

o que é o mesmo que dizer (no caso em que as todas derivadas parciais de u e v são contínuas) que se f tem derivada complexa se, e somente se, ela não depende da “variável” \bar{z} .

Podemos refazer a discussão acima de maneira completamente rigorosa, considerando a linguagem de operadores lineares agindo em determinados espaços vetoriais complexos de funções como, por exemplo, agindo em

$$C^1(A, \mathbb{C}) = \left\{ f : A \rightarrow \mathbb{C} : \begin{array}{l} f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ e} \\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} \text{ são contínuas em } A \end{array} \right\}.$$

Ao leitor não acostumado com este tipo de linguagem, observamos que $C^1(A, \mathbb{C})$ é um conjunto, onde cada um dos seus elementos é uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ como definida acima.

Vamos definir então operadores lineares, conhecidos também como “operadores de derivação”, como sendo aplicações lineares que pegam uma função $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e levam em outra função. No nosso caso eles são:

$$\frac{\partial}{\partial z} : C^1(A, \mathbb{C}) \rightarrow C(A, \mathbb{C}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : C^1(A, \mathbb{C}) \rightarrow (C(A), \mathbb{C}),$$

onde $C(A, \mathbb{C})$ é o espaço vetorial sobre \mathbb{C} das funções complexas contínuas definidas em A e tomando valores em \mathbb{C} . O primeiro deste operadores leva uma função $f \in C^1(A, \mathbb{C})$ em uma outra função $\frac{\partial}{\partial z}f$

$$C^1(A, \mathbb{C}) \ni f \quad \longmapsto \quad \frac{\partial}{\partial z}f \in C(A, \mathbb{C})$$

que é definida para cada $x + iy \in A$ pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}f(x + iy) &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) \\ &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) + i \left(\frac{\partial}{\partial x}v(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) \right) \right), \end{aligned}$$

onde $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$, como de costume, denotam as derivadas parciais de funções de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R} , com respeito a x e y , respectivamente.

O segundo operador é definido de maneira análoga e para ele temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(x + iy) &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}v(x, y) + i \left(\frac{\partial}{\partial x}v(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) \right) \right). \end{aligned}$$

De forma mais resumida podemos pensar nestes operadores formalmente como

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

respectivamente.

Proposição 3.18 (Versão Funcional das Condições de Cauchy-Riemann). *Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f \in C^1(A, \mathbb{C})$. Então f é derivável no sentido complexo no ponto $z = x + iy \in A$ se, e somente se,*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f(x + iy) = 0.$$

Demonstração. Vamos supor inicialmente que f é derivável no sentido complexo em $z \in A$. Com visto acima, para toda $f \in C^1(A, \mathbb{C})$ temos

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x + iy) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) + i \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) \right).$$

Já que f é derivável em $z \in A$ segue da Proposição 3.13 que as Condições de Cauchy-Riemann são válidas e portanto a parte real e imaginárias da igualdade acima são nulas, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x + iy) = 0.$$

Reciprocamente, se $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x + iy) = 0$, então as Condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas. Como estamos assumindo que $f \in C^1(A, \mathbb{C})$ sabemos que as derivadas parciais de u e v são contínuas em qualquer ponto $z \in A$. Assim podemos aplicar a Proposição 3.16 para garantir que f tem derivada no sentido complexo em z . ■

De maneira análoga para todo $r = 2, 3, 4, \dots$ podemos definir o espaço $C^r(A, \mathbb{C})$ como sendo o espaço das funções complexas definidas em A cujas as funções coordenadas u e v têm derivadas parciais de todas as ordens entre 1 e r , contínuas em A . Note que se $r \geq 2$ então $C^r(A, \mathbb{C})$ é um subespaço de $C^1(A, \mathbb{R})$. Assim podemos considerar que nossos operadores lineares $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \bar{z}$ como operadores lineares definidos em $C^r(A, \mathbb{C})$. Para $r \geq 2$ faz sentido aplicar estes operadores sucessivamente (no máximo duas vezes). Por exemplo, para $f \in C^2(A, \mathbb{R})$ está bem definida a seguinte função

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x + iy).$$

Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz (visto no Cálculo 2) sabemos que se as funções $u : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^2 em um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ então para qualquer ponto $(x, y) \in A$ temos

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} v(x, y).$$

Desta maneira, se consideramos o operador $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ agindo em $C^2(A, \mathbb{R})$ podemos usar o Teorema de Clairaut-Schwarz para verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \Delta, \end{aligned}$$

onde Δ é o operador Laplaciano. Este fatos demostram que para toda $f \in C^2(A, \mathbb{C})$ com $f = u + iv$ temos

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x + iy) = \frac{1}{4}(\Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)). \quad (3.10)$$

Lembramos que uma função $u : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma **função harmônica** em A , se para todo $(x, y) \in A$ temos que

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0.$$

As funções harmônicas são muito presentes em várias das aplicações mais interessantes do Cálculo Diferencial e Integral em Física, Engenharias, Biologia, Economia e em várias outras áreas; inclusive na Matemática pura. Nosso próximo resultado estabelece uma relação forte entre funções harmônicas e funções deriváveis no sentido complexo.

Lema 3.19. *Se uma função complexa $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ definida em um aberto $A \subset \mathbb{C}$ e dada por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ tem derivada, no sentido complexo, em todos os pontos de A e as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de u e v são contínuas em A , então a partes real e imaginárias de f são funções harmônicas em A , isto é, u e v são funções harmônicas em A .*

Demonstração. Já que f tem derivada complexa em todo ponto de A segue da Proposição 3.18 que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0.$$

Deste fato e da identidade (3.10) concluímos que

$$\frac{1}{4}(\Delta u(x, y) + i\Delta v(x, y)) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(x + iy) = 0$$

e conseqüentemente que ambas u e v são funções harmônicas em A . ■

3.4 Funções Holomorfas

Podemos finalmente definir o objeto central destas notas que é o conceito de função holomorfa. Estas funções são conhecidas também na literatura (mais antiga) como funções regulares ou diferenciáveis no sentido complexo. A última nomenclatura é bastante mais natural, dada que estas funções serão definidas em termos de limites de quocientes de Newton, exatamente como ocorre no caso de funções da reta na reta. Mas apesar da semelhança, uma função holomorfa de uma variável complexa irá satisfazer propriedades muito mais fortes do que uma função diferenciável da reta na reta. Por exemplo, iremos mostrar que uma função holomorfa é infinitamente derivável no sentido complexo! Este fato contrasta absurdamente com o que pode ocorrer para funções reais. Pois uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} pode ter uma derivada e não possuir uma segunda derivada. É simples imaginar diversos exemplos de funções reais satisfazendo esta propriedade. Na verdade, um fato muito mais impressionante é válido: uma função holomorfa é sempre analítica, no sentido que

ela admite uma expansão em série de potências convergente em bolas em volta de cada um dos pontos de seu domínio (séries de potências complexas serão discutidas nas seções seguintes). Por esta razão, as funções holomorfas, muitas vezes, são chamadas de funções analíticas. Esta propriedade é outra diferença marcante entre as funções que admitem derivadas no sentido complexo e real. Já que existem diversos exemplos de funções deriváveis no sentido real possuindo infinitas derivadas e que não admitem representações em séries de potências em todos os pontos de seu domínio.

Definição 3.20 (Função Holomorfa). *Seja $A \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é holomorfa em A se $f'(z)$ existe para todo $z \in A$.*

Note que a Proposição 3.16 fornece uma poderosa ferramenta para verificar que se uma função complexa é holomorfa em um determinado aberto A . Além do mais, vale a pena mencionar que a Proposição 3.18 caracteriza as funções holomorfas como aquelas que não dependem da “variável” \bar{z} .

Na verdade, existe um resultado muito mais forte do que os mencionados acima, devido a Loomann e Menchoff, fornecendo condições suficientes para que uma função complexa $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ seja holomorfa. Este resultado é conhecido hoje em dia como Teorema de Loomann-Menchoff e ele afirma que se f é uma função contínua e existem as derivadas parciais de u e v e estas por sua vez satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em todos os pontos de A então f é holomorfa. Este teorema foi enunciado inicialmente pelo famoso matemático Paul Montel em [Mon13] e uma primeira “prova” foi dada por Herman Loomann em [Loo23]. Escrevemos prova entre aspas, porque havia um problema no argumento de Loomann, e este foi posteriormente reparado por Menchoff em um livro [Men36] em 1936 editado por Paul Montel. Há hoje dia versões mais simples destas provas até mesmo em livros didáticos como o de Narasimha-Nievergelt [NN01]. Neste livro os autores provam este teorema no Capítulo 1, em uma seção que ocupa 6 páginas. Aos leitores realmente interessados nesta versão recomendamos começar a leitura desta prova lendo o artigo de Gray e Morris de 1978, publicado na famosa American Mathematical Monthly [GM78]. Neste artigo os autores abordam os aspectos históricos deste teorema, e também comentam sobre os pontos obscuros de vários trabalhos que abordaram este problema.

Um exemplo muito importante de função holomorfa é uma função polinomial de grau n , isto é, $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n,$$

onde a_0, a_1, \dots, a_n são números complexos fixados chamados de coeficientes de p . Para verificar que esta função polinomial é de fato holomorfa em \mathbb{C} basta mostrar que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^m$ é holomorfa para qualquer $m \in \mathbb{N}$ e em seguida, aplicar sucessivamente a Proposição 3.11. Para isto observe que a seguinte identidade algébrica é satisfeita

$$\frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} = z^{m-1} + z^{m-2}z_0 + z^{m-3}z_0^2 + \dots + z^2z_0^{m-2} + zz_0^{m-1}.$$

Já que o lado direito da igualdade acima é uma soma de funções contínuas em todo \mathbb{C} podemos tomar o limite, quando $z \rightarrow z_0$, na igualdade acima e portanto temos que f é derivável e além do mais

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^m - z_0^m}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} z^{m-1} + z^{m-2}z_0 + z^{m-3}z_0^2 + \dots + z^2z_0^{m-2} + zz_0^{m-1} \\ &= mz_0^{m-1}. \end{aligned}$$

Daí segue que qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$ temos $f'(z) = mz^{m-1}$ logo

$$p'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots + na_nz^{n-1}.$$

Podemos usar este fato e novamente a Proposição 3.11 para verificar que uma função racional é holomorfa no conjunto onde seu denominador não se anula. Mais precisamente, sejam $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções polinomiais. Seja A o conjunto de todos os pontos do plano complexo exceto os zeros do polinômio q , isto é, $A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$. Vamos ver mais a frente que o conjunto de zeros de qualquer polinômio de uma variável complexa com coeficientes complexos é finito. Usando este fato podemos verificar que A é um aberto do plano complexo. Agora considere a função racional $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Pelo exemplo anterior e pela Proposição 3.11 temos que f é holomorfa em A .

Observamos também que a regra da cadeia fornece uma ferramenta para construir novas funções holomorfas a partir de composições de funções holomorfas já conhecidas.

Definição 3.21 (Função Inteira). *Uma função complexa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita uma função inteira se f é holomorfa em todo \mathbb{C} .*

Definição 3.22 (Ponto Singular). *Um ponto singular de uma função complexa f é um ponto z_0 do plano complexo tal que existe um disco $D(z_0, r)$ no qual f é holomorfa, exceto em z_0 .*

Por exemplo, as funções constantes e polinômios são funções inteiras. Já a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1/z$ tem um ponto singular (ou uma singularidade isolada) na origem. Um exemplo de uma função possuindo dois pontos singulares é dado pela função racional

$$f(z) = \frac{2}{(z+1)^2(z-2i)^3},$$

Neste exemplo $z = -1$ e $z = 2i$ são pontos singulares, ou singularidades isoladas da função f .

Por outro lado, a função $f(z) = \bar{z}$ não possui pontos singulares, pois esta função não é derivável em ponto algum.

3.5 A Exponencial Complexa

Nesta seção vamos apresentar a função exponencial complexa bem como várias de suas propriedades elementares. Inicialmente vamos adotar uma notação especial para esta função $\exp(z)$. Após estabelecer várias semelhanças desta com a função exponencial real $x \mapsto e^x$, com quem o leitor já está bem acostumado, passamos a usar, quando for conveniente a notação e^z .

Definição 3.23 (Função Exponencial). *A função exponencial complexa será denotada por $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e definida para cada ponto $z = x + iy \in \mathbb{C}$ pela expressão*

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Para facilitar vamos nos referir a função exponencial complexa $z \mapsto \exp(z)$ simplesmente por função exponencial. Descrita em coordenadas a função exponencial, calculada em $z = x + iy$, tem a seguinte forma $\exp(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad e \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Note que sua descrição em coordenadas é suficientemente simples de forma que podemos aplicar imediatamente os resultados da seção anterior como, por exemplo, as Condições de Cauchy-Riemann e a Proposição 3.16 para concluir que $z \mapsto \exp(z)$ define uma função inteira. De fato, já que para todo $x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) &= e^x \cos y, & \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) &= -e^x \operatorname{sen} y, \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) &= e^x \operatorname{sen} y, & \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) &= e^x \cos y, \end{aligned}$$

as Condições de Cauchy-Riemann são válidas em todos os pontos do plano complexo. Além do mais, como as funções u e v possuem derivadas parciais contínuas segue da Proposição 3.16 que $z \mapsto \exp(z)$ é derivável em cada $z \in \mathbb{C}$ e portanto inteira. Além do mais a Proposição 3.16 também fornece uma fórmula para derivada complexa em termos das funções coordenadas que é a seguinte:

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) \\ &= e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y \\ &= e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\ &= \exp(z). \end{aligned}$$

Note também que se z é real, isto é, $z = x + i0$ então $\exp(x) = e^x$. Como no caso da exponencial real a imagem de qualquer ponto pela função exponencial complexa é sempre diferente de zero. Uma maneira de ver isto é verificando o módulo de $\exp(z)$ é não-nulo. De fato, para qualquer que seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$ temos

$$|\exp(z)| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)|$$

$$\begin{aligned}
&= |e^x| \cdot |\cos y + i \operatorname{sen} y| \\
&= |e^x| \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} \\
&= e^x > 0.
\end{aligned}$$

A exponencial complexa possui uma propriedade análoga à uma das propriedades fundamentais da exponencial real que é a identidade $e^x e^y = e^{x+y}$, válida para todo par $x, y \in \mathbb{R}$. Dados quaisquer números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ temos que

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2).$$

Esta identidade é consequência direta da definição da função exponencial complexa e das identidades trigonométricas fundamentais, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\
&= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\
&= e^{x_1+x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 + i [\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2]) \\
&= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)) \\
&= \exp((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) \\
&= \exp(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

A identidade $e^{-x} = 1/e^x$ também possui uma contrapartida na exponencial complexa. Para provar esta generalização só precisamos usar a definição da exponencial complexa, as propriedades algébricas básicas dos números complexos e lembrar que o cosseno é uma função par, $\cos(-x) = \cos(x)$, e o seno é uma função ímpar, $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen}(y)$. Em seguida, proceder como segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\exp(z)} &= \frac{1}{e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)} \\
&= \frac{1}{e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)} \cdot \frac{\cos y - i \operatorname{sen} y}{\cos y - i \operatorname{sen} y} \\
&= \frac{e^{-x} (\cos y - i \operatorname{sen} y)}{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} \\
&= e^{-x} (\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)) \\
&= \exp(-x - iy) \\
&= \exp(-z).
\end{aligned}$$

Como consequência das identidades acima temos para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ que

$$\frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1) \exp(-z_2) = \exp(z_1 - z_2). \quad (3.11)$$

Usando as identidades estabelecidas acima temos para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$ que

$$\exp(z)^n = \exp(nz).$$

Para verificar a validade deste fato basta proceder uma indução formal em n .

Agora vamos mostrar algumas diferenças entre a exponencial real e complexa. Em \mathbb{R} temos bem definida a função $x \mapsto e^{\frac{1}{n}x}$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. O número $e^{\frac{1}{n}x}$ é caracterizado como sendo o único número real tal que o produto dele por ele mesmo n vezes é igual e^x . Em outras palavras, $y = e^{\frac{1}{n}x}$ é a única solução real da equação $y^n = e^x$. Considerando que a única solução real desta equação seja definição de $e^{\frac{1}{n}x}$, podemos nos perguntar o que aconteceria se considerarmos sua generalização natural para números complexos. Isto é, $w^n = \exp(z)$. Para facilitar, consideramos separadamente os casos em que n é positivo e negativo. Para n inteiro positivo esta equação é um caso particular da equação $w^n = w_0$, que como vimos, possui exatamente n soluções distintas se $w_0 \neq 0$, que é o caso de $w_0 = \exp(z) \neq 0$.

Desta forma não é possível pensar na relação $z \mapsto \exp(z)^{\frac{1}{n}}$ como uma função. Pois, para cada z podemos associar n distintas raízes n -ésimas de $\exp(z)$ uma para cada solução da equação $w^n = \exp(z)$. Na literatura é comum entretanto se referir a relação $z \mapsto \exp(z)^{\frac{1}{n}}$ como uma função multiforme.

Usando a fórmula deduzida em (1.7), juntamente com a definição da exponencial complexa, temos para cada $0 \leq j \leq n-1$ que o número complexo

$$e^{\frac{z}{n}} \left(\cos \left(\frac{y + 2\pi j}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{y + 2\pi j}{n} \right) \right) = \exp \left(\frac{z + 2\pi j}{n} \right)$$

é uma raiz n -ésima de $\exp(z)$. As vezes, abusamos da notação e escrevemos

$$\exp(z)^{\frac{1}{n}} = \exp \left(\frac{z + 2\pi j}{n} \right), \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Discussão semelhante é válida para potências racionais da exponencial, isto é $\exp(z)^{\frac{m}{n}}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Como no caso das raízes n -ésimas da função exponencial complexa, a relação $z \mapsto \exp(z)^{\frac{m}{n}}$ não irá, em geral, definir uma função e sim um função multiforme que vamos denotar por

$$\exp(z)^{\frac{m}{n}} = \exp \left(\frac{m}{n}(z + 2\pi j) \right), \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Esta duas novidades são consequências da periodicidade da função exponencial complexa, isto é,

$$\exp(z + 2i\pi) = e^x (\cos(y + 2\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2\pi)) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = \exp(z).$$

Desta forma a função exponencial mapeia retas paralelas ao eixo imaginário em círculos centrados na origem e retas paralelas ao eixo real são enviadas em semi-retas saindo da origem.

Usando novamente que as funções trigonométricas cosseno e seno são funções par e ímpar, respectivamente, podemos verificar que o conjugado da exponencial

é simplesmente a exponencial do conjugado, mais precisamente para todo $z \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned}\overline{\exp(z)} &= \overline{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)} \\ &= e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y) = e^x(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)) = \exp(\bar{z}).\end{aligned}$$

Por último, mencionamos mais uma importante propriedade que a exponencial é sobrejetora em \mathbb{C}^* , isto é, $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ é uma aplicação sobrejetora. Para verificar que $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, escolha um ponto arbitrário $w = a + ib \in \mathbb{C}^*$. Considere a equação

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = \exp(z) = w = a + ib$$

Como $w \neq 0$ podemos representá-lo em coordenadas polares como segue $w = |w|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Logo

$$e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = |w|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

e portanto tomando $x = \ln |w|$ e $y = \theta + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$ temos que $\exp(x + iy) = w$, mostrando que aplicação exponencial complexa é sobrejetiva em \mathbb{C}^* .

Note que se $z \in \mathbb{C}$ é imaginário puro, isto é, $z = iy$ para algum $y \in \mathbb{C}$ temos que $\exp(z) = \exp(iy) = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Esta observação mostra que podemos escrever um número complexo em sua forma polar da seguinte maneira $w = r \exp(i\theta)$.

Pelo fato da função exponencial complexa \exp poder ser vista como uma extensão da função exponencial real $x \mapsto e^x$ e ter muitas propriedades semelhantes vamos adotar também no caso complexo a notação e^z . Observe que as propriedades demonstradas acima permitem verificar que, por exemplo, que se $z = x + iy$ então $e^z = e^x e^{iy}$.

3.6 Funções Trigonométricas e Trigonométricas Hiperbólicas Complexas

Definimos as funções seno e cosseno complexos como segue

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Observe que similarmente ao caso real, as derivadas destas funções são dadas por

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\operatorname{sen} z \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz} \operatorname{sen} z = \cos z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Em particular, estas funções são inteiras.

As funções seno e cosseno complexas definidas acima, podem ser vistas como extensões das funções trigonométricas reais. Para ver isto vamos determinar suas representações em coordenadas

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^y(\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x))) \\
&= \frac{1}{2}((e^y + e^{-y}) \cos x + i(e^y - e^{-y}) \operatorname{sen} x) \\
&= \cosh y \cos x + i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Agora fica claro que se $z = x + i0$ então $\cos z = \cos x$.

Analogamente, podemos mostrar que se $z = x + iy$ então

$$\operatorname{sen} z = \cosh y \operatorname{sen} x - i \operatorname{senh} y \cos x.$$

Observe que as funções seno e cosseno complexos **não** são funções limitadas em todo plano complexo.

Outra maneira interessante de definir estas funções é por meio dos seguintes problemas de valor inicial (PVI) complexos

$$z \mapsto \operatorname{sen} z \quad \text{é a única solução do PVI} \quad \begin{cases} f''(z) = -f(z); \\ f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 1. \end{cases}$$

e

$$z \mapsto \cos z \quad \text{é a única solução do PVI} \quad \begin{cases} f''(z) = -f(z); \\ f(0) = 1 \text{ e } f'(0) = 0. \end{cases}$$

Vamos voltar a esta abordagem mais a frente depois de estabelecer analiticidade e a representação integral destas funções.

As funções trigonométricas hiperbólicas são definidas como segue

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Estas duas funções possuem generalizações muito mais naturais do que de as funções trigonométricas. Do ponto de vista de suas relações em termos de derivadas temos

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \operatorname{senh} z \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz} \operatorname{senh} z = \cosh z.$$

Analogamente estas funções são soluções dos seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{cases} f''(z) = f(z); \\ f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f''(z) = f(z); \\ f(0) = 0 \text{ e } f'(0) = 1, \end{cases}$$

respectivamente.

Do ponto de vistas da equações diferenciais ou dos PVI's temos que estas funções trigonométricas e as trigonométricas hiperbólicas são descritas de maneira totalmente similares em \mathbb{R} e \mathbb{C} . As diferenças entre elas, como por exemplo, a não limitação das funções seno e cosseno complexos são devidas apenas à natureza dos domínios onde estas funções estão definidas bem como da derivada complexa.

As funções tangente, secante, cossecante e suas análogas hiperbólicas são definidas de maneira análoga ao caso real.

Lista 3

1. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio. Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ seja uma função contínua tal que sua imagem está contida no conjunto dos números inteiros, isto é, $f(U) \subset \mathbb{Z}$. Mostre que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(z) \equiv k$, para todo $z \in U$.
2. Dê um exemplo de um aberto $U \subset \mathbb{C}$ e uma função complexa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tais que f é uma função contínua em U , sua imagem está contida em \mathbb{Z} , mas f não é constante, como no exercício anterior.
3. Em quais pontos do plano complexo cada uma das seguintes funções têm derivada (no sentido complexo)

- $f(z) = x$;
- $f(z) = \bar{z}^2$;
- $f(z) = f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;
- $f(z) = |z|$;

4. Em quais pontos do plano complexo a função

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

tem derivada? Para tais pontos calcule $f'(z)$.

5. Seja $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por

$$g(z) = \frac{\bar{z}}{z}.$$

Pergunta: existe o limite de $g(z)$ quando z tende a zero?

6. Mostre **usando as equações de Cauchy-Riemann** que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3 + 2z + 1$ é inteira.
7. Existe algum subconjunto do plano complexo onde $f(z) = |z|$ é analítica?
8. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio (aberto e conexo). Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ seja uma função holomorfa. Defina $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) = \overline{f(z)}$. A função g é holomorfa no domínio U ?
9. **usando as equações de Cauchy-Riemann** mostre que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$ é inteira.

10. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira **não constante**. Mostre que as seguintes funções não são inteiras:
- $|f(z)|$;
 - $\overline{f(z)}$;
 - $\operatorname{Im}(f(z))$;
 - $\operatorname{Re}(f(z))$.
11. Seja $\mathbb{H} \equiv \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ o semi-plano superior. Considere a função $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Mostre que $\operatorname{Im}(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Conclua que f define uma função que leva \mathbb{H} em algum subconjunto de \mathbb{H} . Verifique se as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em \mathbb{H} , em caso afirmativo, determine a derivada de f em cada ponto de seu domínio.
12. Se $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto do plano complexo é verdade que se $f'(z) = 0$ para todo $z \in U$ então $f(z) \equiv c$ para alguma constante $c \in \mathbb{C}$?
13. Sejam $D(0, R)$ o disco de centro na origem e raio $R > 0$ e $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em $D(0, R)$. Mostre que se existe um número complexo c tal que $\operatorname{Re}(f(z)) = c$ para todo $z \in D(0, R)$, então f é uma função constante.
14. A conclusão do exercício acima continua verdadeira se supormos apenas que a parte imaginária de f é constante ?
15. Examine a função analítica $f(z) = z^2$.
- Determine as funções $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $z^2 = u(x, y) + iv(x, y)$.
 - Determine as seguintes *curvas equipotenciais* para u e v , isto é, as curvas $u(x, y) = 1$ e $v(x, y) = 1$.
 - Determine os pontos de interseção das curvas, determinadas no exercício anterior, no primeiro quadrante.
 - Mostre que nos pontos de interseção, estas curvas se tocam ortogonalmente, isto é, seus vetores tangentes neste ponto são ortogonais.

Semana 4

“ ... in effect, if one extends these functions by allowing complex values for the arguments, then there arises a harmony and regularity which without it would remain hidden ”

—B. Riemann, 1851

4.1 Os Ramos do Argumento e do Logaritmo

Vamos começar esta seção estuando funções conhecidas como ramos do argumento. Elas serão de grande utilidade no estudo da função logaritmo complexo, ou melhor, no estudo dos diversos ramos do logaritmo, como ficará claro a frente.

Definição 4.1 (Ramo do Argumento). *Seja $U \subset \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$ um conjunto aberto conexo. Uma função contínua $\arg : U \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\frac{z}{|z|} = \exp(i \arg(z)), \quad \forall z \in U, \quad (4.1)$$

é chamada de um ramo do argumento.

Não é uma tarefa completamente trivial construir ramos do argumento. Apesar deles estarem totalmente ligados a ideia intuitiva de ângulo expressá-los analiticamente é às vezes um pouco trabalhoso. Antes de construirmos um ramo propriamente dito, vamos estudar quais propriedades tais funções têm para ir entendendo melhor como eles funcionam do ponto de vista analítico.

Proposição 4.2. *Não existe nenhum ramo do argumento definido em todo \mathbb{C}^* , isto é, não existe nenhuma função contínua definida em todo o conjunto \mathbb{C}^* satisfazendo a igualdade (4.1) para todo $z \in \mathbb{C}^*$.*

Demonstração. A prova é por contradição. Suponha que exista tal função $\arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Considere a curva $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = \cos t + i \sen t$. É claro que γ é uma função contínua de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{C} e portanto a composta $\arg \circ \gamma$ é uma função contínua de $[-\pi, \pi]$ em \mathbb{R} . Por (4.1) para qualquer $t \in [-\pi, \pi]$ temos que

$$\begin{aligned} \cos t + i \sen t &= \frac{\cos t + i \sen t}{|\cos t + i \sen t|} = \exp(i \arg(\gamma(t))) \\ &= \cos(\arg(\gamma(t))) + i \sen(\arg(\gamma(t))). \end{aligned}$$

Desta forma $\arg(\gamma(t)) = t + 2k(t)\pi$, onde para cada $t \in [-\pi, \pi]$ temos $k(t) \in \mathbb{Z}$. Já que $t \mapsto \arg(\gamma(t))$ é contínua e $[-\pi, \pi]$ é conexo segue que $k(t) \equiv k$, onde k é alguma constante inteira. Logo $\arg(\gamma(t)) = t + 2k\pi$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$. Pela definição de γ temos que se $t \rightarrow \pi$ então $\gamma(t) \rightarrow -1$ e assim

$$\arg(-1) = \lim_{t \rightarrow \pi} \arg(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow \pi} t + 2k\pi = (2k + 1)\pi.$$

Novamente pela definição de γ temos que se $t \rightarrow -\pi$ então $\gamma(t) \rightarrow -1$ e portanto

$$\arg(-1) = \lim_{t \rightarrow -\pi} \arg(\gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow -\pi} t + 2k\pi = (2k - 1)\pi.$$

O que é uma contradição com a equação anterior. ■

Uma inspeção cuidadosa da prova acima revela, na verdade, que nenhum ramo do argumento pode conter em seu domínio nenhum conjunto da forma $D(0, r) \setminus \{0\}$ não importa quão pequeno seja $r > 0$. Em outras palavras, dentro do domínio U de um ramo qualquer do argumento, não pode ser possível “circular a origem”, isto é, encontrar um círculo (totalmente contido em U) de forma que a origem esteja dentro da região delimitada por este círculo. Na verdade, com um pouco mais de trabalho poderíamos generalizar esta afirmação de um círculo para uma curva de Jordan suave por partes. Portanto para encontrar ramos do argumento devemos criar barreiras para que existam tais curvas circundando a origem. A maneira mais natural de criarmos tais “barreiras” seria olhando para a família de todos os conjuntos da forma $D(0, r) \setminus \{0\}$, com $r > 0$ e para cada raio $r > 0$ fixado, remover um ponto de $\partial D(0, r)$. Entretanto isto não pode ser feito de maneira completamente aleatória. Más escolhas da remoção destes pontos poderiam não ser efetivas para bloquear a existência de curvas de Jordan suave por partes circundando a origem.

Além do mais, é preciso levar em conta que a equação (4.1) deve ser válida. Por falar na equação (4.1), observe que se $z \in U$ e se $\alpha z \in U$, onde $\alpha > 0$ então

$$\exp(i \arg(\alpha z)) = \frac{\alpha z}{|\alpha z|} = \frac{z}{|z|} = \exp(i \arg(z)).$$

Esta observação sugere que funções contínuas definidas em $\partial D(0, 1) \setminus \{z_0\}$, onde $z_0 = \cos \phi + i \sin \phi$ é um ponto qualquer em $\partial D(0, 1)$, satisfazendo (4.1) podem eventualmente ser estendidas a funções contínuas definidas em toda a região $\mathbb{C}^* \setminus L_\phi$, onde L_ϕ é o segmento de reta dado por $L_\phi \equiv \{t(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C} : t > 0\}$. Entretanto não é muito simples exibir uma tal função em termos da variável complexa z e ou suas coordenadas. Esta será nossa próxima tarefa, descrever tal função. Ela será a função que fornece um ângulo entre $-\pi$ e π para qualquer número complexo em $\mathbb{C}^* \setminus L_\pi$.

Antes de definir analiticamente esta função precisamos introduzir algumas notações. Vamos chamar de \arccos a função inversa da função $\cos : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$. Vamos denotar por \arcsen a inversa da função $\sin : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-1, 1)$ e finalmente denotamos por $\widetilde{\arccos}$ a inversa da função $\cos : (-\pi, 0) \rightarrow (-1, 1)$.

Teorema 4.3. A função $\arg : \mathbb{C} \setminus L_\pi \rightarrow (-\pi, \pi)$ dada por

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right), & \text{se } z \in U_1 \equiv \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) > 0\}; \\ \arcsen\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right), & \text{se } z \in U_2 \equiv \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0\}; \\ \widetilde{\arccos}\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right), & \text{se } z \in U_3 \equiv \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w) < 0\}; \end{cases}$$

é uma função bem-definida e contínua em $\mathbb{C} \setminus L_\pi$ e satisfaz

$$\frac{z}{|z|} = \exp(i \arg(z)), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus L_\pi.$$

A função \arg definida acima é chamada de ramo principal do argumento.

Demonstração. Primeiro é preciso mostra que a função \arg está bem-definida. Isto é,

i) se $z \in U_1 \cap U_2$ então

$$\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) = \arcsen\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right);$$

ii) se $z \in U_2 \cap U_3$ então

$$\arcsen\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right) = \widetilde{\arccos}\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right).$$

Já que a prova de ambos itens são análogas, vamos apresentar apenas a prova do item i).

Seja $z \in U_1 \cap U_2$ e assuma que

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right). \quad (4.2)$$

Tomando o cosseno nos dois lados da igualdade acima e depois elevando o resultado ao quadrado ficamos com a seguinte identidade

$$\cos(\arg(z))^2 = \cos^2\left(\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{|z|^2}.$$

Usando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, na igualdade acima, obtemos

$$1 - \operatorname{sen}(\arg(z))^2 = \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{|z|^2}.$$

Já que $|z|^2 = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)$ segue da igualdade acima que

$$\operatorname{sen}(\arg(z))^2 = 1 - \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}{|z|^2} - \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{|z|^2}. \quad (4.3)$$

Como estamos considerando que $z \in U_1 \cap U_2$, temos que $\operatorname{Re}(z) > 0$ e $\operatorname{Im}(z) > 0$. Pelo Lema 1.6 temos que $0 < \operatorname{Re}(z)/|z| < 1$. Lembrando de como definimos a função arccos, temos $\arccos([0, 1]) = (0, \pi/2]$ e daí segue que

$$\arg(z) = \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) \in (0, \pi/2] \implies \operatorname{sen}(\arg(z)) \geq 0.$$

Destas observações e de (4.3) temos

$$\operatorname{sen}(\arg(z)) = |\operatorname{sen}(\arg(z))| = \sqrt{\operatorname{sen}(\arg(z))^2} = \sqrt{\frac{\operatorname{Im}(z)^2}{|z|^2}} = \frac{|\operatorname{Im}(z)|}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

Tomando agora arcsen em ambos lados na igualdade acima, ficamos com

$$\arg(z) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right)$$

Desta igualdade e de (4.2) concluímos finalmente a prova do item i).

A continuidade da função $\arg : \mathbb{C}^* \setminus L_\pi \rightarrow \mathbb{R}$ é simples de ser demonstrada. De fato, para qualquer $z_0 \in U_1$ temos pela definição de U_1 que $\operatorname{Im}(z_0) > 0$ e conseqüentemente $-1 < \operatorname{Re}(z_0)/|z_0| < 1$. Já que arccos é contínua no ponto $\operatorname{Re}(z_0)/|z_0|$ segue que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) = \arccos\left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z_0)}{|z_0|}\right) = \arg(z_0). \end{aligned}$$

A continuidade nos pontos de U_2 e U_3 são provadas de maneira análoga.

Para concluir a prova deste teorema resta apenas mostrar a validade de (4.1). Primeiro vamos mostrar que (4.1) é válida para todo $z \in U_1 \cap U_2$. De fato, neste caso podemos usar a identidade do item i) da primeira parte desta prova para verificar que

$$\begin{aligned} \exp(i \arg(z)) &= \cos(\arg(z)) + i \operatorname{sen}(\arg(z)) \\ &= \cos\left(\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)\right) \\ &= \cos\left(\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right)\right) \\ &= \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} + i \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{z}{|z|}. \end{aligned}$$

Analogamente provamos a validade de (4.1) para os demais pontos de $\mathbb{C}^* \setminus L_\pi$. Com esta observação finalmente encerramos a prova do teorema. ■

Na prática, não usamos as fórmulas dada pelo teorema anterior. Pois o valor do ramo principal do argumento de um número complexo z em $\mathbb{C}^* \setminus L_\pi$ é simplesmente

o único ângulo entre $-\pi$ e π formado vetor determinado por z e pelo eixo real. A fórmula obtida no teorema é importante para dar uma descrição analítica precisa deste ângulo e também mais adequada, do que esta descrição heurística, para ser usada na prova de outros resultados.

Antes de prosseguir vamos apresentar algumas propriedades de ramos do argumento genéricos. O primeiro destes resultados caracteriza todos os possíveis ramos do argumento definidos num mesmo domínio.

Proposição 4.4. *Seja $U \subset \mathbb{C}^*$ um domínio. Se $\arg_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $\arg_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ são ramos do argumento em U , então existe uma constante $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\arg_1(z) = \arg_2(z) + 2k\pi$, para todo $z \in U$.*

Demonstração. Já que $\arg_1(z)$ e $\arg_2(z)$ são ramos do argumento em U temos que

$$\exp(i \arg_1(z)) = \frac{z}{|z|} = \exp(i \arg_2(z)).$$

Portanto $\cos(\arg_1(z)) = \cos(\arg_2(z))$ e $\sin(\arg_1(z)) = \sin(\arg_2(z))$. Segue das propriedades básicas das funções trigonométricas que existe um inteiro $k(z)$ tal que $\arg_1(z) = \arg_2(z) + 2k(z)\pi$. Desta forma a aplicação

$$z \mapsto k(z) \equiv \frac{1}{2\pi}(\arg_1(z) - \arg_2(z))$$

define uma função contínua. Já que U é conexo e $k(z) \in \mathbb{Z}$, segue da continuidade da função $z \mapsto k(z)$ que ela é identicamente constante, isto é, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k(z) \equiv k$ para todo $z \in U$. ■

Devemos observar que, em geral, é mais difícil estabelecer relações entre distintos ramos do argumento definidos em domínios distintos. Assim, se $\arg_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $\arg_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ são ramos do argumento com $U \neq V$, não temos relações muito claras entre estes ramos. Não é possível em alguns casos dizer nem o que acontece em $U \cap V$ já que este conjunto poderia ser vazio ou ter uma infinidade de componentes conexas.

Além do ramo principal do argumento, vamos dar destaque nestas notas a outros ramos definidos em domínios maximais de \mathbb{C}^* . Para definir estes outros ramos primeiro fixamos um ângulo $\phi \in \mathbb{R}$. Em seguida, consideramos o segmento de reta $L_\phi \equiv \{t(\cos \phi + i \sin \phi) \in \mathbb{C} : t > 0\}$ e o aberto conexo $\mathbb{C}^* \setminus L_\phi$. Definimos o ramo do argumento $\arg_\phi : \mathbb{C}^* \setminus L_\phi \rightarrow \mathbb{R}$ por $\arg_\phi(z) = \theta(z)$, onde $\theta(z)$ é o único ângulo satisfazendo

$$\frac{z}{|z|} = \exp(i\theta(z)) \quad \text{e} \quad -2\pi + \phi < \theta(z) < \phi.$$

Infelizmente esta definição é bastante inadequada para provarmos que a função $z \mapsto \arg_\phi(z)$ é contínua, como fizemos para o ramo principal. Por outro lado, ela torna a discussão mais geométrica e intuitiva e com um pouco de esforço o leitor interessado pode adaptar a expressão do ramo principal do argumento, e obter uma descrição explícita para $\arg_\phi(z)$ em termos da variável complexa z ; e eventualmente verificar que a mesma está bem definida e é contínua em $\mathbb{C}^* \setminus L_\phi$.

Definição 4.5 (Ramo do Logaritmo). *Seja $U \subset \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$ um conjunto aberto conexo e $\widetilde{\text{arg}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ um ramo do argumento definido em U . Então a função $f : U \subset \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$f(z) = \ln |z| + i \widetilde{\text{arg}}(z), \quad \forall z \in U, \quad (4.4)$$

é chamada de um ramo do logaritmo em U . No caso especial em que $U = \mathbb{C}^ \setminus L_\phi$ e a função $\widetilde{\text{arg}}$ é tomada como sendo a função arg_ϕ , definida acima, então este ramo do logaritmo será denotado por \log_ϕ .*

Definição 4.6 (Ramo Principal do Logaritmo). *O ramo principal do logaritmo é definido como sendo a função $\log : \mathbb{C}^* \setminus L_\pi \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\log(z) = \ln |z| + i \text{arg}(z),$$

onde $\text{arg} : \mathbb{C}^ \setminus L_\pi \rightarrow \mathbb{R}$ é o ramo principal do argumento como definido no enunciado do Teorema 4.3.*

Observamos que a o ramo principal do logaritmo coincide com a função \log_π , apresentada na definição anterior. Isto é, para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus L_\pi$ temos $\log(z) = \log_\pi(z)$.

Proposição 4.7. *A função $\log_\phi : \mathbb{C}^* \setminus L_\phi \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : -2\pi + \phi < \text{Im}(z) < \phi\}$ define uma aplicação bijetiva cuja inversa é a função exponencial restrita à faixa $\{z \in \mathbb{C} : -2\pi + \phi < \text{Im}(z) < \phi\}$. Isto é,*

$$\exp(\log_\phi(z)) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus L_\phi$$

e

$$\log_\phi(\exp(z)) = z, \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C} : -2\pi + \phi < \text{Im}(z) < \phi\}.$$

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que \log_ϕ é uma inversa à direita, em $\mathbb{C}^* \setminus L_\phi$, da função exponencial. Isto é, $\exp(\log_\phi(z)) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus L_\phi$. De fato, para qualquer que seja $z \in \mathbb{C}^* \setminus L_\phi$ temos

$$\exp(\log_\phi(z)) = \exp(\ln |z| + i \text{arg}_\phi(z)) = e^{\ln |z|} \cdot \exp(i \text{arg}_\phi(z)) = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z.$$

Por outro lado, para cada $z \in \{z \in \mathbb{C} : -2\pi + \phi < \text{Im}(z) < \phi\}$ temos

$$\begin{aligned} \log_\phi(\exp(z)) &= \ln |\exp(z)| + i \text{arg}_\phi(\exp(z)) \\ &= \ln(\exp(\text{Re}(z))) + i \text{arg}_\phi\left(\exp(\text{Re}(z)) \exp(i \text{Im}(z))\right) \\ &= \text{Re}(z) + i \text{arg}_\phi(\exp(i \text{Im}(z))) \\ &= \text{Re}(z) + i \text{Im}(z) = z. \end{aligned}$$

■

Lema 4.8 (Diferenciabilidade dos ramos do logaritmo). *Para qualquer $\phi \in \mathbb{R}$ fixado a função $\log_\phi : \mathbb{C}^* \setminus L_\phi \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : -2\pi + \phi < \text{Im}(z) < \phi\}$ define uma função holomorfa em $\mathbb{C}^* \setminus L_\phi$ e além do mais, sua derivada é dada por*

$$\frac{d}{dz} \log_\phi(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus L_\phi.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.7 sabemos que para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}^* \setminus L_\phi$ temos

$$\frac{\log_\phi(z) - \log_\phi(w)}{z - w} = \frac{\log_\phi(z) - \log_\phi(w)}{\exp(\log_\phi(z)) - \exp(\log_\phi(w))}. \quad (4.5)$$

Para mostrar que \log_ϕ tem derivada complexa no ponto z basta mostrar que a expressão acima tem limite quando $w \rightarrow z$. Para ver que este limite existe, vamos considerar a seguinte mudança de variáveis: $s = \log_\phi(z)$ e $t = \log_\phi(w)$. Já que \log_ϕ é uma função contínua em $\mathbb{C}^* \setminus L_\phi$ temos que se $w \rightarrow z$, então $t \rightarrow s$. Portanto segue da diferenciabilidade da função exponencial complexa e da Proposição 4.7 que o seguinte limite existe

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \log_\phi(z) &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{\log_\phi(z) - \log_\phi(w)}{z - w} \\ &= \lim_{w \rightarrow z} \frac{\log_\phi(z) - \log_\phi(w)}{\exp(\log_\phi(z)) - \exp(\log_\phi(w))} \\ &= \lim_{t \rightarrow s} \frac{s - t}{\exp(s) - \exp(t)} \\ &= \frac{1}{\exp(s)} = \frac{1}{\exp(\log_\phi(z))} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

■

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ é possível estabelecer uma relação simples entre $\arg_\alpha(z)$ e $\arg_\beta(z)$, para qualquer $z \in (\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$.

Como ilustrado na figura abaixo, podemos ter para alguns pontos do plano complexo $w \in (\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$ a igualdade $\arg_\alpha(w) = \arg_\beta(w)$. Basta que estes valores do argumento estejam na interseção dos intervalos abertos $(-2\pi + \alpha, \alpha)$ e $(-2\pi + \beta, \beta)$ temos que

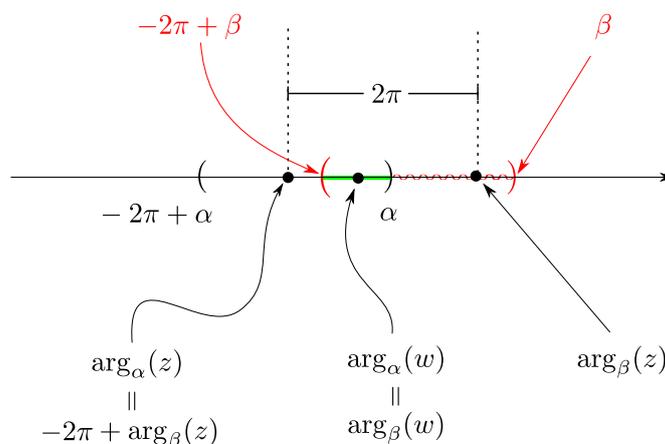


Figura 4.1.1: Relação entre valores de ramos distintos do argumento. A região hachurada em verde é onde temos $\arg_\alpha(w) = \arg_\beta(w)$. Nos demais pontos deste intervalos os valores deste ramos do argumento diferem de exatamente 2π .

Se temos $\alpha < \beta$ como na Figura 4.1.1 ($|\beta - \alpha| < 2\pi$) e z é um ponto em $(\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$ tal que $\arg_\beta(z) > \alpha$, então $\arg_\alpha(z) = \arg_\beta(z) - 2\pi$.

Na verdade, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, podemos mostrar que sempre existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $z \in (\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$ temos

$$\arg_\alpha(z) = \arg_\beta(z) + 2k\pi \quad (4.6)$$

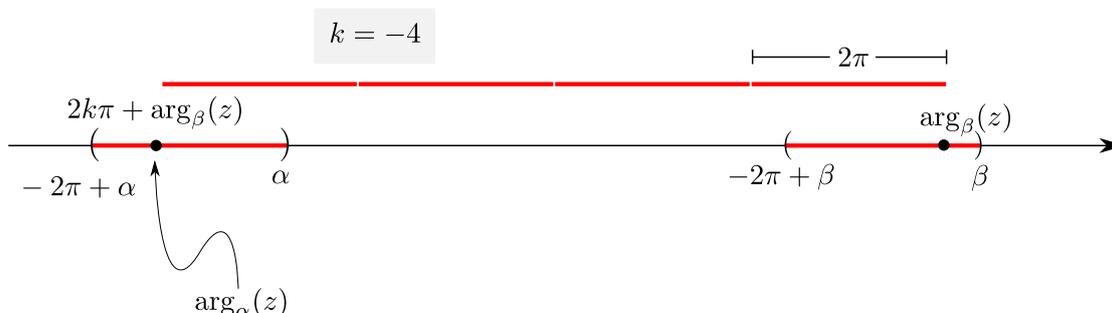


Figura 4.1.2: Neste exemplo podemos ver como calcular o valor da constante que aparece na equação 4.6. Aqui temos $\arg_\alpha(z) = \arg_\beta(z) + 2k\pi$, onde $k = -4$.

Dado $x \in \mathbb{R}$ vamos denotar o menor inteiro maior que x por $\lceil x \rceil$. Às vezes, nos referimos a $\lceil x \rceil$ como o “teto de x ”. O teto de x também pode ser caracterizado por $\lceil x \rceil = \sup\{k \in \mathbb{Z} : x \leq k\}$. Analogamente, definimos o “piso de x ” como sendo o maior inteiro menor que x , notação $\lfloor x \rfloor$. Alternativamente, podemos caracterizar o piso de x pela expressão $\lfloor x \rfloor = \inf\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Proposição 4.9. *Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $z \in (\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$ temos que*

$$\arg_\alpha(z) = \arg_\beta(z) + 2k\pi, \quad \text{onde } k = \left\lceil \frac{\alpha - \arg_\beta(z)}{2\pi} \right\rceil = \left\lceil \frac{\arg_\alpha(z) - \beta}{2\pi} \right\rceil.$$

Demonstração. Já que $z \in (\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$ segue da definição de ramo do argumento que

$$\begin{aligned} \cos(\arg_\alpha(z)) + i \operatorname{sen}(\arg_\alpha(z)) &= \exp(i \arg_\alpha(z)) \\ &= \frac{z}{|z|} \\ &= \exp(i \arg_\beta(z)) = \cos(\arg_\beta(z)) + i \operatorname{sen}(\arg_\beta(z)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} \cos(\arg_\alpha(z)) = \cos(\arg_\beta(z)); \\ \operatorname{sen}(\arg_\alpha(z)) = \operatorname{sen}(\arg_\beta(z)). \end{cases}$$

Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\arg_\alpha(z) = \arg_\beta(z) + 2k\pi$. Desta forma temos que

$$\begin{aligned} k &= \frac{\arg_\alpha(z) - \arg_\beta(z)}{2\pi} \\ &= \frac{\arg_\alpha(z) - \alpha + \alpha - \arg_\beta(z)}{2\pi} \\ &= \frac{\arg_\alpha(z) - \alpha}{2\pi} + \frac{\alpha - \arg_\beta(z)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Lembrando que $-2\pi + \alpha < \arg_\alpha(z) < \alpha$, podemos concluir que

$$-1 < \frac{\arg_\alpha(z) - \alpha}{2\pi} < 0.$$

Deste fato e da igualdade anterior, segue que

$$k < \frac{\alpha - \arg_\beta(z)}{2\pi} < k + 1 \implies \left\lfloor \frac{\alpha - \arg_\beta(z)}{2\pi} \right\rfloor = k.$$

Analogamente, temos

$$k = \frac{\arg_\alpha(z) - \beta}{2\pi} + \frac{\beta - \arg_\beta(z)}{2\pi}.$$

Como $-2\pi + \beta < \arg_\beta(z) < \beta$ segue que

$$0 < \frac{\beta - \arg_\beta(z)}{2\pi} < 1.$$

Portanto

$$k - 1 < \frac{\arg_\alpha(z) - \beta}{2\pi} < k \implies k = \left\lceil \frac{\arg_\alpha(z) - \beta}{2\pi} \right\rceil.$$

■

Observação 4.10. A Proposição 4.9 pode ser vista como uma generalização da Proposição 4.4 já que nesta última os ramos argumento não precisam estar definidos em domínios idênticos.

Corolário 4.11. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $z \in (\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$ temos que

$$\log_\alpha(z) = \log_\beta(z) + i2k\pi, \quad \text{onde } k = \left\lfloor \frac{\alpha - \arg_\beta(z)}{2\pi} \right\rfloor = \left\lceil \frac{\arg_\alpha(z) - \beta}{2\pi} \right\rceil.$$

Demonstração. A prova é uma aplicação direta da definição dos ramos do logaritmo e da Proposição 4.9. De fato, para qualquer $z \in (\mathbb{C}^* \setminus L_\alpha) \cap (\mathbb{C}^* \setminus L_\beta)$ temos

$$\begin{aligned} \log_\alpha(z) &= \ln |z| + i \arg_\alpha(z) \\ &= \ln |z| + i(\arg_\beta(z) + 2k\pi) \\ &= [\ln |z| + i \arg_\beta(z)] + i2k\pi \\ &= \log_\beta(z) + i2k\pi. \end{aligned}$$

■

4.2 Potências Arbitrárias

Já que definimos a exponencial complexa e os ramos do logaritmo, podemos agora introduzir o conceito de potências arbitrárias.

Definição 4.12. *Fixe $w \in \mathbb{C}$ e $\phi \in \mathbb{R}$. Dado $z \in \mathbb{C} \setminus L_\phi$ definimos z^w (ou $z^{w|\phi}$ quando for necessário especificar o valor de ϕ) como sendo o número complexo $f_{w,\phi}(z)$, onde $f_{w,\phi} : \mathbb{C} \setminus L_\phi \rightarrow \mathbb{C}$ é a função dada por $f_{w,\phi}(z) = \exp(w \log_\phi(z))$.*

Para $w \in \mathbb{C}$ fixado e $\phi \in \mathbb{R}$ escolhido, temos que a aplicação $(\mathbb{C} \setminus L_\phi) \ni z \mapsto z^w = \exp(w \log_\phi(z))$ define uma aplicação holomorfa em $\mathbb{C} \setminus L_\phi$. O ramo principal da função $z \mapsto z^w$ é obtido quando escolhemos $\phi = \pi$ e conseqüentemente \log_ϕ como o ramo principal do logaritmo.

Pela regra da cadeia (Teorema 3.12), Proposição 4.7 e equação 3.11 temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^w &= \frac{d}{dz} \exp(w \log_\phi(z)) = \exp(w \log_\phi(z)) \frac{d}{dz} [w \log_\phi(z)] \\ &= \exp(w \log_\phi(z)) \frac{w}{z} \\ &= \exp(w \log_\phi(z)) \frac{w}{\exp(\log_\phi(z))} \\ &= w \frac{\exp(w \log_\phi(z))}{\exp(\log_\phi(z))} \\ &= w \exp((w-1) \log_\phi(z)). \\ &= w z^{w-1}. \end{aligned}$$

O que mostra que, independentemente da escolha do ramo do logaritmo temos sempre

$$\frac{d}{dz} z^w = w z^{w-1}.$$

Outra observação importante é que a função introduzida na Definição 4.12 generaliza, em um certo sentido, a noção usual de potência já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C} \setminus L_\pi$ temos:

$$z^n = \exp(n \log(z)) = \underbrace{\exp(\log(z)) \cdot \dots \cdot \exp(\log(z))}_{n\text{-vezes}} = z \cdot \dots \cdot z.$$

Outra observação importante é que estas funções nos permitem construir raízes n -ésimas de um número complexo w . Para isto basta observar que escolhido o ramo principal do logaritmo e $w \in \mathbb{C} \setminus L_\pi$ temos que $w^{\frac{1}{n}}$ é uma solução da equação $z^n = w$. De fato,

$$w^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \log(w)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} (\ln |w| + i \arg(w))\right) = |w|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\arg(w)}{n}\right).$$

Na verdade, podemos construir todas as raízes n -ésimas de w considerando todos os possíveis ramos de $w^{\frac{1}{n}}$. Para simplificar a discussão vamos introduzir a seguinte notação para os ramos da raiz n -ésima. Dado $\phi \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{C} \setminus L_\phi$ vamos denotar $\exp((1/n) \log_\phi(w))$ por $\sqrt[n]{w}^\phi$.

Proposição 4.13. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $w \in \mathbb{C}$ fixados temos*

$$\{\sqrt[n]{w}^\phi \in \mathbb{C} : \phi \in \mathbb{R} \text{ e } w \in \mathbb{C} \setminus L_\phi\} = \{z \in \mathbb{C} : z^n = w\}.$$

Em seguida, mostramos as principais ideias envolvidas na prova da proposição acima para o caso especial em que $n = 2$ e $w = -1$.

Exemplo 4.14. *Vamos mostrar que*

$$\{\sqrt{-1}^\phi \in \mathbb{C} : \phi \in \mathbb{R} \text{ e } (-1) \in \mathbb{C} \setminus L_\phi\} = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = -1\} = \{-i, i\}.$$

Inicialmente escolhemos um ramo qualquer do argumento onde temos mais facilidade para determinar o valor de $\arg_\phi(-1)$. Por exemplo, vamos tomar $\phi = 0$. Neste caso, $\arg_0(-1) = -\pi$. Para qualquer $\phi \neq (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos que $(-1) \in (\mathbb{C} \setminus L_\phi) \cap (\mathbb{C} \setminus L_0)$. Desta forma podemos aplicando a Proposição 4.9 e assim concluir que para quaisquer tais valores de ϕ temos

$$\arg_\phi(-1) = \arg_0(-1) + 2\pi \left\lfloor \frac{\phi - \arg_0(-1)}{2\pi} \right\rfloor = -\pi + 2\pi \left\lfloor \frac{\phi + \pi}{2\pi} \right\rfloor$$

Logo, se $\phi \in \mathbb{R}$ não é um múltiplo ímpar de π então temos

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}^\phi &= \exp\left(\frac{1}{2} \ln |-1| + i \frac{\arg_\phi(-1)}{2}\right) \\ &= \exp\left(i \frac{\arg_\phi(-1)}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} + \pi \left\lfloor \frac{\phi + \pi}{2\pi} \right\rfloor\right)\right). \end{aligned}$$

Fazendo ϕ variar em $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ podemos observar que a expressão acima assume os seguintes valores

$$\left\{ \exp\left(i\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) : k \in \mathbb{Z} \right\} = \{e^{-i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{\pi}{2}}\} = \{-i, i\}.$$

Observamos que para qualquer que seja $w \in \mathbb{C} \setminus L_\phi$ sempre temos

$$\begin{aligned} \sqrt{w}^\phi \sqrt{w}^\phi &= \left[\exp\left(\frac{1}{2} \ln |w| + i \frac{1}{2} \arg_\phi(w)\right) \right]^2 \\ &= \exp\left(\ln |w| + i \arg_\phi(w)\right) \\ &= \exp(\log_\phi(w)) \\ &= w. \end{aligned}$$

Mas, em geral, podemos ter

$$\sqrt{zw}^\phi \neq \sqrt{z}^\phi \sqrt{w}^\phi \quad \text{e também} \quad \sqrt{z^2}^\phi \neq \sqrt{z}^\phi \sqrt{z}^\phi.$$

mesmo que z, w, zw e z^2 sejam pontos de $\mathbb{C} \setminus L_\phi$.

Lista 4

1. Represente no plano cartesiano o número complexo $\exp\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.
2. Encontre o domínio onde a seguinte função está bem definida:

$$\exp\left(\frac{1}{z^n + 1}\right).$$

3. Calcular a derivada da função do exercício anterior.
4. Mostre que a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}},$$

não tem limite quando $z \rightarrow 0$.

5. Nos itens abaixo determine quais limites existem e neste caso seu valor

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z}$;

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} |z|}{z}$;

c) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\bar{z} - 1}{z - 1}$;

d) $\lim_{z \rightarrow -1} \log(z)$, onde $\log(z)$ denota o ramo principal do logaritmo.

6. É verdade que $|\operatorname{sen} z| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$? Por quê?
7. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $f(z) \in \mathbb{C}^* \setminus L_\pi$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para cada $z \in \mathbb{C}$ fixado, mostre que

$$\sqrt{-f(z)} = \begin{cases} -i\sqrt{f(z)}, & \text{se } \operatorname{Im}(f(z)) > 0; \\ i\sqrt{f(z)}, & \text{se } \operatorname{Im}(f(z)) < 0, \end{cases}$$

onde a aplicação $(\mathbb{C}^* \setminus L_\pi) \ni z \mapsto \sqrt{z} \in \mathbb{C}$ denota o ramo principal da raiz quadrada de z .

8. Determine um aberto não vazio $U \subset \mathbb{C}$ tal que a expressão

$$f(z) = \frac{1}{i} \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

onde \log denota o ramo principal do logaritmo, esteja bem definida em U . Em seguida, mostre que $\cos(f(z)) = z$ para todo $z \in U$. Faça o mesmo para a expressão

$$g(z) = \frac{1}{i} \log(z - \sqrt{z^2 - 1}),$$

9. Suponha que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ seja uma função holomorfa tal que $\operatorname{sen}(f(z)) = z$, para todo $z \in U$. Usando a regra da cadeia prove que $(f'(z))^2 = 1/(1 - z^2)$. Mostre também que $\pi/2 \notin f(U)$.
10. Mostre que para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{C}$ a equação $az^2 + bz + c = 0$ admite duas soluções (contadas com multiplicidade) se $a \neq 0$.
11. Considerando todos os ramos possíveis do logaritmo mostre que existem apenas 5 valores possíveis para $3^{\frac{1}{5}}$.
12. Considerando todos os ramos possíveis do logaritmo mostre que existem infinitos valores possíveis para $3^{\sqrt{2}}$.
13. Encontre um ramo para a função $f(z) = \sqrt{1+z}$, em seguida para $g(z) = \sqrt{1-z}$ e por último um ramos para $h(z) = \sqrt{1-z^2}$. É verdade que $h(z) = f(z)g(z)$, em qualquer ponto onde todas estas funções estão definidas ?
14. Encontre um ramo para $\log(\log(z))$.
15. Calcule o módulo de $z^{\frac{1}{2}}$ e mostre que se $|z| \leq 1$ então $|z^{\frac{1}{2}}| \leq 1$.
16. Encontre todas as soluções do problema $\sqrt{z+1} = 5$, onde $\sqrt{\cdot}$ é um ramo arbitrário da raiz quadrada.
17. É verdade que para quaisquer números complexos $a, b \in \mathbb{C}$ temos $|a^b| = |a|^{|b|}$?
18. Considere o polinômio $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$. Mostre que se $|z|$ é suficientemente grande então $|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2}|z|^n$.
19. Quais das seguintes desigualdades são verdadeiras para quaisquer números complexos:
- $$|e^z| \leq |z|, \quad |z| \leq |e^z|, \quad e^{|z|} \leq |z|, \quad |e^z| \leq e^{|z|} \quad ?$$
20. Calcule $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z}$.
21. Prove a Proposição 4.13. Dica: re-leia o argumento do Exemplo 4.14 e use a fórmula para as raízes de um número complexo w dada em 1.7.

Semana 5

“Very few mathematical papers have exercised an influence on the latter development of mathematics which is comparable to the stimulus received from Riemann’s dissertation. It contains the germ to a major part of the modern theory of analytic functions, it initiated the systematic study of topology, it revolutionized algebraic geometry, and paved the way for Riemann’s own approach to differential geometry.”

—Lars Ahlfors, 1953.

5.1 Séries Numéricas

Nesta seção serão apresentadas a definição e as propriedades básicas de uma série de potências em \mathbb{C} . As séries de potências serão então usadas para dar novos exemplos de funções holomorfas. Mas antes de fazer isto será necessário discutir em detalhes alguns fatos elementares sobre séries infinitas de números complexos, cuja as afirmações análogas na reta devam ser familiar para a maioria dos leitores.

Dada uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ de números complexos podemos associar a ela uma nova sequência de números complexos $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, chamada sequência das *somas parciais* de $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ que é definida recursivamente da seguinte maneira:

- para $n = 0$ definimos $s_0 = z_0$;
- para todo $n \geq 1$ definimos $s_n = z_n + s_{n-1}$.

É claro que para todo $n \geq 0$ podemos pensar em s_n simplesmente como sendo a soma dos $n + 1$ primeiros elementos da sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, isto é,

$$s_n = \sum_{j=0}^n z_j = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n.$$

Definição 5.1 (Série de Números Complexos). *Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos. A série numérica associada a esta sequência é a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ de suas somas parciais. Se a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge para um número $s \in \mathbb{C}$, dizemos que a série converge e que sua soma é o número complexo s . Se $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ não converge, dizemos que a série é divergente. Usamos a notação $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ para denotar a série associada à sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$.*

Note que, associada à uma série de números complexos, temos sempre duas séries de números reais, que correspondem à suas partes real e imaginária. Se para cada $n \geq 0$, temos $z_n = x_n + iy_n$, então podemos denotar a série associada a $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ da seguinte forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n).$$

Obviamente temos

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^n z_j \right) = \sum_{j=0}^n x_j \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^n z_j \right) = \sum_{j=0}^n y_j$$

Portanto, segue do Lema 2.2 que se $s_n \rightarrow s$, quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^n z_j \right) = \operatorname{Re}(s) \quad \text{e} \quad \sum_{j=0}^{\infty} y_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(\sum_{j=0}^n z_j \right) = \operatorname{Im}(s).$$

Na verdade, o Lema 2.2 implica imediatamente um resultado ainda mais forte do que a afirmação acima, que é o seguinte:

Teorema 5.2. *Seja $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos, onde $z_n = x_n + iy_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge, se e somente se, $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ convergem.*

Este teorema afirma que a convergência de uma série de números complexos pode ser determinada pela convergência das séries de suas partes real e imaginárias. Estas por sua vez, são séries de números reais e para elas podemos usar os critérios que aprendemos nos cursos de Cálculo para determinar se as mesmas convergem ou divergem.

Antes de prosseguir vamos recordar alguns critérios importantes importantes no estudo de séries de números reais. O primeiro deste resultados que vamos revisar se refere ao caso particular e muito importante em que os termos da série são formados por números reais não-negativos. Apesar deste critério ser aparentemente muito particular, veremos que ele é muito poderoso para o estudo de séries de números complexos.

Teorema 5.3 (Teste de Comparação). *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ séries de números reais não-negativos satisfazendo para todo $n \geq 0$, as seguintes desigualdades $0 \leq a_n \leq b_n$. Então podemos afirmar que*

- i) se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;*
- ii) se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.*

Demonstração. Para mostrar que a validade do item *i)* basta mostrar que a sequência das somas parciais da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é uma sequência de Cauchy.

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sejam

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \text{e} \quad \tilde{s}_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n.$$

Já que estamos assumindo que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, então podemos afirmar que $(\tilde{s}_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ forma uma sequência de Cauchy. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N_0$ então

$$|\tilde{s}_m - \tilde{s}_n| < \varepsilon.$$

Suponha que $n \leq m$. Neste caso, a desigualdade acima implica que para todo $m \geq n \geq N_0$ temos

$$\begin{aligned} |(b_0 + b_1 + \dots + b_n + b_{n+1} + \dots + b_m) - (b_0 + b_1 + \dots + b_n)| &< \varepsilon \\ \Downarrow \\ |b_{n+1} + \dots + b_m| &< \varepsilon \\ \Downarrow \\ b_{n+1} + \dots + b_m &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Já que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ temos da desigualdade acima, para todos $m \geq n \geq N_0$, as seguintes desigualdades

$$|s_m - s_n| = |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| = a_n + a_{n+1} + \dots + a_m \leq b_{n+1} + \dots + b_m < \varepsilon.$$

Mostrando que $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é uma sequência de Cauchy e portanto que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

Vamos mostrar agora a validade do item *ii*). Já que estamos assumindo que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ então temos que a sequência das somas parciais de ambas sequências são monótonas não-decrescentes, isto é,

$$s_n \leq a_n + s_n = s_{n+1}.$$

Já que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge temos da desigualdade acima que não pode existir $M \geq 0$ tal que

$$|s_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Caso contrário, o número real $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \leq M$ seria o limite da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n \leq M.$$

Desta forma temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty.$$

Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ temos que $s_n \leq \tilde{s}_n$ e portanto

$$+\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n \leq +\infty.$$

■

Outro critério de convergência de séries de números não negativos é dada pelo chamado Teste da Integral, também conhecido como teste de Maclaurin-Cauchy. Há várias versões deste teste. Algumas das mais gerais envolvem a Teoria da Medida e Integração, que não serão discutidos neste texto. A versão que vamos

apresentar nestas notas é baseada em comparações com integrais impróprias de Riemann que são introduzidas mesmo nos cursos mais elementares de Cálculo Diferencial e Integral em uma variável real.

Vamos recordar como são definidas certas integrais impróprias no sentido de Riemann. Sejam $a \in \mathbb{R}$ um número fixado (em várias das aplicações a será um número inteiro não-negativo) e $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua (ou Riemann integrável em todos os intervalo fechados da forma $[a, b]$ com $b \in \mathbb{R}$ e $a < b$). Se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = L.$$

Então dizemos que existe a integral imprópria de f e usamos a seguinte notação para denotar o limite L :

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Se a função f satisfaz as hipóteses mencionadas acima e adicionalmente que ela é não negativa, isto é, $0 \leq f(x)$ para todo $x \in [a, +\infty)$. Então temos para qualquer par de pontos $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ com $b_1 < b_2$ que

$$\int_a^{b_1} f(x) dx \leq \int_a^{b_2} f(x) dx.$$

Sob as condições acima, podemos afirmar que a integral imprópria sempre está bem definida, entretanto como um elemento do conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, isto é,

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \in [0, +\infty].$$

Ainda, sob a hipótese de f ser não-negativa, dizemos que a integral imprópria é convergente se

$$\int_a^\infty f(x) dx < +\infty;$$

e dizemos que a integral imprópria de f é divergente se

$$\int_a^\infty f(x) dx = +\infty.$$

Teorema 5.4 (Teste da Integral). *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de números reais não-negativos monótona não-crescente, a partir de um certo índice $N \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \geq N$. Suponha que existe uma função real $f : [N-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrável em qualquer intervalo fechado da forma $[N-1, b]$, com $N-1 < b$, monótona não-crescente ($f(y) \leq f(x)$ se $x \leq y$) tal que $f(n) = a_n$, para todo $n \geq N$. Então*

$$\int_N^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=N}^\infty a_n \leq \int_{N-1}^\infty f(x) dx$$

e portanto

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \text{ converge} \iff \int_N^\infty f(x) dx \text{ converge.}$$

Demonstração. Para mostrar a validade do teorema é suficiente mostrar que para qualquer inteiro $M > N$ temos

$$\int_N^{M+1} f(x) dx \leq \sum_{n=N}^M a_n \leq \int_{N-1}^M f(x) dx. \quad (5.1)$$

Em seguida, basta tomar o limite quando $M \rightarrow \infty$ nas três expressões que aparecem em (5.1). Para obter as desigualdades em (5.1) precisamos usar as hipóteses:

- $f(n) = a_n$, se $n \geq N - 1$;
- $f(y) \leq f(x)$, se $x \leq y$ (monotonicidade de f).

A primeira desigualdade é obtida por uma comparação análoga a apresentada na Figura 5.1.1

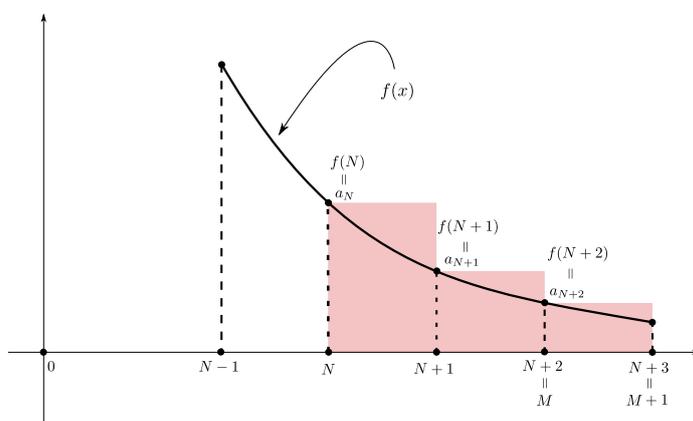


Figura 5.1.1: A área hachurada corresponde a soma $\sum_{n=N}^M a_n$. Observe que o valor desta soma é maior que a integral $\int_N^{M+1} f(x) dx$.

Para obter a segunda desigualdade raciocinamos de maneira análoga (bastando apenas deslocar os retângulos que aparecem na figura acima para esquerda) como mostra a Figura 5.1.2

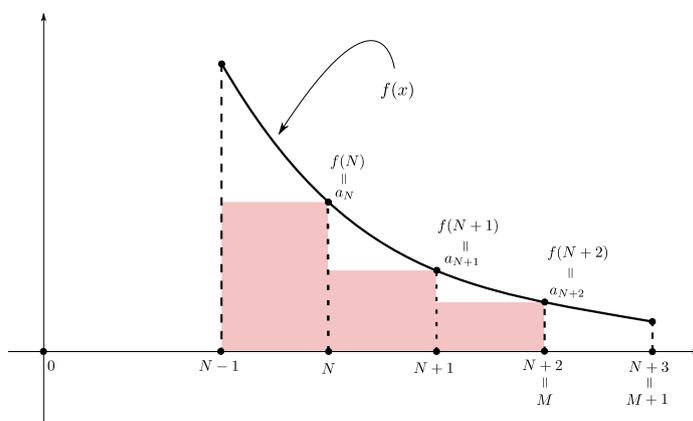


Figura 5.1.2: A área hachurada corresponde novamente a soma $\sum_{n=N}^M a_n$. Ela é obtida simplesmente deslocando os retângulos da figura anterior para a esquerda. Observe que agora o valor desta soma é menor que a integral $\int_{N-1}^M f(x) dx$.

■

Corolário 5.5. Fixado $p \in [0, +\infty)$, então temos que a p -série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge se $p > 1$ e diverge se $0 \leq p \leq 1$.

Demonstração. A prova deste corolário seguirá de uma aplicação do Teste da Integral (Teorema 5.4). Para isto vamos ter que apresentar a função f , a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e mostrar que todas as hipóteses do Teorema 5.4 são satisfeitas.

Para isto, podemos tomar $N = 2$, consideramos a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ dada por $a_0 = 1$ e $a_n = n^{-p}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A função $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é escolhida como sendo a função definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

É imediato verificar que f é monótona não-crescente (note que $f'(x) < 0$, $\forall x \in (1, \infty)$) e que $f(n) = n^{-p}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além do mais para todo $M > 1$ temos que f é integrável em $[1, M]$ e esta integral pode ser explicitamente calculada usando do Teorema Fundamental do Cálculo como segue.

Para p positivo e $p \neq 1$ temos:

$$\begin{aligned} \int_1^M f(x) dx &= \int_1^M \frac{1}{x^p} dx = \int_1^M x^{-p} dx = \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^M = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^M \\ &= \frac{M^{1-p} - 1}{1-p} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para $p = 1$ temos

$$\int_1^M f(x) dx = \int_1^M \frac{1}{x} dx = \ln(M) - \ln(1) = \ln(M). \quad (5.3)$$

Das igualdades (5.2) e (5.3) temos que

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p}, & \text{se } 0 \leq p < 1; \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \ln(M), & \text{se } p = 1; \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{1-p} - 1}{1-p}, & \text{se } 1 < p < +\infty; \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 \leq p < 1; \\ +\infty, & \text{se } 0 \leq p = 1; \\ \frac{1}{p-1}, & \text{se } 1 < p < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Finalmente, a prova segue das três igualdades acima e do Teste da Integral. ■

A seguir, lembramos outro importante critério, cuja a contra-positiva se constitui em um excelente dispositivo para avaliar se uma série diverge.

Proposição 5.6. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ uma série de números complexos. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então $a_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Já que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então sua sequência de somas parciais forma uma sequência de Cauchy e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_{n+1} - s_n| = 0.$$

■

Uma consequência deste resultado é que se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é uma sequência limitada.

Como veremos na próxima proposição uma forma conveniente de estudar a convergência de uma série de números complexos é via a série associada dos valores absolutos. Como no caso de séries de números reais, esta técnica não se aplica a todos os casos, mas ela é particularmente bastante poderosa, pois permite aplicarmos os testes de comparações para séries de números não-negativos.

Definição 5.7. *Dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge.*

Proposição 5.8. *Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, então ela é convergente.*

Demonstração. A ideia da prova consiste novamente em aplicar o critério de Cauchy. Considere a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ das somas parciais de $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Como estamos assumindo que $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq n \geq n_0$ então

$$\left| |z_n| + |z_{n+1}| + \dots + |z_m| \right| < \varepsilon.$$

Usando a Desigualdade Triangular e a desigualdade acima, temos então para todo $m \geq n \geq n_0$

$$|s_m - s_n| = |z_n + z_{n+1} + \dots + z_m| \leq \left| |z_n| + |z_{n+1}| + \dots + |z_m| \right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é de Cauchy e portanto $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge. ■

Um dos exemplos mais importantes de séries que conhecemos é o das **séries geométricas**. Estas séries são definidas pelos termos de uma progressão geométrica e desempenham papel fundamental, por exemplo, no estudo de séries de potências, como veremos adiante. Estas séries são definidas a partir de uma sequência dada por $a_n = r^n$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onde r é um número real positivo. Neste caso a sequência das somas parciais de $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é dada por

$$s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n.$$

Se $r \neq 1$ sabemos que

$$s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Já que temos uma expressão explícita para s_n é simples analisar a convergência ou divergência de tais séries. Bastando analisar se o limite, quando $n \rightarrow \infty$, do lado direito da igualdade acima existe. E neste caso, se $0 < r < 1$ temos que $r^{n+1} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, e conseqüentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Por outro lado, se $r > 1$ então temos que $r^{n+1} \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^{n+1})}{1 - r} = +\infty.$$

No caso em que $r = 1$, temos que

$$s_n = 1 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1} + 1^n = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

Em resumo, uma série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, de termos positivos converge se, e somente se, sua razão r é estritamente menor do que um.

Já que séries são definidas em termos de sequências de somas parciais. Algumas propriedades de sequências são herdadas pelas séries. Abaixo relacionamos alguns deste fatos simples, mas que serão muito úteis a frente.

Proposição 5.9. *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ duas séries convergentes. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \alpha$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \beta$. Então*

- a série $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ converge para $c\alpha$, qualquer que seja $c \in \mathbb{C}$;
- a série $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$ converge para $\alpha + \beta$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $s_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n$, a n -ésima soma parcial da série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Note que, segue diretamente das propriedades algébricas básicas de números complexos que a n -ésima soma parcial da série $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ satisfaz a seguinte igualdade $cz_1 + cz_2 + \dots + cz_n = cs_n$. Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} cz_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [cz_1 + cz_2 + \dots + cz_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c \sum_{n=0}^{\infty} z_n = c\alpha.$$

O que prova a validade do primeiro item da proposição.

A prova do segundo é no mesmo espírito. Mantendo a notação do item anterior, seja s_n a n -ésima soma parcial da série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Defina \tilde{s}_n como sendo a n -ésima soma parcial da série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$. Então, por definição, a n -ésima soma parcial da série $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$ satisfaz a seguinte igualdade

$$(z_0 + w_0) + (z_1 + w_1) + \dots + (z_n + w_n) = s_n + \tilde{s}_n.$$

Já que a soma de duas sequências convergentes é uma sequência convergente e o limite da soma é a soma dos limites, temos que a n -ésima soma parcial de $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$ converge, quando $n \rightarrow \infty$, e além do mais

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(z_0 + w_0) + (z_1 + w_1) + \dots + (z_n + w_n)]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + \tilde{s}_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \alpha + \beta.
\end{aligned}$$

O que finaliza a prova da proposição. ■

5.2 Sequências de Funções e Convergência

Nesta seção vamos definir a noção de sequência de funções, um conceito que generaliza o conceito de sequências numéricas. Em seguida, vamos discutir alguns dos conceitos de convergência de sequências de funções. O objetivo dos conceitos e dos resultados apresentados nesta seção é fornecer um arcabouço teórico para estudarmos séries de potências no plano complexo.

Diferentemente de sequências de números complexos ou reais, onde temos um único conceito de convergência, quando estamos tratando de sequência de funções, há diversas maneiras (com características bastante distintas, nem sempre sendo possível hierarquizá-las no sentido de apontar qual é a “melhor” delas) de se definir convergência. Nesta seção vamos apresentar discutir sobre três noções de convergência para sequência de funções:

- convergência pontual;
- convergência uniforme;
- convergência uniforme nas partes compactas.

A noção de convergência pontual, como veremos a seguir, é mais simples de ser apresentada e de se trabalhar. Por outro lado, a função limite obtida por convergência pontual pode não herdar propriedades que os elementos da sequência de funções possui. Por exemplo, o limite pontual de uma sequência de funções contínuas pode não ser uma função contínua (Exemplo 5.18). Ou seja, é possível construir uma sequência de funções, onde cada elemento desta sequência é uma função contínua. Porém a função obtida como limite pontual desta sequência, não herda a propriedade de continuidade. Isto alerta para o fato de que, apesar de ser muito importante e poderosa, a convergência pontual pode não ser capaz de fornecer várias informações que eventualmente estaríamos interessados.

Para evitar algumas dificuldades técnicas, oriundas do conceito de convergência pontual, vamos introduzir um outro conceito de convergência de sequência de funções. O conceito de convergência uniforme. Embora, seja mais difícil trabalhar com este conceito, temos a vantagem de que quando conseguimos provar que uma determinada sequência de funções converge uniformemente para alguma função complexa, então seremos capazes de extrair muito mais informações sobre esta função limite! Como já deve estar suspeitando o leitor, em geral, não será simples nem viável provar que uma determinada sequência de funções converge uniformemente para uma função limite. Mas em muitos casos interessantes será possível mostrar que se restringimos a nossa sequência de funções, à subconjuntos compactos do seu domínio, a tarefa de mostrar a convergência uniforme poderá ser

realizada. A grande vantagem desta abordagem é que mesmo sendo este conceito de convergência um pouco mais fraco do que o conceito de convergência uniforme seremos capazes de mostrar que a função limite preserva diversas propriedades das “funções aproximantes”.

O principal exemplo de sequência de funções que o leitor deve ter em mente, quando estiver lendo esta seção, é o da sequência dos polinômios de Taylor de uma série de potências. Vamos estudar em detalhes esta importante classe de exemplos na Seção 5.18.

Em toda esta seção $U \subset \mathbb{C}$ denotará sempre um conjunto aberto, que pode ser limitado ou ilimitado. Não há necessidade também de assumir que U seja conexo. Isto é, os resultados a serem apresentados nesta seção valem para o caso em que U é desconexo.

Definição 5.10 (Sequência de Funções Complexas). *Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é uma sequência de funções complexas, definidas em U , se para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o termo f_n denota uma função definida em U e tomando valores complexos, isto é, $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função.*

Uma observação importante sobre a definição acima é que em uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ todas as funções da sequência estão definidas no mesmo domínio, que aqui convencionamos como sendo um conjunto $U \subset \mathbb{C}$ aberto.

Exemplo 5.11. *Seja $U = \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ o disco unitário. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seja $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f_n(z) = z^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Então $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ define uma sequência de funções complexas em \mathbb{D} .

Sempre que estivermos tratando de sequência de funções é importante deixar claro qual é domínio onde as funções da nossa sequência estão definidas. A rigor, a sequência definida no próximo exemplo é completamente distinta (apesar de sua aparência) daquela do exemplo anterior

Exemplo 5.12. *Seja $U = \mathbb{C}$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seja $g_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$g_n(z) = z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Então $(g_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ define uma sequência de funções complexas em \mathbb{C} .

Apesar da semelhança das leis de f_n e g_n , apresentadas nos dois exemplos anteriores, estas funções devem ser reconhecidas como funções distintas, pois possuem domínios distintos. Obviamente, f_n pode ser vista como a restrição de g_n ao disco unitário. Mas o leitor deve estar atento que a rigor f_n e g_n devem ser tratadas como funções distintas. A importância de se fazer tal distinção ficará ainda mais clara, quando introduzirmos os conceitos de convergência. Por exemplo, veremos, a frente, que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ será convergente (no sentido da convergência pontual - a ser definida), porém a sequência $(g_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ não será pontualmente convergente!

Exemplo 5.13. *Sejam $U = \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ o disco unitário e $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ a sequência de funções definidas no Exemplo 5.11. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ defina a função $S_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ como sendo*

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{j=0}^n f_n(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Então $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ define uma sequência de funções complexas em \mathbb{D} . O leitor pode observar que esta sequência de funções é o análogo, para sequência de funções, do conceito de sequência de somas parciais. Além do mais, para cada $z \in \mathbb{D}$ fixado a sequência numérica $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ representa as somas parciais de uma série geométrica de razão z .

Definição 5.14 (Sequência de Somas Parciais de uma sequência de funções). *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de funções complexas definida em U . Definimos a sequência das somas parciais de $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, como sendo uma nova sequência de funções complexas $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ definidas em U , onde para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a função $S_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por*

$$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z), \quad \forall z \in U.$$

Os exemplos que devem aparecer com mais frequência neste texto relacionados a sequências de funções e suas respectivas sequências de somas parciais são os seguintes:

Exemplo 5.15. *Dada uma sequência numérica $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ arbitrária de números complexos e um aberto $U \subset \mathbb{C}$, defina a seguinte sequência de funções complexas $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por*

$$f_n(z) = a_n z^n, \quad \forall z \in U.$$

Então a sequência das somas parciais de $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, denotada por $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é dada por

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad \forall z \in U.$$

Exemplo 5.16. *Seja $U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ e $\log : \mathbb{C} \setminus L_\pi \rightarrow \mathbb{C}$ o ramo principal do logaritmo. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência de funções complexas, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por*

$$f_n(z) = \exp(-z \log n) = \frac{1}{\exp(z \log n)} = \frac{1}{n^z}.$$

Então $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a sequência das somas parciais de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dada por

$$S_n(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \dots + \frac{1}{n^z} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^z}.$$

Definição 5.17 (Convergência Pontual). *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de funções complexas definidas em U . Dizemos que a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ **converge pontualmente** para uma função complexa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ se para cada $z \in U$ temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z).$$

Do ponto de vista da definição forma de limite a noção de convergência pontual pode ser reformulada da seguinte forma. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de funções complexas definidas em U que converge pontualmente para $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Então podemos afirmar que dado $\varepsilon > 0$ e fixado $z \in U$, existe $n_0 \equiv n_0(z, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Isto quer dizer que, fixado $\varepsilon > 0$ então a imagem de z por f está ε -próxima da imagem de z por f_n , sempre que n for maior ou igual a $n_0(\varepsilon, z)$ que pode depender de ε e eventualmente também de z . Observe que não há nenhum conflito, com a observação acima, em dizer que existe $w \in U$ tal que

$$|f_{n_0(\varepsilon, z)}(w) - f(w)| \geq \varepsilon$$

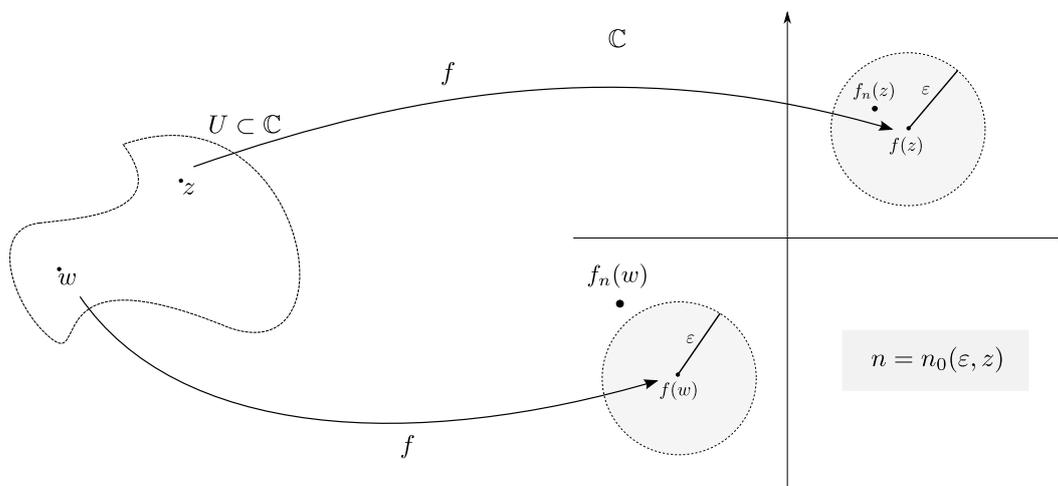


Figura 5.2.1: Na figura acima, temos uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge pontualmente para f . Mas note que pode acontecer da convergência ser mais “lenta” para alguns pontos. Nesta figura vimos que $f_n(z)$ está ε próximo de $f(z)$ mas o mesmo não ocorre para $f_n(w)$. Como sabemos que $f_n(w)$ converge para $f(w)$ o que está acontecendo nesta situação é que é necessário tomar o índice n em $f_n(w)$ muito maior do que $n_0(\varepsilon, z)$.

A desigualdade acima poderia ser válida inclusive para uma quantidade finita de índices consecutivos a $n_0(\varepsilon, z)$, isto é, para $n_0(\varepsilon, z) + k$, com $k \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, poderíamos ter ainda

$$|f_{n_0(\varepsilon, z) + k}(w) - f(w)| \geq \varepsilon, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Mas é claro, como a propriedade que define a convergência pontual exige que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = f(w),$$

e por isto, sabemos que deverá existir algum natural $n_1(\varepsilon, w) > n_0(\varepsilon, z)$ (que poderia talvez ser muito maior que $n_0(\varepsilon, z)$) satisfazendo

$$|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_1(\varepsilon, w).$$

Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ é uma sequência de funções complexas definidas em U que converge pontualmente para $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, então é comum às vezes nos referirmos a f_n como uma aproximante de f .

Vamos analisar se as sequências $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e $(g_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ dos Exemplos 5.11 e 5.12 e verificar se elas convergem pontualmente para alguma função.

Vamos considerar primeiro a sequência de funções do Exemplo 5.11. Neste caso, $U = \mathbb{D}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por $f_n(z) = z^n$. Como qualquer ponto $z \in \mathbb{D}$ pode ser representado em coordenadas polares na forma $z = re^{i\theta}$, onde $0 \leq r < 1$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (re^{i\theta})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n e^{in\theta} = 0.$$

Como $z \in \mathbb{D}$ é arbitrário então temos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge pontualmente para a função identicamente nula em U , isto é, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Por outro lado, podemos ver que a sequência apresentada no Exemplo 5.12 não converge pontualmente para nenhuma função complexa. De fato, basta observar que existe um ponto (na verdade, poderíamos tomar qualquer ponto no conjunto $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \setminus \{1\})$) $z \in \mathbb{C}$ para o qual $g_n(z)$ não converge. Por exemplo, tome $z = 1 + i$. Representando este ponto em coordenadas polares, $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, podemos calcular facilmente $z^n = 2^{n/2}e^{in\pi/4}$. Já que $|z^n| = 2^{n/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, segue que $g_n(z) = z^n$ não converge. Portanto não existe nenhuma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $(g_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge pontualmente para g .

Vamos analisar agora a convergência das somas parciais do Exemplo 5.16. Neste exemplo, a sequência que gera as somas parciais é definida no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ e dada por $f_n(z) = \exp(-z \ln n) = 1/n^z$ e as somas parciais são dadas por

$$S_k(z) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^z}.$$

Vamos mostrar, para cada $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um função complexa $\zeta : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$.

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ temos

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n^z} = |\exp(-z \ln n)| = \exp(-\operatorname{Re}(z) \ln n) = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}}.$$

Pela desigualdade triangular temos a seguinte estimativa

$$|S_k(z)| \leq \sum_{n=1}^k \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}}.$$

Note que no lado direito da igualdade acima, temos a k -ésima soma parcial de uma p -série, onde $p = \operatorname{Re}(z)$. Já que $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ segue do Corolário 5.5 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}}.$$

converge. Então segue da Proposição 5.8 que a série abaixo é convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

para cada $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Logo existe um número complexo que chamaremos de $\zeta(z)$ tal que

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

A análise acima mostra que podemos associar a cada $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ um número complexo $\zeta(z) \in \mathbb{C}$ dado pelo série acima. Desta forma temos uma função complexa $\zeta : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ que é o limite pontual da sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Esta função é chamada de **função zeta de Riemann**. Na verdade, há um pequeno abuso de terminologia, pois a função que de fato é chamada de função zeta de Riemann é uma função complexa definida no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ e a função que temos acima, é na verdade a restrição da verdadeira função zeta de Riemann ao semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Para não ter perigo de confusão, nesta seção o que vamos chamar de função zeta de Riemann é a função que acabamos de definir acima, e seu domínio é precisamente o semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que temos que a função $z \mapsto S_n(z)$ é contínua e mais ainda holomorfa na região $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$; e obtida como limite pontual de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, duas perguntas que surgem naturalmente são:

- a função $\zeta : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua?
- a função $\zeta : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa?

Na verdade, a resposta para as duas perguntas é positiva. Mas como vamos ver a seguir, responder estas perguntas vão requerer uma análise um pouco mais refinada sobre a convergência da sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplo 5.18. Considere a sequência de funções complexas $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a função $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$f_n(z) = \frac{|z|^2}{(1 + |z|^2)^n}.$$

Seja $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ a sequência das somas parciais de $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$.

Vamos mostrar a seguir que $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge pontualmente para a função $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$S(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z = 0; \\ 1 + |z|^2, & \text{se } z \neq 0. \end{cases}$$

Fornecendo Assim um exemplo de uma sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ de funções complexas **contínuas** convergindo para uma função complexa descontínua (note que a função S não é contínua na origem).

Vamos então verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Para isto vamos considerar separadamente os casos $z = 0$ e $z \neq 0$.

No caso $z = 0$, temos para todo $n \geq 0$ que

$$S_n(0) = \sum_{j=0}^n f_j(0) = 0$$

Logo $S_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = S(0)$.

No caso $z \neq 0$,

$$S_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z) = \sum_{j=0}^n \frac{|z|^2}{(1 + |z|^2)^n} = |z|^2 \sum_{j=0}^n \frac{1}{(1 + |z|^2)^n}.$$

Já que para cada $z \neq 0$ fixado, temos $(1 + |z|^2) > 1$, é imediato verificar que $S_n(z)$ é a n -ésima soma parcial de uma série geométrica de razão

$$r = \frac{1}{1 + |z|^2} < 1.$$

Portanto podemos obter explicitamente a expressão do limite de $S_n(z)$, quando $n \rightarrow \infty$, como segue

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) &= |z|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{1}{(1 + |z|^2)^j} = |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} r^n = |z|^2 \frac{1}{1 - r} \\ &= |z|^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + |z|^2}} \\ &= 1 + |z|^2. \\ &= S(z). \end{aligned}$$

Em resumo, o exemplo acima mostra que o limite pontual de uma soma de funções contínuas pode **não** ser uma função contínua. Deixando bem claro que mesmo a questão da continuidade da função zeta Riemann é um fato não-trivial. Além do mais, questões similares a estas são relevantes e naturais também no contexto de séries de potências. Na próxima seção vamos estudá-las detalhadamente.

5.3 Séries de Potências

Nesta seção vamos apresentar a definição e estudar algumas propriedades básicas sobre séries de potências no plano complexo.

Vamos usar séries de potências para dar importantes exemplos de funções analíticas. Ao longo da seção o leitor deve notar que alguns dos resultados apresentados aqui se assemelham a outros resultados familiares que aparecem até mesmo nos cursos introdutórios de Cálculo.

5.3.1 Séries de Potências Centradas na Origem

Definição 5.19 (Séries de Potências). *Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de número complexos e $z \in \mathbb{C}$ um número complexo fixado. Considere a sequência $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. A série numérica associada a esta sequência, isto é,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

é chamada série de potências de centro em 0.

Convidamos o leitor a reler, neste momento, cuidadosamente a definição de séries numéricas (Definição 5.1).

Ela diz que a série gerada pela sequência $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ como objeto matemático é na verdade outra sequência a chamada sequência de somas parciais, que será denotada por $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e dada por

$$\begin{aligned} S_0(z) &= a_0 \\ S_1(z) &= a_0 + a_1 z \\ S_2(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \\ S_3(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \\ &\vdots \\ S_n(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto seguindo a Definição 5.1 dizemos que a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

converge, se a sequência das somas parciais $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge, isto é, existe um número complexo, que sugestivamente será chamado de $f(z)$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z).$$

Olhando apenas para os pontos $z \in \mathbb{C}$ onde $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge, podemos definir uma função. A função que leva z em $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z)$. A função f definida desta maneira tem seu domínio dado precisamente pelo conjunto

$$\text{dom}(f) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{existe } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) \right\}.$$

Apesar de muito simples, esta descrição, do domínio de f , é de pouca utilidade. Por exemplo, se estivermos interessados em estudar continuidade ou diferenciabilidade de f em um ponto z_0 de seu domínio, vamos precisar saber, além de outras coisas, se f também está bem definida em todos os pontos de algum disco com centro em z_0 e raio positivo. Em outras palavras, do ponto de vista mais clássico

de se fazer uma teoria de cálculo, nos interessa mais é saber quem é o interior do domínio de f , que seguindo a notação da seção sobre topologia no plano complexo era denotado por $\text{int}(\text{dom}(f))$.

Observamos que determinar exatamente o domínio da função f , dada acima, pode ser uma tarefa extremamente complicada. Por outro lado, provaremos, a seguir, um resultado incrível (Teorema 5.20) que afirma que este domínio é “moralmente” um disco. Mais precisamente, vamos demonstrar que existe um único $R \in [0, +\infty]$ tal que

$$\text{dom}(f) \subset \overline{D(0, R)} \quad \text{e} \quad \text{int}(\text{dom}(f)) = D(0, R),$$

e além do mais, este número R depende apenas da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e dado explicitamente por

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{se } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0; \\ +\infty, & \text{se } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \end{cases}$$

onde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ \sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, \dots \right\} \right].$$

Se $R = 0$ então a série de potências só converge na origem. Para $R = +\infty$ a série converge para qualquer escolha de $z \in \mathbb{C}$ o que motiva usar a notação $D(0, +\infty) \equiv \mathbb{C}$.

Do que foi enunciado acima, concluímos que o domínio de f é sempre o disco aberto de centro zero e raio R unido eventualmente com mais alguns pontos do bordo deste disco (a circunferência $\partial D(0, R)$). Como no caso de séries de potências de números reais, o número R é chamado de raio de convergência da série de potências e $D(0, R)$ o disco de convergência.

Após feita as provas dos fatos mencionados acima teremos preparado o terreno para olhar para séries de potências como limites de sequências de funções. Antes porém vamos gostaríamos de acrescentar alguns comentários sobre o raio de convergência.

À primeira vista a expressão de R pode parecer assustadora, mas observamos que em vários exemplos práticos, teremos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ou seja, o “limsup” é simplesmente o limite. Na verdade, isto sempre acontece quando o limite existe. Mas é importantíssimo observar que nem toda sequência da forma $\sqrt[n]{|a_n|}$ possui limite em $[0, +\infty]$. Por outro lado, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ está sempre bem definido como um ponto em $[0, +\infty]$. Portanto é sempre lícito escrever

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

independentemente de quem é a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Mas devemos estar atentos ao fato de que nem sempre faz sentido escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Os exemplos a seguir, deixam mais claro este comentário.

Suponha que $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ seja uma sequência dada por

$$a_n = (2 \cos(n\pi) + 1)^n, \text{ então } \sqrt[n]{|a_n|} = \cos(n\pi) + 2 = \begin{cases} 3, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 1, & \text{se } n \text{ é par;} \end{cases}$$

então $\sqrt[n]{|a_n|}$ oscila entre 3 e 1. Assim esta sequência não pode convergir, isto é,

$$\text{não existe } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Por outro lado, como já comentamos, ela necessariamente possui \limsup e ele é dado por

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ \sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, \dots \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ 2 \cos(n\pi) + 1, 2 \cos((n+1)\pi) + 1, \dots \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup\{1, 3\}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3. \end{aligned}$$

Outro exemplo importante é dado pela sequência $a_n = n^n(1 - \cos(n\pi))^n$. Neste caso temos

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n(1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par;} \end{cases}$$

Novamente vemos que a sequência $\sqrt[n]{|a_n|}$ não tem limite pois neste caso, apesar dos termos ímpares ficarem arbitrariamente grandes (dando a impressão de que a sequência poderia convergir para $+\infty$) os termos pares desta sequência são nulos. Logo, entre dois índices consecutivos, os termos desta sequência oscilam entre um número grande $2n$ e zero e portanto **não** converge para $+\infty$, ou seja,

$$\text{não existe } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Por outro lado, podemos calcular facilmente $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Basta observar que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ fixado, que como conjunto (eliminando as vezes que o zero se repete e escrevendo seus elementos em ordem crescente) temos

$$\left\{ \sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, \dots \right\} = \{0, 2, 6, 10, \dots\}$$

e portanto

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ \sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|}, \dots \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{0, 2, 6, 10, \dots\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} +\infty \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Mas como dissemos, há vários casos em que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe. Nestes casos, há um teorema que afirma que limite e o limsup coincidem. Um destes casos, é fornecido pela sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ dada por

$$a_n = \frac{n^{2i}}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

com n^{2i} definido pelo ramo principal do logaritmo.

Para esta sequência temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^{2i}}{2^n}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\exp(2i \log n)}{2^n}\right|} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\exp(2i \log n)}{2^n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Teorema 5.20 (Existência do Raio de Convergência). *Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos e considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (5.4)$$

- (i) *Suponha que exista um número complexo $z_1 \neq 0$ para o qual a série converge, isto é, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k z_1^k$. Então a série de potências (5.4) é absolutamente convergente para todo $z \in D(0, |z_1|)$;*
- (ii) *suponha que exista um número complexo $z_2 \neq 0$ para o qual a série diverge, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k z_2^k$ não existe. Então a série de potências (5.4) diverge para qualquer z tal que $|z_2| < |z|$, ou seja, $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, |z_2|)}$.*
- (iii) *Existe um único $R \in [0, +\infty]$, chamado de raio de convergência, tal que a série de potências (5.4) diverge para todo $z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| > R\}$. Além do mais, se $R > 0$ então a série de potências (5.4) é absolutamente convergente, para todo $z \in D(0, R)$. O raio de convergência é dado por*

$$R = \sup \left\{ r \in [0, +\infty] : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}.$$

Para $R > 0$, o disco aberto $D(0, R)$ é chamado de disco de convergência da série de potências (5.4).

Demonstração. A prova deste teorema consiste basicamente em obter estimativas de séries de potências por séries geométricas. Então usamos o que sabemos

sobre a convergência e divergência de séries geométricas para provar o teorema. Como sugere o enunciado esta prova será dividida em três partes.

Prova do item (i). Suponha que $z_1 \in \mathbb{C}$ é tal que existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k z_1^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k.$$

Já que a série acima é convergente, segue da Proposição 5.6 que seu termo geral tende a zero, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_1^n = 0.$$

Já que esta sequência converge, então sabemos que ela deve ser limitada, isto é, existe uma constante $M \equiv M(z_1) > 0$, tal que $|a_n| |z_1|^n = |a_n z_1^n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Seja $z \in \mathbb{C}$, fixado, tal que $|z| < |z_1|$ e defina $r \equiv |z|/|z_1|$. Segue da observação acima que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ temos

$$|a_n z^n| = |a_n| |z|^n = |a_n| |z_1|^n \left(\frac{|z|}{|z_1|} \right)^n = |a_n| |z_1|^n r^n < M r^n.$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $r \equiv |z|/|z_1| < 1$ segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M r^n = M \sum_{n=0}^{\infty} r^n = M \frac{1}{1-r},$$

segue do Teste de Comparação (Teorema 5.3) que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é absolutamente convergente.

Prova do item (ii). Assuma que $z_2 \neq 0$ é tal que a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_2^k$ diverge. Suponha, por contradição, que exista algum $z \in \mathbb{C}$ com $|z_2| < |z|$, tal que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge. O fato desta série de potências convergir em z e $|z_2| < |z|$, nos permite aplicar o resultado do item (i) para garantir que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ converge absolutamente. O que é um absurdo.

Prova do item (iii). Apesar de estar praticamente tudo pronto, esta parte do teorema é bastante delicada porque envolve o conceito de supremo. O argumento é o seguinte. Considere o conjunto

$$A \equiv \left\{ r \in [0, \infty) : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ converge} \right\}.$$

Claramente $0 \in A$. E como todo sub-conjunto de \mathbb{R} não-vazio possui supremo, então está sempre bem definido $R \equiv \sup(A)$. É claro que pela definição de supremo, temos sempre $R \in [0, +\infty]$.

Vamos prosseguir dividindo o restante da prova em dois casos: primeiro $R = 0$ e o segundo $R > 0$.

Caso $R = 0$. Neste caso temos que

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\} = \mathbb{C}^*.$$

Portanto, precisamos mostrar que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge para qualquer $z \in \mathbb{C}^*$.

Obviamente se $z \in \mathbb{C}^*$ e $R = 0$ então $R < |z|$. Portanto, pela definição de $R = \sup(A)$ e pelo item (i) podemos afirmar que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ não pode convergir. Vamos provar esta afirmação por absurdo. Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge (note que não podemos garantir que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n$ converge). Então segue do item (i) que se w é um número complexo satisfazendo $0 < |w| < |z|$, então a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ é absolutamente convergente. Pela definição do conjunto A temos então que $|w| \in A$. Mas se $w \in A$ temos pela definição de supremo que $0 < |w| \leq \sup(A) = R = 0$, o que é um absurdo.

Caso $R > 0$. Vamos mostrar primeiro que se $z \in D(0, R)$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é absolutamente convergente.

Já que $|z| < R$ e $R = \sup(A)$, podemos garantir que existe $r \in A$ satisfazendo $|z| < r \leq \sup(A)$. Caso contrário, $|z|$ seria uma cota superior para todo ponto de A e ainda por cima menor que o supremo, o que é um absurdo, pois o $\sup(A)$ é a menor das cotas superiores de A . Como $r \in A$ e $|z| < r$, segue do item (i) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é absolutamente convergente.

É claro que se $R = +\infty$ não há mais nada a fazer. Desta maneira só resta analisar o que ocorre no caso $0 < R < +\infty$. Mais precisamente, resta mostrar que se $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge. Suponha, por contradição, que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge. Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $R < |w| < |z|$. Como estamos assumindo que a série de potências converge em z , segue do item (i) que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ é absolutamente convergente. O que implica que o número $|w| \in A$. Mas pela definição de $\sup(A)$ isto é um absurdo, já que $R < |w|$. ■

Para exemplificar o teorema acabamos de provar, vamos apresentar alguns exemplos em que uma simples análise do termo geral nos permite concluir quem são os raios de convergência, neste casos. De certa forma, estes próximos exemplos ilustram que em alguns casos é possível calcular o raio de convergência de maneira “braçal” sem necessariamente apelar para algum tipo de fórmula. Inclusive um destes exemplos é incluído aqui, por causa de uma particularidade muito especial. Nele, vamos poder estudar a convergência ou divergência da série de potências em todo ponto do bordo do disco de convergência $\partial D(0, R)$, algo raramente possível de ser feito.

Exemplo 5.21. *Vamos verificar que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ tem raio de convergência $R = 0$. Para fazer este cálculo, vamos usar a Proposição 5.6 que afirma que se uma série numérica converge, então seu termo geral converge para zero.*

Logo para mostrar que o raio de convergência desta série de potências é nulo, é suficiente mostrar que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ fixado, que o termo geral, da série numérica associada a sequência $a_n = n! z^n$ não tende a zero, quando $n \rightarrow \infty$. Para provar esta afirmação vamos dividir o argumento em duas partes. Primeiro vamos considerar $|z| \geq 1$. Neste caso temos $|a_n| = |n! z^n| = n! |z|^n \geq n!$, e portanto a_n diverge, quando $n \rightarrow \infty$. O que mostra que a o termo geral da série de potências não tende a zero. Da Proposição 5.6 concluímos então que a série $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ não converge neste casos. Assim do Teorema 5.20 segue que $R < 1$.

Vamos analisar agora o que acontece com $|a_n| = |n!z^n|$, quando $n \rightarrow \infty$, para z fixado satisfazendo $0 < |z| < 1$.

Neste caso, há várias maneiras de se estudar o comportamento de $|a_n|$ quando n cresce. Poderíamos, por exemplo, mostrar que

- $|n!z^n| = \exp(\ln(n!|z|^n)) = \exp(\ln(n!) + n \ln(|z|)) > \exp(n(\ln(n) + \ln(|z|)))$, usando $\sum_{j=0}^n \ln(j) \leq \int_1^n \ln(x) dx$. E concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |n!z^n| = +\infty.$$

- ou verificar que se n_0 é um número natural satisfazendo $n_0 > 2|z|^{-1}$, então para todo $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$(n_0)!z^{n_0}2^k < |a_{n_0+k}|$$

mostrando novamente que $|a_n| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Uma observação. A desigualdade acima é obtida analisando-se as razões de termos consecutivos da sequência $|a_n|$ (analogamente ao que fazemos no teste da razão).

Mas há ainda uma maneira mais simples e elegante que esta duas. Baseada na expansão em série de Taylor da função exponencial real (vista nos cursos de cálculo)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entretanto usando esta técnica, não é possível mostrar o fato mais forte que é $|a_n| \rightarrow \infty$, mas apenas que $e^{-|z|^{-1}} < |a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O que é suficiente, já que a Proposição 5.6 permite concluir que a série de potências será divergente, neste caso, pois o termo geral não tende a zero.

Para provar a desigualdade enunciada acima, basta observar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\frac{1}{|a_n|} = \frac{|z|^{-n}}{n!} = \frac{|z^{-1}|^n}{n!} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|z^{-1}|^j}{j!} = e^{|z|^{-1}} \implies e^{-|z|^{-1}} < |a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conclusão. Para todo $0 < |z| < 1$ a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ é divergente e portanto segue do item (iii) do Teorema 5.20 que $R = 0$.

Exemplo 5.22. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Note que esta série de potências é absolutamente convergente para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = r < 1$. De fato,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Como r é arbitrário em $[0, 1)$ segue do item (iii) do Teorema 5.20 que $1 \leq R$. Analogamente mostramos que se $|z| = r > 1$, então a série de potências diverge. Portanto, mais uma aplicação item (iii) do Teorema 5.20 garante que $R \leq 1$. Juntando as duas estimativas que tínhamos para R concluímos que $R = 1$. Assim o disco unitário \mathbb{D} é o disco de convergência desta série.

Este é um dos poucos exemplos em que podemos determinar o que acontece com a série de potências em cada um dos pontos do bordo do seu disco de convergência, neste caso $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. De fato, se $|z| = 1$ então $z = \exp(i\theta)$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Portanto a série de potências neste ponto é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\exp(i\theta))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in\theta).$$

Já que o termo geral da série que aparece à direita, não tende a zero; segue novamente da Proposição 5.6 que a série de potências é divergente. Isto é, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ diverge para todo $z \in \partial\mathbb{D}$.

Note que não é possível chegar a mesma conclusão acima, usando que $|z| = 1$ implica $|z^n| = 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$. Pois a série de valores absolutos poderia divergir, mas a série sem valor absoluto poderia convergir. Exemplo típico disto é dado pelo caso da série harmônica alternada. De maneira mais geral, a série de potências poderia ser condicionalmente convergente em algum ponto do bordo do disco de convergência, mesmo não sendo absolutamente convergente neste ponto. É justamente esta possibilidade que torna a análise no bordo do disco de convergência um problema tão complicado.

Exemplo 5.23. Vamos verificar que a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n$$

tem raio de convergência $R = +\infty$.

O objetivo deste exemplo é ilustrar, em mais um caso, como aplicar o Teorema 5.20. Vamos usar novamente o que sabemos da série de potências da exponencial real. A ideia é simples vamos olhar para a série de valores absolutos. Seja $z \in \mathbb{C}$ qualquer com $|z| = r$. Então segue do Teste de Comparação (Teorema 5.3) e das seguintes igualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{i^n}{n!} z^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|i^n|}{n!} |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} r^n = e^r.$$

que a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \quad \text{é absolutamente convergente para todo } z \in D(0, r).$$

E portanto pelo item (iii) do Teorema 5.20 segue que $R \geq r$. Como r é arbitrário só resta $R = +\infty$.

A proposição a seguir fornece uma maneira simples de calcular o raio de convergência sob a hipótese de existência de certos limites. Esta expressão para o raio é uma generalização de uma expressão semelhante para o raio de potências de séries de números reais.

Proposição 5.24. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma seqüência de números complexos. Suponha que existe índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$, para todo $n \geq n_0$. Considere a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Se existir qualquer um dos seguintes limites*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

então, R é exatamente o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Demonstração. *Em andamento...* ■

Proposição 5.25. *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ séries de potências com raios de convergência R_1 e R_2 , respectivamente. Para qualquer constante $c \in \mathbb{C}^*$ a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n z^n$ tem raio de convergência R_1 e para todo $z \in D(0, R)$ temos $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n z^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Se $R = \min\{R_1, R_2\}$, então para todo $z \in D(0, R)$ temos*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n.$$

Demonstração. Já que séries de potências são definidas em termos de limites de somas parciais, as propriedades enunciadas nesta proposição são consequências imediatas das propriedades elementares de limite. ■

Proposição 5.26. *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, séries de potências com raios de convergência R_1 e R_2 , respectivamente. Seja $R = \min\{R_1, R_2\}$. Então*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right), \quad \forall z \in D(0, R),$$

onde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

Além do mais, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ é absolutamente convergente para todo $z \in D(0, R)$.

Demonstração. *Em andamento...* ■

Proposição 5.27. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma seqüência arbitrária de números complexos. Suponha que a série de potências, centrada em zero, gerada por esta seqüência tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in D(0, R).$$

Então para cada $z \in D(0, R)$, a série de potências

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

é absolutamente convergente e portanto define uma função complexa em todo o disco $D(0, R)$.

Demonstração. Em andamento ... ■

Teorema 5.28. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos. Suponha que a série de potências, centrada em zero, gerada por esta sequência tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in D(0, R).$$

Então a função f possui derivada, no sentido complexo, em todos os pontos de seu domínio. Além do mais,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \forall z \in D(0, R).$$

Além do mais, a série de potências de f' também tem raio de convergência R , portanto é absolutamente convergente para todo ponto z no disco de convergência $D(0, R)$. Como mostra a expressão acima f' pode ser obtida simplesmente por derivação termo-a-termo da série de potências de f .

Demonstração. Em andamento ... ■

Corolário 5.29. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos. Suponha que a série de potências, centrada em zero, gerada por esta sequência tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in D(0, R).$$

Então a função f possui derivadas de todas as ordens, no sentido complexo, em todos os pontos de seu domínio. Além do mais, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}, \quad \forall z \in D(0, R).$$

Além do mais, a série de potências de $f^{(k)}$ também tem raio de convergência R , portanto é absolutamente convergente para todo ponto z no disco de convergência $D(0, R)$. Como no teorema anterior, a série de potências que representa $f^{(k)}$ pode ser obtida simplesmente por k derivações sucessivas termo-a-termo da série de potências de f .

Demonstração. Em andamento... ■

Corolário 5.30 (Séries de Taylor). *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos. Suponha que a série de potências, centrada em zero, gerada por esta sequência tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, para todo $z \in D(0, R)$. Então f é dada por sua **série de Taylor** de centro em 0, isto é,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \forall z \in D(0, R).$$

A série de Taylor de f também tem raio de convergência R e portanto é absolutamente convergente para todo ponto z no disco de convergência $D(0, R)$.

5.3.2 Séries de Potências Centradas em $z = z_0$

Apresentamos na seção anterior alguns resultados sobre séries de potências centradas em $z = 0$. Isto é, séries geradas por sequências da forma $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Estas séries são bem apropriadas para estudar o comportamento de local de certas funções, em vizinhanças da origem. Porém em uma vizinhança de um outro ponto $z = z_0$, no domínio da função, pode ser mais apropriado considerar uma série de potências centrada no próprio z_0 , isto é, considerar séries da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (5.5)$$

Todos os resultados obtidos na seção anterior podem ser generalizados para séries centradas em z_0 . Uma forma de verificar isto é considerar a mudança de variáveis $w = z - z_0$ e notar que nesta nova variável a série de potências acima se torna a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad (5.6)$$

que está centrada em $w = 0$.

Se R denota o raio de convergência da série de potências (5.6), então a convergência de (5.6) para $|w| < R$, é equivalente, em termos da variável z , à convergência de (5.5) para todo z , satisfazendo $|z - z_0| < R$. Portanto a série de potências dada por (5.5) é absolutamente convergente para todos os pontos do disco $D(z_0, R)$. Analogamente chamamos $D(z_0, R)$ de disco de convergência da série (5.5), centrada em z_0 .

Note que R tem a propriedade de que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, diverge para todo $z \in \mathbb{C}$ satisfazendo $R < |z - z_0|$.

Destas observações seguem, por exemplo, os seguintes resultados

Teorema 5.31. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos. Suponha que a série de potências centrada em $z = z_0$ e gerada por esta sequência tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Então a função f possui derivada, no sentido complexo, em todos os pontos de seu domínio. Além do mais,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Além do mais, a série de potências de f' também tem raio de convergência R , portanto é absolutamente convergente para todo ponto z no disco de convergência $D(z_0, R)$. Como mostra a expressão acima f' pode ser obtida simplesmente por derivação termo-a-termo da série de potências de f .

Corolário 5.32 (Séries de Taylor). *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência arbitrária de números complexos. Suponha que a série de potências centrada em zero e gerada por esta sequência, tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, para todo $z \in D(z_0, R)$. Então f é representada por sua **série de Taylor** de centro em z_0*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Além do mais, a série de Taylor de f tem raio de convergência R e portanto é absolutamente convergente para todo ponto z no disco de convergência $D(z_0, R)$.

5.4 Funções Analíticas

Definição 5.33 (Função Analítica). *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica em U , se para cada ponto $z_0 \in U$, existem coeficientes $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ complexos e um raio de convergência $R_{z_0} > 0$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R_{z_0}).$$

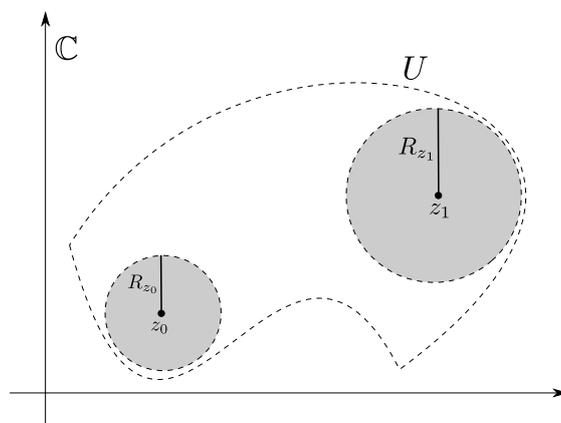


Figura 5.4.1: Nesta figura mostramos como os vários discos de convergência, das expansões em série de potências de uma função analítica f definida em U poderiam ter raios distintos.

Duas observações são importantes neste momento. Primeiro, em geral, os coeficientes a_n podem depender da escolha do ponto z_0 e talvez o mais apropriado fosse denotar estes coeficientes por $a_n(z_0)$, para se deixar mais explícito que há esta dependência. Segundo, se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica, então como consequência do Teorema 5.31, temos que f possui infinitas derivadas, em qualquer ponto de seu domínio e, além do mais, o Corolário 5.32 afirma que

$$a_n \equiv a_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Um dos principais resultados desta seção afirma que uma série de potências centrada em $w \in \mathbb{C}$, com raio de convergência $R_w > 0$; define em seu disco de convergência uma função $f : D(w, R_w) \rightarrow \mathbb{C}$ que é analítica.

Para provar este resultado precisaremos enunciar e provar alguns fatos auxiliares sobre troca de ordem de somas infinitas e a fórmula do Binômio de Newton para variáveis complexas.

É importante observar que analiticidade de uma função definida por uma série de potências também pode ser obtida como consequência da Fórmula Integral de Cauchy. Na verdade, no contexto de variáveis complexas, diria que esta seria a rota mais natural para provar este fato. Mas isto requer ferramentas que só serão vistas mais a frente, quando estivermos apresentando a teoria de integração complexa.

Uma vantagem da abordagem desenvolvida nesta seção é que ela se adapta muito facilmente para outros contextos mais gerais em que também podemos definir séries de potências, mas não dispomos de uma ferramenta como a Fórmula Integral de Cauchy. Por exemplo, podemos aplicar as ideias desta seção para estudar analiticidade de séries de potências definidas em certos espaços de Banach de dimensão infinita.

Teorema 5.34. *Para cada par $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seja $a_{n,m}$ um número complexo. Suponha que para cada índice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixado, que a série formada pela sequência $(a_{n,m})_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge absolutamente e que a soma dos valores absolutos é dada por*

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = L_n.$$

Além do mais, assuma que a série formada por estas somas, isto é, $\sum_{n=0}^{\infty} L_n = A$ também é convergente.

Então as seguintes séries são convergentes e valem as seguintes igualdades:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,m}|;$
- *para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixado,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \equiv C_m;$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}.$

O Teorema 5.34 pode ser visto como uma versão do Teorema de Fubini sobre integrais iteradas. Para isto basta olharmos para $a_{n,m}$ como imagem de uma função de duas variáveis $g : (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$. Deste ponto de vista a conclusão do teorema poderia ser interpretada como a afirmação de que a soma dupla pode ser vista como somas iteradas nas primeira e segunda variáveis, respectivamente, e que a ordem das somas podem ser intercambiadas. Ou de maneira mais intuitiva. Se pensamos na lista de $a_{n,m}$'s como uma espécie de matrix com infinitas linhas e infinitas colunas. O Teorema 5.34 afirma que podemos primeiro somar cada linha desta matriz e em seguida somar estas somas e que isto é igual a somar as colunas da matriz e depois somar estas somas.

Outra maneira de pensar no Teorema 5.34 é vendo que ele se trata de um resultado sobre troca de ordem de limites. Para deixar isto mais claro vamos

$a_{0,0}$	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	\dots	$a_{0,m}$	\dots	$\sum_{m=0}^{\infty} a_{2,m} = L_2$
$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	\dots	$a_{1,m}$	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	$\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = L_n$
$a_{n,0}$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	\dots	$a_{n,m}$	\dots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Figura 5.4.2: Pensando em toda a lista de $a_{n,m}$'s como uma espécie de matrix com infinitas linhas e infinitas colunas. A hipótese do Teorema 5.34 é que a soma dos valores absolutos das linhas desta matriz formam uma nova sequência $(L_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ cuja a série associada é convergente.

reescrever as séries que aparecem na conclusão deste teorema, como limite de suas somas parciais (o que por definição é o que elas realmente são).

Primeiro observe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^q a_{n,m} = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{n,m}, \quad (5.7)$$

onde na última igualdade usamos que para cada p fixado que podemos permutar a ordem da soma em n com limite em q por causa de uma propriedade elementar de limite de sequências que afirma que a soma dos limites é o limite da soma, quando cada um dos limites existem. O que justifica a última igualdade em (5.7), ou seja,

$$\sum_{n=0}^p \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^q a_{n,m} = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{n,m}.$$

Analogamente, temos

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^q \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^p a_{n,m} = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^p a_{n,m}. \quad (5.8)$$

Já que para cada $p, q \in \mathbb{N}$ (finitos) obviamente temos:

$$S(p, q) \equiv \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^p a_{n,m} = \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q a_{n,m}. \quad (5.9)$$

A grande conclusão do Teorema 5.34 é que as expressões do lado direito de (5.7) e (5.8) são iguais e conseqüentemente

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{n,m} = \lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^q a_{n,m}.$$

Em outras palavras, usando (5.9), podemos simplificar a expressão acima para

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} S(p, q) = \lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} S(p, q).$$

A igualdade acima aparentemente poderia soar como um resultado muito natural. Porém o seguinte contra-exemplo ilustra como a conclusão do Teorema 5.34 é altamente não-trivial.

Exemplo 5.35. Para cada par de números naturais $p, q \in \mathbb{N}$ define

$$S(p, q) = \frac{p}{p+q}.$$

Então

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} S(p, q) = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{p}{p+q} = \lim_{p \rightarrow \infty} 0 = 0$$

e por outro lado

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} S(p, q) = \lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p+q} = \lim_{q \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Ou seja, em geral, não podemos inverter a ordem com que tomamos limites.

O Teorema 5.34 será uma das principais ferramentas utilizadas para mostrar que uma função f dada por uma série de potências em seu disco de convergência $D(z_0, R)$, com $R > 0$, é uma função analítica.

A princípio, um leitor mais desatento, poderia inicialmente suspeitar de que não há nada a fazer, já que nossa função $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$, por hipótese, é dada por um série de potências, isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Mas alertamos que a questão delicada que se coloca aqui é que a definição de analiticidade, exige que f possa ser expressa como série de potências com raio de convergência positivo em torno de qualquer ponto do seu domínio. Isto é, dado $z_1 \in D(z_0, R)$ qualquer, diferente de z_0 , a dificuldade técnica que se apresenta é: como garantir que existem coeficientes $(b_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e $R_{z_1} > 0$ tais que f possa ser representada como uma série de potências em torno deste novo ponto z_1 , ou seja,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n, \quad \forall z \in D(z_1, R_{z_1}).$$

Em outras palavras, precisamos entender o que acontece quando mudamos o ponto onde centramos a expansão em série de potências de f . Isto passa por entender como se relacionam os coeficientes de cada uma destas expansões bem como os raios dos discos de convergência, respectivos.

Antes porém, precisamos de mais um resultado preparatório que consiste em uma generalização, para números complexos, da famosa fórmula do Binômio de Newton

Proposição 5.36 (Binômio de Newton). Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos

$$(w + z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}, \quad \text{onde} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (5.10)$$

Demonstração. Observamos que é possível apresentar uma prova desta proposição usando argumentos idênticos a maioria daqueles empregados nas provas em que z e w são números reais. Praticamente os seguindo *ipsis litteris*. Isto porque a maioria destas provas, no caso real, só se utiliza da estrutura de corpo de \mathbb{R} e das relações de Stifel para os coeficientes binomiais.

Por questão de completude, vamos apresentar aqui uma prova alternativa da validade desta proposição, que é enunciada para números complexos, explorando a fórmula do Binômio de Newton conhecida para números reais.

Para isto, primeiro observamos que para todo $x \in \mathbb{R}$, temos da fórmula do Binômio de Newton, para números reais, que

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Olhando com cuidado a identidade acima, o leitor pode observar que ela revela que $x = -1$ é uma raiz, de multiplicidade n , do polinômio $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de grau n , dado por

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Considere agora a função polinomial $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cujos os coeficientes são os mesmos de $p(x)$, isto é,

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k.$$

Já que os coeficientes dos polinômios p e P são os mesmos, temos que $\text{grau}(P) = n$, e que $z = -1$ também é uma raiz de P de multiplicidade n . Pois toda raiz de p é obviamente uma raiz de P . Eventualmente, poderíamos imaginar que P poderia ter raízes outras complexas com parte imaginária não-nula. Mas isto não pode acontecer por causa do algoritmo de divisão de Euclides para polinômios, que garante que $(z+1)^n$ é um fator de $P(z)$. Mas como $\text{grau}(P) = n$ então sua fatoração é exatamente esta $(z+1)^n$. Assim temos

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = P(z) = (z+1)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Agora podemos usar a identidade acima para verificar a validade de fórmula do Binômio de Newton para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, -z\}$. De fato,

$$(w+z)^n = w^n \left(1 + \frac{z}{w}\right)^n = w^n P\left(\frac{z}{w}\right) = w^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{w^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}.$$

Para finalizar a prova, basta observar que (5.10) é obviamente verdadeira nos casos em que $w = 0$ ou $w = -z$. ■

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixado, considere a função $\mathbb{1}_{[n]}: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\mathbb{1}_{[n]}(m) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq m \leq n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.11)$$

Note que a função $\mathbb{1}_{[n]}(m)$ assume o valor 1 se seu argumento $m \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ e assume o valor zero caso $m > n$. Vamos usar estas funções na prova do próximo teorema para expressar somas finitas como séries infinitas. Em particular, vamos usar a seguinte identidade

$$\sum_{m=0}^n \mathbb{1}_{[n]}(m) c_n = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[n]}(m) c_n, \quad (5.12)$$

válida para qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixado e $(c_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ qualquer sequência de números complexos (observe que nesta identidade não é preciso nem mesmo exigir que a série dos c_n 's seja convergente). Na verdade, nesta identidade a série que aparece no lado direito têm todos os termos de índice maior que n nulos, pela definição de $\mathbb{1}_{[n]}(m)$.

Outra identidade importante na prova do próximo teorema e que segue diretamente da definição de $\mathbb{1}_{[n]}(m)$ é a seguinte: para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixado temos

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[n]}(m) c_n = \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{1}_{[n]}(m) c_n. \quad (5.13)$$

Finalmente estamos prontos para mostrar o resultado mais importante desta seção.

Teorema 5.37. *Se $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função definida por uma série de potências, com coeficientes complexos $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$, com raio de convergência $R > 0$. Ou seja,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Então $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica, isto é, para qualquer $z_1 \in D(z_0, R)$ fixado, existem coeficientes complexos $(b_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e um número positivo $R_{z_1} = R - |z_1 - z_0|$ tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n, \quad \forall z \in D(z_1, R_{z_1}).$$

Demonstração. Vamos decompor a prova em duas partes. Na primeira parte vamos assumir que a série de potências está centrada na origem, isto é, $z_0 = 0$. Em seguida, vamos mostrar que o caso geral, $z_0 \in \mathbb{C}$ qualquer, pode ser reduzido ao caso tratado na primeira parte, fazendo uma simples mudança de variáveis.

Parte 1. Como mencionado acima, vamos assumir nesta primeira parte da prova que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in D(0, R).$$

Fixado um ponto arbitrário $z_1 \in D(0, R)$ defina $R_{z_1} \equiv R - |z_1|$.

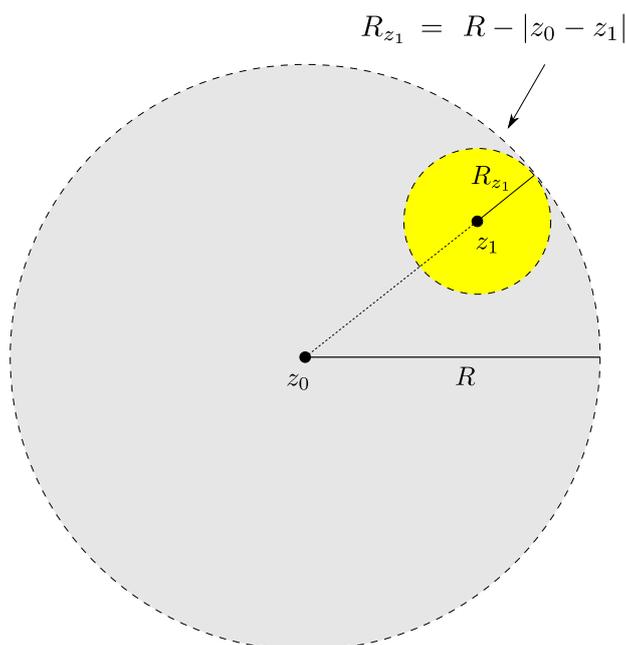


Figura 5.4.3: O raio de convergência da série de potências centrada em z_1 é pelo menos $R_{z_1} = R - |z_0 - z_1|$.

Para cada $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ defina

$$a_{n,m} = \mathbb{1}_{[n]}(m) \cdot a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m} (z - z_1)^m,$$

onde $\mathbb{1}_{[n]}(m)$ é definido como em (5.11).

Vamos mostrar que os $a_{n,m}$'s satisfazem as hipóteses do Teorema 5.34, se tomamos $z \in D(z_1, R_1)$, onde $R_1 = R - |z_1|$. Para provar isto, primeiro observamos que

$$|a_{n,m}| = \mathbb{1}_{[n]}(m) \cdot |a_n| \cdot \binom{n}{m} |z_1|^{n-m} (|z - z_1|)^m.$$

E portanto segue da igualdade (5.12) e da fórmula do Binômio de Newton (Proposição 5.36) que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fixado temos

$$\begin{aligned} L_n &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} |a_{n,m}| = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[n]}(m) \cdot |a_n| \cdot \binom{n}{m} |z_1|^{n-m} (|z - z_1|)^m \\ &= \sum_{m=0}^n |a_n| \cdot \binom{n}{m} |z_1|^{n-m} (|z - z_1|)^m \\ &= |a_n| \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} |z_1|^{n-m} (|z - z_1|)^m \\ &= |a_n| (|z - z_1| + |z_1|)^n. \end{aligned}$$

Agora note que se tomamos $z \in D(z_1, R_1)$, então temos $|z - z_1| < R - |z_1|$ e portanto $|z - z_1| + |z_1| < R$. Logo temos das propriedades elementares de séries de potencia que a série abaixo é convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z - z_1| + |z_1|)^n.$$

O que mostra que as hipóteses do Teorema 5.34 são válidas desde que $z \in D(z_1, R_1)$.

Portanto sob a condição $z \in D(z_1, R_1)$ poderemos aplicar o Teorema 5.34 e com isto garantir a convergência de todas as séries que aparecem abaixo bem como a mudança de na ordem das somas feita na nona igualdade abaixo. Para facilitar a compreensão pelo leitor, observamos também que para a sexta igualdade que aparece abaixo basta usar (5.12) e para penúltima igualdade é só aplicar (5.13)

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1 + z_1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z_1^{n-m} (z - z_1)^m \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n a_n \binom{n}{m} z_1^{n-m} (z - z_1)^m \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n \mathbb{1}_{[m]}(n) \cdot a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m} (z - z_1)^m \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[m]}(n) \cdot a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m} (z - z_1)^m \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[m]}(n) \cdot a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m} (z - z_1)^m \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[n]}(m) \cdot a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m} (z - z_1)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[n]}(m) \cdot a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m} \right] (z - z_1)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m} \right] (z - z_1)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} b_m (z - z_1)^m,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a notação

$$b_m \equiv \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m}. \quad (5.14)$$

Parte 2. Para provar o teorema quando z_0 não é necessariamente zero. Basta consideramos a mudança de variável $w = z - z_0$.

Fazendo isto temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

com a série à direta, sendo absolutamente convergente para todo $|w| < R$.

Dado $z_1 \in D(z_0, R)$ seja $w_1 = z_1 - z_0$. É claro que pela escolha de z_1 que temos $|w_1| = |z_0 - z_1| < R$.

Note que podemos aplicar o resultado obtido na primeira parte da prova, para concluir que para todo $w \in D(w_1, R - |w_1|)$ temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_1)^n, \quad \forall |w - w_1| < R - |w_1|.$$

Lembrando que $w = z - z_0$ e $w_1 = z_1 - z_0$, concluímos finalmente da igualdade acima que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n ((z - z_0) - (z_1 - z_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|z - z_1| < R - |w_1| = R - |z_0 - z_1|$. ■

Há varias observações importante que devem ser feitas sobre o teorema que acabamos de demonstrar.

Primeiro, começamos com nossa função $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ dada pela série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

O mais natural aqui, é que R tenha sido tomado como sendo o raio de convergência desta série, que é dado por

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

O Teorema 5.37 mostra que quando mudamos o centro da série de potencias então passamos de uma representação de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{válida para todo } z \in D(z_0, R),$$

para uma nova representação

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n, \quad \text{válida para todo } z \in D(z_1, R_1). \quad (5.15)$$

Como vimos a série acima converge absolutamente em todo ponto do disco $D(z_1, R_1)$, onde $R_1 = R - |z_0 - z_1|$. Portanto, segue do teorema de existência do raio de convergência (Teorema 5.20 item (iii)) que

$$R_{z_1} \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} \equiv \tilde{R}_{z_1},$$

veja Figura 5.4.4.

A priori não há nada que proíba a desigualdade acima de ser estrita. A ocorrência deste fato é inclusive ligada a manifestação de um fenômeno muito importante. Neste caso, a função f irá admitir uma extensão analítica para além do disco $D(0, R)$! Para esclarecer este comentário, precisamos da definição de extensão analítica de uma função.

Definição 5.38 (Extensão Analítica). *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto não vazio e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Dizemos que f admite uma extensão analítica à um aberto $V \subset \mathbb{C}$, contendo U estritamente ($U \subsetneq V$), se existe e uma função analítica $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F|_U = f$. Isto é, a restrição de F ao conjunto U é exatamente a função f .*

Voltando a discussão acima, se ocorrer $R_{z_1} < \tilde{R}_{z_1}$ temos que a série de potências em (5.15) converge em um ponto z que está fora do disco $D(z_0, R)$, onde, a rigor, não faria muito sentido falar de $f(z)$, já que este ponto está fora do domínio da função f . Mas esta observação, nos motiva naturalmente, a definir uma extensão analítica de f da seguinte forma. O domínio na nossa extensão será o o conjunto $V \equiv D(z_0, R) \cup D(z_1, \tilde{R}_{z_1})$ e a função $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$F(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, & \text{se } z \in D(z_0, R); \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n, & \text{se } z \in D(z_1, \tilde{R}_{z_1}). \end{cases}$$

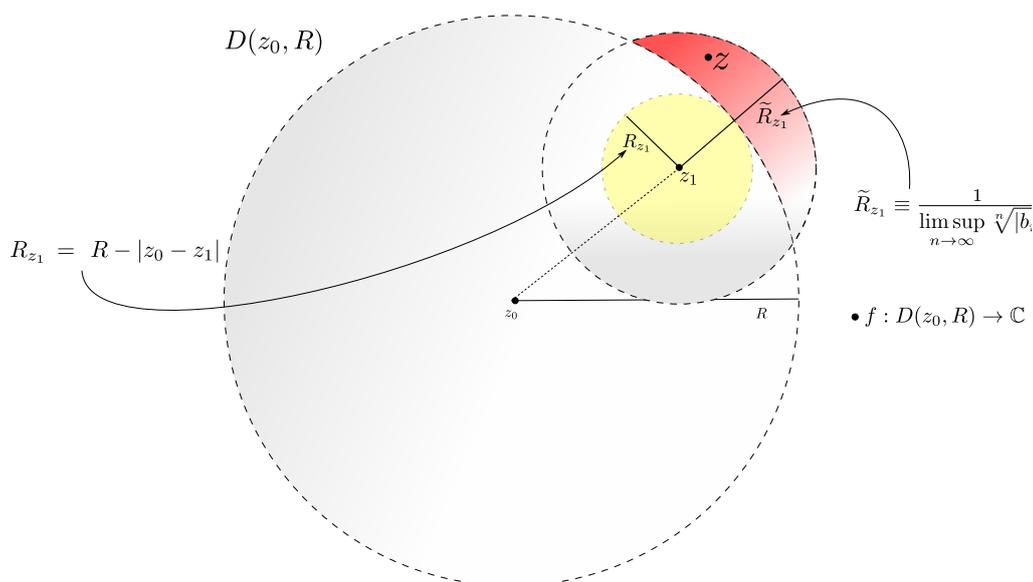


Figura 5.4.4: Note que apesar da série de potências (5.15), centrada em z_1 fazer sentido, para qualquer ponto z na região hachurada em vermelho (exterior ao disco $D(z_0, R)$), a rigor, não faz sentido falar de $f(z)$.

Observe que não há ambiguidade na definição acima já que para todo z satisfazendo $z \in D(z_0, R)$ e $z \in D(z_1, \tilde{R}_{z_1})$, isto é,

$$z \in D(z_0, R) \cap D(z_1, \tilde{R}_{z_1})$$

temos do Teorema 5.37 que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n$$

e portanto que o valor $F(z)$ está bem definido.

Claramente temos $F|_{D(z_0, R)} = f$. De fato, se $z \in D(z_0, R)$ segue diretamente das definições de F e f , respectivamente, que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f(z).$$

Para verificar que F é analítica precisamos aplicar o Teorema 5.37. De fato, para qualquer $z_2 \in V = D(z_0, R) \cup D(z_1, \tilde{R}_{z_1})$ dado, temos que ou $z_2 \in D(z_0, R)$ ou $z_2 \in D(z_1, \tilde{R}_{z_1})$.

Caso 1. Se $z_2 \in D(z_0, R)$ então o Teorema 5.37 garante que existem coeficientes $(c_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tais que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_2)^n, \quad \forall z \in D(z_2, R - |z_0 - z_2|).$$

o que significa que F admite uma representação em séries de potências centrada em z_2 com raio de convergência positivo $\tilde{R}_{z_2} \geq R_{z_2} \equiv R - |z_0 - z_2|$.

Caso 2. Analogamente, se $z_2 \in D(z_1, \tilde{R}_{z_1})$ então temos novamente do Teorema 5.37 que existem coeficientes $(d_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tais que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z - z_2)^n, \quad \forall z \in D(z_2, \tilde{R}_{z_1} - |z_1 - z_2|).$$

o que assegura, que também neste caso, F admite uma representação em série de potências, centrada em z_2 , com raio de convergência $\tilde{R}_{z_2} \geq R_{z_2} \equiv \tilde{R}_{z_1} - |z_1 - z_2| > 0$.

Mais a frente, vamos discutir a importante questão sobre existência e unicidade de extensões analíticas de uma função.

A segunda observação importante sobre o Teorema 5.37 é que se uma série de potências, centrada em z_0 , tem raio de convergência infinito, ou seja, se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

então qualquer que seja z_1 em \mathbb{C} , existem coeficientes $(b_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Em outras palavras, se mudamos o centro de uma série de potências com raio de convergência infinito, que representa f , então obtemos uma nova série de potências que representa f e que também tem raio de convergência infinito.

A terceira observação é o seguinte corolário.

Corolário 5.39. *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica. Então para cada $z_0 \in U$, existe $R_{z_0} \in (0, +\infty]$ (positivo estrito) tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R_{z_0}).$$

Demonstração. Já que f é analítica, temos por definição que para qualquer $z_0 \in U$ fixado, existem coeficientes $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e um raio de convergência positivo R_{z_0} tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R_{z_0}).$$

Pelo Teorema 5.31 e Corolário 5.32 a função f tem derivadas complexas de todas as ordens e além do mais a n -ésima derivada de f calculada em z_0 satisfaz

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

■

Exemplo 5.40. *Se $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial da forma*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

então p é uma função analítica.

Escolhemos apresentar e discutir, em detalhes, este exemplo porque ele ilustra de maneira simples e explícita vários dos conceitos e resultados apresentados acima. A ideia apresentada a seguir será fundamental para estabelecermos vários resultados importantes sobre funções analíticas.

Primeiro observe que é possível reconhecer p como uma série de potências. De fato, considere a sequência $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dada por:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad \dots, \quad b_n = a_n, \quad b_{n+1} = 0, \quad b_{n+2} = 0, \quad \dots$$

Então temos para todo $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Desta forma vemos que p é uma série de potências centrada em zero, com raio de convergência infinito. Na verdade, esta observação sobre o raio é simplesmente uma consequência do lado direito da expressão acima ser uma soma finita. Este fato óbvio também poderia ser obtido a partir da fórmula do raio de convergência, já que,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sup \left\{ \sqrt[k]{|b_k|}, \sqrt[k+1]{|b_{k+1}|}, \sqrt[k+2]{|b_{k+2}|}, \dots \right\} \right].$$

Pela definição de b_k , temos para todo $k > n = \text{grau}(p)$ que $\sqrt[k]{|b_k|} = 0$. Logo a expressão acima, é igual a $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{0\} = 0$. Mostrando que $R^{-1} = 0$ e assim $R = +\infty$.

Aplicando o Teorema 5.37 podemos concluir que p é uma função analítica. Pelas observações feitas acima, podemos mudar o centro da expansão de p para qualquer outro ponto $z_0 \in \mathbb{C}$, obtendo novamente outra representação em séries de potência para p , centrada em z_0 , com raio de convergência também infinito, isto é, existem coeficientes $(c_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tais que

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Do Corolário 5.39 temos que $c_k = p^{(k)}(z_0)/k!$, para todo $k \geq 0$ e

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como as derivadas de p de ordem maiores que $n = \text{grau}(p)$ são nulas, temos da igualdade acima que

$$p(z) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5.16)$$

Para explorar só um pouco mais este exemplo, lembremos que identidade (5.14) fornece uma relação explícita entre os coeficientes da expansão em série de potências de uma função analítica, quando mudamos o centro da expansão. Neste caso particular (5.14) afirma que

$$\frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} = c_k = \sum_{j=k}^{\infty} b_j \cdot \binom{j}{k} z_1^{j-k} = \sum_{j=k}^n a_j \cdot \binom{j}{k} z_0^{j-k}.$$

Exemplo 5.41. A função $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

é analítica.

Para mostrar que f é analítica, dado qualquer ponto $z_0 \in \mathbb{C}^*$ temos que mostrar que existem coeficientes $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ e $R_{z_0} > 0$ tais que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R_{z_0}). \quad (5.17)$$

A ideia vai ser usar séries geométricas, mais precisamente a identidade

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad \text{válida para } |w| < 1. \quad (5.18)$$

Dado $z_0 \in \mathbb{C}^*$, observe que podemos escrever, realizando apenas manipulações algébricas simples, a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0 \left(\frac{z - z_0}{z_0} + 1 \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{\left(1 - (-1) \frac{z - z_0}{z_0}\right)} \\
&= \frac{1}{z_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{-z_0}\right)} \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Se consideramos apenas os números complexos z 's satisfazendo

$$\left| \frac{z - z_0}{-z_0} \right| < 1, \quad \text{ou seja,} \quad |z - z_0| < |z_0| \iff z \in D(z_0, |z_0|)$$

Podemos usar identidade (5.18) na segunda fração que aparece em (5.19) para concluir que

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{-z_0}\right)} \\
&= \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{-z_0} \right)^n \\
&= \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n (z_0)^n} (z - z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, |z_0|).
\end{aligned}$$

A identidade acima prova a existência de uma representação em série de potências para f , em torno de qualquer $z_0 \in \mathbb{C}^*$, com raio de convergência $R_{z_0} = |z_0| > 0$ e os coeficientes a_n 's dados por

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(z_0)^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

como exigido em (5.17).

Este exemplo leva a uma observação importantíssima! Será que poderíamos ter concluído (apenas com os resultados que provamos até aqui) que f é analítica simplesmente calculando

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{(z_0)^{n+1}}$$

e, em seguida, mostrando que este coeficientes nos fornece uma série de potências convergente com raio de convergência

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{(z_0)^{n+1}} \right|}} = \frac{1}{\frac{1}{|z_0|}} = |z_0|.$$

A resposta, a rigor, é não! Até saberíamos que a série de potências abaixo (que é a série de Taylor de f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n, \quad \text{converge para todo } z \in D(z_0, |z_0|).$$

Mas sem qualquer informação adicional, não teríamos como concluir que a série acima, para cada z no disco de convergência, converge exatamente para $f(z)$.

5.4.1 Princípio da Identidade

Nesta seção vamos estudar algumas das propriedades fundamentais das séries de potências e suas generalizações para funções analíticas tomando valores em \mathbb{C} . Um dos principais objetivos é mostrar que se uma função analítica $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, definida em um **domínio** U , admite uma extensão analítica (no sentido da Definição 5.38) à um domínio V contendo U , então esta extensão é única. Este tipo de resultado mostra claramente a rigidez que a condição de analiticidade impõem a uma função. A figura abaixo ilustra a peculiaridade do resultado mencionado acima, já que podemos construir, por exemplo, funções reais deriváveis definidas em um intervalo finito (a, b) que admitem infinitas extensões deriváveis.

Para começar vamos considerar as séries de potências mais simples de todas que àquelas dadas por polinômios. Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$. Um polinômio não-nulo de grau n . Suponha que z_0 seja uma raiz de P e considere sua expansão em série de potências em torno de $z = z_0$, obtida no Exemplo 5.40,

$$p(z) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Já que $p(z_0) = 0$, o primeiro termo do somatório acima é nulo e portanto podemos reescrever p como segue

$$p(z) = (z - z_0) \sum_{k=1}^n \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Procedendo de maneira análoga podemos repetir este processo de fatoração m vezes, onde m é determinado pelas seguintes condições: $p^{(m)}(z_0) \neq 0$, e $p^{(j)}(z_0) = 0$ para todo $0 \leq j \leq m - 1$. Desta forma ficamos com

$$p(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=m}^n \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

O valor de m nada mais é do que a multiplicidade de z_0 como raiz de p . A razão de apresentá-lo desta maneira é que o método empregado aqui poderá ser aplicado também para séries de potências!

Próximo fato importante que devemos destacar sobre a fatoração obtida acima é que o polinômio que aparece como fator de $p(z)$, multiplicando $(z - z_0)^m$, isto é,

$$q(z) \equiv \sum_{k=m}^n \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}$$

é tal que $q(z)$ não se anula em $z = z_0$, pela definição de m . Já que função $z \mapsto q(z)$ é contínua dado

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{|p^{(m)}(z_0)|}{m!}$$

existe um $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |z - z_0| < \delta, \quad \text{então} \quad \left| q(z) - \frac{p^{(m)}(z_0)}{m!} \right| < \frac{1}{2} \frac{|p^{(m)}(z_0)|}{m!}.$$

Desta forma temos da segunda desigualdade triangular que

$$\left| \frac{p^{(m)}(z_0)}{m!} \right| - |q(z)| \leq \left| q(z) - \frac{p^{(m)}(z_0)}{m!} \right| < \frac{1}{2} \frac{|p^{(m)}(z_0)|}{m!}$$

e portanto

$$\frac{1}{2} \frac{|p^{(m)}(z_0)|}{m!} < |q(z)|, \quad \text{para todo } z \text{ satisfazendo } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Mostrando que os zeros de uma função polinomial não-nula são isolados. É claro que poderíamos ter chegado a esta mesma conclusão por outras vias mais simples. A razão de termos escolhido este argumento é que ele se generaliza para séries de potências, fornecendo o seguinte resultado que é de grande importância para a teoria de funções analíticas.

Lema 5.42. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de números complexos não identicamente nula. Suponha que a série de potências centrada em $w \in \mathbb{C}$ e gerada por esta sequência, tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(w, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n, \quad \forall z \in D(w, R)$$

e denote por $\mathcal{Z}(f) \equiv \{w \in \mathbb{C} : f(w) = 0\}$ conjunto dos zeros de f . Se o centro da série de potências $w \in \mathcal{Z}(f)$ então existe $\delta > 0$ tal que para todo z satisfazendo $0 < |z - w| < \delta$ temos $z \notin \mathcal{Z}(f)$. Em outras palavras, w é um zero isolado de f .

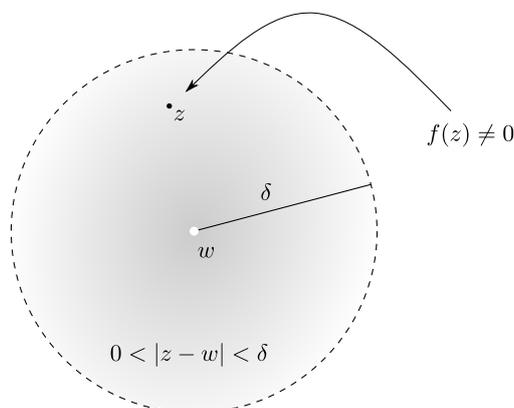


Figura 5.4.5: O único zero de f dentro do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - w| < \delta\}$

Demonstração. A prova deste lema é baseada no argumento apresentado no início desta seção.

Suponha que $f(w) = 0$. Então temos que $a_0 = 0$. Já que $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de números complexos não identicamente nula, existe $m \in \mathbb{N}$ (finito), o primeiro índice, tal que $a_n = 0$ para todo $0 \leq n \leq m - 1$ e $a_m \neq 0$. Portanto podemos reescrever f como segue

$$f(z) = (z - w)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - w)^{m-n} \equiv (z - w)^m g(z). \quad (5.20)$$

Note que $g(w) = a_m \neq 0$. Tomando $\varepsilon \equiv |a_m|/2$ segue da continuidade de g que podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que $B(w, \delta) \subset B(w, R)$ e para todo z satisfazendo $0 < |z - w| < \delta$ temos $|g(z) - g(w)| < \varepsilon$. Desta última desigualdade e da segunda desigualdade triangular segue que

$$|a_m| - |g(z)| = |g(w)| - |g(z)| \leq |g(z) - g(w)| < \varepsilon = \frac{|a_m|}{2} \implies \frac{|a_m|}{2} < |g(z)|,$$

para todo z satisfazendo $0 < |z - w| < \delta$. Portanto os dois fatores de (5.20) não se anulam quando para todo z satisfazendo $0 < |z - w| < \delta$ e assim $f(z) \neq 0$ sempre que $0 < |z - w| < \delta$. O que mostra que w é um zero isolado de f . ■

O lema acima prova que se uma série de potências, centrada em z_0 , se anula para $z = z_0$ então z_0 é um zero isolado de f . O objetivo do próximo lema é preparar o terreno para generalizar esta afirmação para qualquer zero no disco de convergência da série de potências, e não apenas seu centro.

A estratégia mais natural para se fazer isto seria primeiro aplicar o Teorema 5.37 para mudar o centro da série de potências para um de seus zeros. Em seguida, aplicar o lema anterior.

Há, no entanto, uma dificuldade técnica de se executar este plano. Para exemplificar isto, vamos considerar um caso bem simples, onde temos uma série de potências não nula, centrada na origem,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

que converge em um disco aberto $D(0, R)$, com $R > 0$. Suponha que z_1 seja um zero de f . Aplicando o Teorema 5.37, podemos mudar o centro da expansão acima para z_1 , isto é, representar f na forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n, \quad \forall z \in D(z_1, R - |z_1|).$$

Além do mais, podemos invocar a fórmula (5.14). Esta fórmula fornece, para cada $m \in \mathbb{N}$, uma expressão explícita para b_m em função dos coeficientes a_n 's que é dada por

$$b_m \equiv \sum_{n=m}^{\infty} a_n \cdot \binom{n}{m} z_1^{n-m}.$$

Se for possível garantir que $b_m \neq 0$, para algum $m \in \mathbb{N}$, então podemos aplicar o lema acima e garantir que z_1 é um zero isolado de f . O problema é que não é muito claro como garantir, pela fórmula acima, que a sequência b_m não seja identicamente nula. Para contornar este problema vamos provar o seguinte importante resultado.

Lema 5.43. *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência **arbitrária** de números complexos. Considere que a série de potências, centrada em $w \in \mathbb{C}$ e gerada por esta sequência, tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(w, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n, \quad \forall z \in D(w, R).$$

Se f se anula em todos os pontos de algum disco aberto $D(z_0, r_0) \subset D(w, R)$, com $r_0 > 0$. Então $f \equiv 0$ em $D(w, R)$. Em particular, $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$.

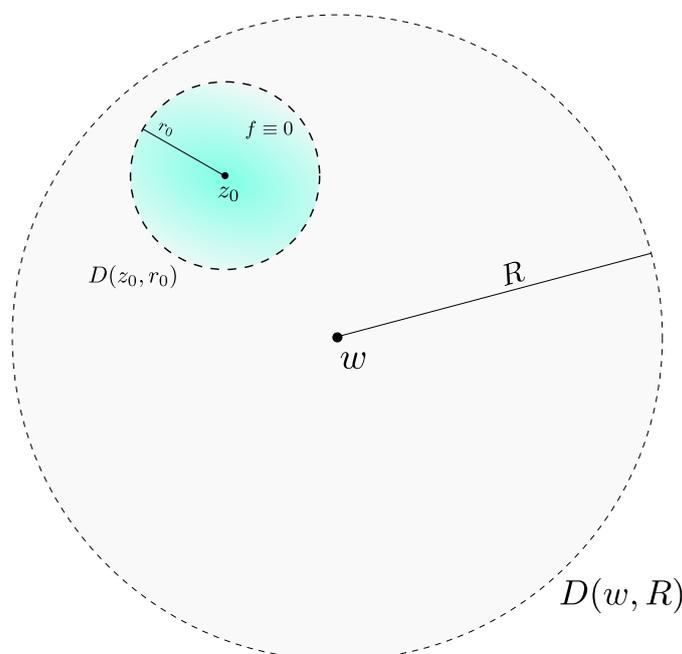


Figura 5.4.6: A função f se anula em todos os pontos do disco aberto $D(z_0, r_0)$

Demonstração. Suponha que exista um disco aberto $D(z_0, r_0)$, com raio $r_0 > 0$, contido em $D(w, R)$ tal que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(z_0, r_0)$. Denote por L_1 o segmento de reta unindo z_0 a w . Seja z_1 o único ponto em $L_1 \cap \partial D(z_0, r_0)$. Já que f se anula em todos os pontos de $L_1 \cap D(z_0, r_0)$ e f é contínua em $z_1 \in D(w, R)$ segue que $f(z_1) = 0$. Ou seja, $z_1 \in \mathcal{Z}(f)$.

Usando o Teorema 5.37 sabemos que podemos expandir f em uma série de potências, centrada em z_1 , e convergente em todo disco aberto $D(z_1, R - |z_1|)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n.$$

Já que $z_1 \in \mathcal{Z}(f)$ e $f \equiv 0$ em todos os pontos de L_1 , segue do Lema 5.42 que $f \equiv 0$ em $D(z_1, R - |z_1|)$. Caso contrário z_1 deveria ser um zero isolado de f o que é um

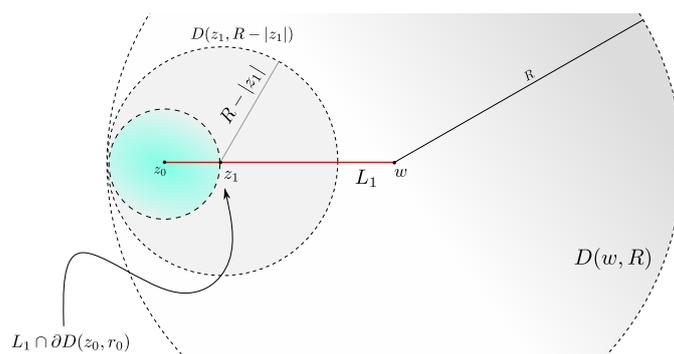


Figura 5.4.7: Construção da sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. O primeiro ponto da construção é mostrado acima. Ele é definido como sendo o ponto onde a reta L_1 intercepta o disco aberto $D(z_0, r_0)$.

absurdo pois z_1 é um ponto de acumulação de L_1 e f se anula em todos os pontos de L_1 .

Se $w \in D(z_1, R - |z_1|)$, não há mais nada a fazer, pois neste caso existe um $\delta > 0$ tal que $D(w, \delta)$ está contido em $D(z_1, R - |z_1|)$ e portanto $f \equiv 0$ em $D(w, \delta)$, o que implica que todos os coeficientes a_n 's da expansão de f em torno de w são nulos.

Caso $w \notin D(z_1, R - |z_1|)$, construímos um novo segmento de reta L_2 unindo z_1 a w . Seja z_2 o único ponto de interseção entre L_2 e $\partial D(z_1, R - |z_1|)$. Argumentando analogamente como acima, verificamos que $f(z_2) = 0$. Usando novamente o Lema 5.42 podemos expandir f em uma série de potências, centrada em z_2 , com raio de convergência pelo menos $R - |z_2| = 2(R - |z_1|) > 2(R - |z_0|)$. Já que $z_2 \in \mathcal{Z}(f)$ e f se anula em todos os pontos de L_2 temos novamente do Lema 5.42 que $f \equiv 0$ em $D(z_2, R - |z_2|)$. Como no caso anterior, se $w \in D(z_2, R - |z_2|)$ não há mais nada a fazer. Caso contrário, repetindo os argumentos dados acima, recursivamente, até construirmos z_n tal que

- o ponto z_n é o único ponto em $\partial D(z_{n-1}, R - |z_{n-1}|) \cap L_n$, onde L_n é o segmento de reta unindo z_{n-1} a w ;
- $f \equiv 0$ em $D(z_n, R - |z_n|)$;
- $R - |z_n| = 2^{n-1}(R - |z_1|)$;
- n é o menor índice para o qual $w \in D(z_n, R - |z_n|)$.

O que garante a existência de um n finito, satisfazendo a última condição acima, é o crescimento exponencial obtido no penúltimo item.

Por construção e pelos teoremas mencionados acima podemos garantir que f é identicamente nula no disco $D(z_n, R - |z_n|)$. E portanto existe algum $\delta > 0$ tal que f se nula em todos os pontos de $D(w, \delta)$. Mas isto implica que todos os coeficientes a_n 's são nulos e isto encerra a prova deste lema. ■

Teorema 5.44 (Zeros de Séries de Potência São Isolados). *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ uma sequência de números complexos **não identicamente nula**. Suponha que a série de potências centrada em $z = z_0$ e gerada por esta sequência tenha raio de convergência $R > 0$. Seja $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ a função dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R).$$

Então o conjunto de zeros de f , notação $\mathcal{Z}(f) \equiv \{w \in \mathbb{C} : f(w) = 0\}$, é vazio ou formado apenas por pontos isolados. Isto é, para cada $z_1 \in \mathcal{Z}(f)$, existe $\delta \equiv \delta_{z_1} > 0$ tal que se z satisfaz $0 < |z - z_1| < \delta$ então $z \notin \mathcal{Z}(f)$.

Demonstração. Caso f não possua zeros, não há nada a fazer. Logo só precisamos considerar o caso em que $\mathcal{Z}(f)$ é não-vazio. Seja $z_1 \in \mathcal{Z}(f)$. Aplicando o Teorema 5.37 podemos mudar o centro da série de potências de f para o ponto $z = z_1$. Obtendo assim a seguinte representação de f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n, \quad \forall z \in D(z_1, R_{z_1}). \quad (5.21)$$

Pelo Lema 5.43 podemos garantir que para algum $m \in \mathbb{N}$ temos que $b_m \neq 0$. De fato, se $b_n = 0$ para todo $n \geq 0$, então f é identicamente nula em $D(z_1, R_{z_1})$. Mas então segue do Lema 5.43 que f também é identicamente nula em $D(z_0, R)$. Portanto $a_n = 0$, para todo $n \geq 0$ o que é uma contradição.

Já que sabemos que algum coeficiente b_m em (5.21) é não-nulo, podemos aplicar o Lema 5.42 e assim garantir que z_1 é um zero isolado de f , como queríamos demonstrar. ■

Definição 5.45 (Ponto Aderente a um Conjunto). *Um ponto $z \in \mathbb{C}$ é dito um ponto aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{C}$, se existe uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo*

- $z_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (os termos da sequência são pontos de A);
- $z_n \neq z_m$, se $n \neq m$ (os termos da sequência são dois-a-dois distintos);
- $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ (a sequência converge para z).

Observação 5.46. *Um ponto $z \in \mathbb{C}$ pode ser um ponto aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{C}$, mas não ser um ponto de A , isto é, podemos ter um ponto z aderente a A tal que $z \notin A$.*

Para um exemplo simples deste caso, considere o seguinte subconjunto de \mathbb{C}

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Então é fácil ver que 0 é aderente a A mas $0 \notin A$. Outro aspecto interessante deste exemplo é que nenhum ponto do próprio conjunto A é aderente a A .

Teorema 5.47 (Princípio da Identidade). *Sejam $U, V \subset \mathbb{C}$ domínios não-vazios tais que $U \cap V$ também é um domínio, não-vazio. Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções analíticas. Suponha que exista um conjunto $I \subset U \cap V$ possuindo um ponto z_0 aderente ao conjunto I , e tal que $f(z) = g(z)$, para todo $z \in I$. Então $f(z) = g(z)$ para todo $z \in U \cap V$.*

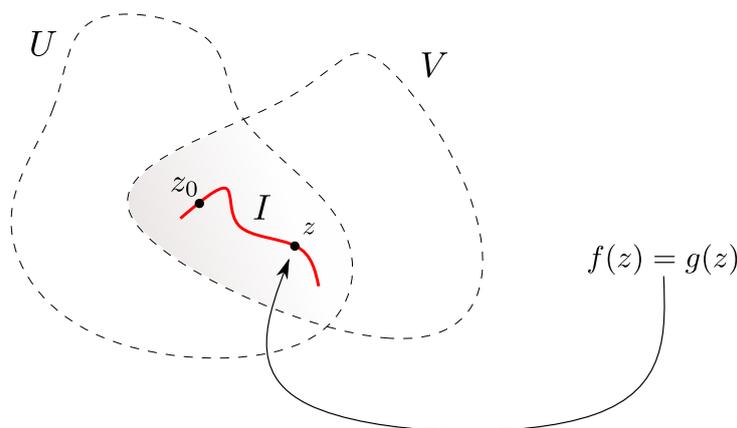


Figura 5.4.8: O conjunto I onde f e g coincidem é marcado de vermelho. Note que nesta figura z_0 é um ponto aderente a I . Pois ele pode ser obtido como limite de uma sequência de pontos que estão em I .

Demonstração. Vamos dividir a prova deste teorema em duas partes. A primeira parte mostramos a validade da igualdade $f(z) = g(z)$ em um pequeno disco em torno de z_0 . Na segunda parte mostramos como estender a análise local, da primeira parte, para todo o domínio $U \cap V$. Este argumento é basicamente um argumento topológico, mas claro, não apresentado na roupagem de topologia.

Vale a pena mencionar também que a prova da primeira parte, seguirá diretamente dos resultados obtidos acima, para séries de potências. E seus os argumentos são bem elementares. Já a segunda parte, envolve uma argumentação mais sofisticada. Numa primeira leitura, a prova da segunda parte pode ser omitida, sem nenhum prejuízo à compreensão do restante do texto.

Parte 1.

Por hipótese $z_0 \in I$ e além do mais z_0 é um ponto aderente a $I \subset U \cap V$. Já que f e g são analíticas em $U \cap V$ então podemos representar ambas funções por séries de potências, centradas em z_0 , com o raios de convergência $R_{z_0, f}$ e $R_{z_0, g}$, respectivamente. Portanto se tomamos $R_{z_0} = \min\{R_{z_0, f}, R_{z_0, g}\}$ temos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R_{z_0}).$$

Segue das propriedades elementares de séries de potência que a diferença das séries de potência acima, define uma função $h : D(z_0, R_{z_0}) \rightarrow \mathbb{C}$ que é dada pela seguinte série de potências:

$$h(z) \equiv f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) (z - z_0)^n.$$

Já que z_0 é um ponto aderente a I , existe uma sequência $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos dois-a-dois distintos em I que convergem para z_0 . Portanto, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ temos que $w_n \in D(z_0, R_{z_0})$, para todo $n \geq n_0$. Já que estamos assumindo que f e g coincidem em I então $h(w_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Desta forma o conjunto de zeros de h , ou seja, $\mathcal{Z}(h)$ não é constituído apenas de pontos isolados, pois para todo $n \geq n_0$ temos que $w_n \in \mathcal{Z}(h)$ e $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0 \in \mathcal{Z}(h)$. Logo pelo Teorema

5.44 concluímos que os coeficientes da expansão em série de potências de h , em torno de z_0 , são nulos. E isto mostra que $h \equiv 0$ em $D(z_0, R_{z_0})$.

Parte 2.

Nesta parte, vamos considerar a função h da parte anterior, como sendo definida em todo $U \cap V$, isto é, a partir de agora $h : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$. Sua lei contínua sendo a mesma, ou seja, $h(z) = f(z) - g(z)$.

É óbvio que se $D(z_0, R_{z_0}) \supset U \cap V$, não há mais nada a fazer. Portanto vamos assumir que o disco aberto $D(z_0, R_{z_0})$ é um subconjunto estritamente contido em $U \cap V$.

Considere o conjunto de zeros da função h , isto é,

$$\mathcal{Z}(h) \equiv \{z \in U \cap V : h(z) = 0\}.$$

O objetivo é mostrar que $\mathcal{Z}(h) = U \cap V$. Observamos que na Parte 1, foi demonstrado que o disco aberto $D(z_0, R_{z_0})$ está completamente contido em $\mathcal{Z}(h)$.

Seja $z \in U \cap V$ um ponto arbitrário. Como estamos supondo que $U \cap V$ é um domínio, podemos afirmar que existe um caminho, normalizado, injetivo e suave por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ totalmente contido em $U \cap V$ cujos pontos inicial e terminal são z_0 e z , respectivamente.

Sabemos que $z_0 = \gamma(0) \in \mathcal{Z}(h)$ e a ideia, desta parte da prova, é mostrar que $\gamma(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, está em $\mathcal{Z}(h)$. A prova deste fato será por contradição. Vamos supor que existe “um primeiro instante” antes do tempo $t = 1$, em que o caminho γ deixa o conjunto de zeros de h . E vamos derivar disto uma contradição.

Para formalizar esta ideia definimos

$$t^* = \sup \{t \in [0, 1] : \gamma([0, t]) \subset \mathcal{Z}(h)\}.$$

O número t^* pode ser pensado intuitivamente como o “primeiro instante” em que a curva γ deixa o conjunto $\mathcal{Z}(h)$, embora, a rigor, ele não seja exatamente isto.

Na sequência, vamos usar um argumento totalmente análogo ao da Parte 1, para mostrar que $\gamma(t^*) \in \mathcal{Z}(h)$ e, em seguida, vamos concluir que $t^* = 1$ e consequentemente que $z = \gamma(1) \in \mathcal{Z}(h)$.

Afirmamos que a continuidade de γ implica $t^* > 0$. Intuitivamente, o que esta afirmação diz é que toda a “parte inicial” do caminho γ está contida no disco $D(z_0, R_{z_0})$, que por sua vez está contido em $\mathcal{Z}(h)$. E portanto “leva” um tempo positivo para $\gamma(t)$ atingir o bordo do disco $D(z_0, R_{z_0})$. De forma precisa, dado $\varepsilon = R_{z_0}$, segue da continuidade de γ em $t = 0$ que existe $\delta > 0$ tal que se $|0 - t| = |t| < \delta$ então $|z_0 - \gamma(t)| = |\gamma(0) - \gamma(t)| < R_{z_0}$. Ou seja, $\gamma([0, \delta]) \subset D(z_0, R_{z_0}) \subset \mathcal{Z}(h)$ e consequentemente $0 < \delta \leq t^*$. Na linguagem informal, usada acima, o que mostramos é que γ não pode deixar o conjunto $\mathcal{Z}(h)$ antes do tempo $t = \delta$.

Da positividade estrita de t^* e da definição de supremo segue que existe uma sequência de números positivos distintos $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (estritamente crescente) $0 < t_n < t_{n+1} < t^*$ tal que $t_n \rightarrow t^*$, quando $n \rightarrow \infty$. Invocando novamente a definição de supremo podemos afirmar que $\gamma(t_n) \in \mathcal{Z}(h)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como h e γ são funções contínuas segue que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\gamma(t_n)) = h(\gamma(t^*))$$

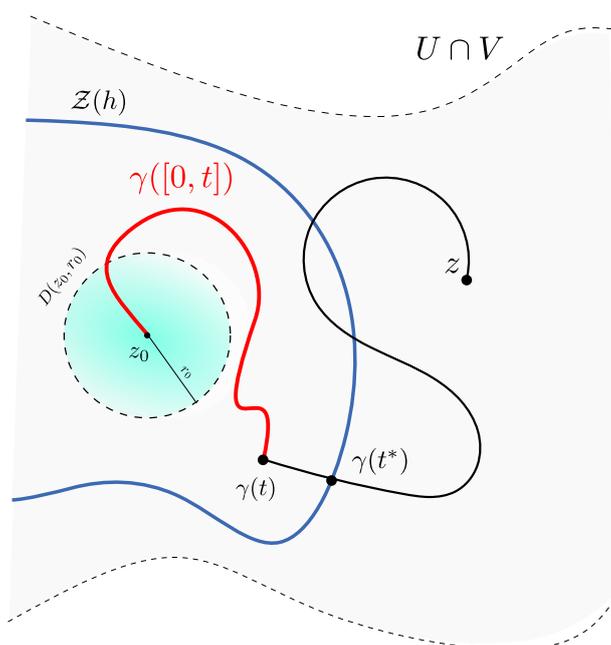


Figura 5.4.9: Esta figura ilustra a definição de t^* . A parte em vermelho corresponde a imagem por γ do intervalo $[0, t]$ com $t < t^*$. Como comentado o ponto $\gamma(t^*)$ pode ser intuitivamente pensado como o ponto onde o caminho γ está prestes a deixar $\mathcal{Z}(h)$.

e conseqüentemente $\gamma(t^*) \in \mathcal{Z}(h)$.

Como γ é um caminho totalmente contido em $U \cap V$ temos que $\gamma(t^*) \in U \cap V$. Pelo fato da função h ser analítica em $U \cap V$, podemos representá-la por uma série de potências, centrada em $\gamma(t^*)$, que converge em todo ponto do disco aberto $D(\gamma(t^*), R_{\gamma(t^*)})$, com raio $R_{\gamma(t^*)}$ positivo.

Já que γ é uma curva injetiva e $t_n < t_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então os pontos da seqüência $(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ são todos distintos. Como $\gamma(t_n) \rightarrow \gamma(t^*)$ temos que $\gamma(t^*)$ é um ponto aderente ao conjunto $\tilde{I} \equiv \{\gamma(t^*), \gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots\}$.

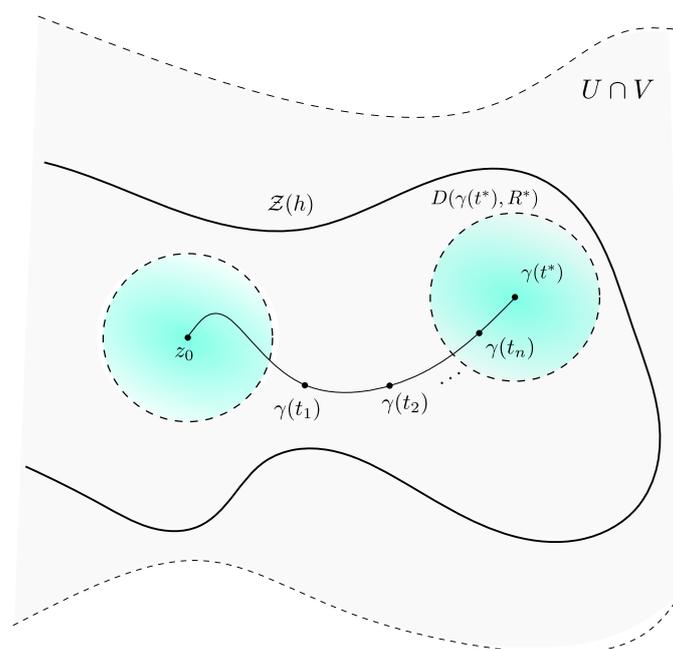
Argumentando analogamente como na Parte 1, apenas substituindo I por \tilde{I} podemos mostrar que existe algum $R^* > 0$ tal que $h \equiv 0$ no disco $D(\gamma(t^*), R^*)$ e conseqüentemente que $D(\gamma(t^*), R^*) \subset \mathcal{Z}(h)$.

Depois de todos estes preparativos, estamos finalmente prontos para provar que $t^* = 1$. De fato, suponha por contradição que $t^* < 1$. Escolhido $\varepsilon = R^*$, segue da continuidade de γ que existe δ satisfazendo $0 < \delta < 1 - t^*$ tal que se $|t - t^*| < \delta$ então $|\gamma(t) - \gamma(t^*)| < R^*$. Portanto, segue das propriedades elementares de função ($F(A \cup B) = F(A) \cup F(B)$), da definição de t^* , do argumento de continuidade deste parágrafo e da continência $D(\gamma(t^*), R^*) \subset \mathcal{Z}(h)$ (estabelecida no parágrafo anterior), que

$$\gamma([0, t^* + \delta/2]) = \gamma([0, t^*]) \cup \gamma([t^*, t^* + \delta/2]) \subset \mathcal{Z}(h) \cup D(\gamma(t^*), R^*) = \mathcal{Z}(h),$$

o que é uma contradição com a definição de t^* . Como mostramos que t^* não pode ser nenhum dos pontos do intervalo $[0, 1)$, só resta $t^* = 1$. Disto segue finalmente que $z \in \mathcal{Z}(h)$. Como z foi escolhido arbitrariamente em $U \cap V$ segue que $\mathcal{Z}(h) = U \cap V$ e o teorema está finalmente demonstrado. ■

Corolário 5.48 (Unicidade de Extensões Analíticas). *Sejam $U, V \subset \mathbb{C}$ domínios não vazios, com U estritamente contido em V . Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função*

Figura 5.4.10: O disco $D(\gamma(t^*), R^*)$

analítica. Se $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ e $G : V \rightarrow \mathbb{C}$ são funções analíticas que estendem f (extensões analíticas de f), isto é, $F|_U = f = G|_U$, então $F = G$.

Demonstração. A ideia é aplicar o Teorema 5.47 às funções F e G . Para isto vamos mostrar que todas as hipóteses deste teorema são satisfeitas.

Primeiro, o teorema citado acima, exige que F e G sejam funções analíticas definidas em domínios não-vazios, o que é o caso aqui. Ele também exige que $\text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$ seja um domínio não-vazio. Neste caso, esta interseção é precisamente o conjunto U , que por hipótese, é um domínio não-vazio. Além disto deve, existir um conjunto $I \subset \text{dom}(F) \cap \text{dom}(G)$ possuindo um ponto z_0 aderente a I , onde F e G coincidem. Neste caso o conjunto I pode ser tomado como $I = U = \text{dom}(f)$. De fato, como U é um domínio não-vazio, dado qualquer ponto $z_0 \in U$ podemos encontrar um raio $r > 0$, tal que que o disco aberto $D(z_0, r) \subset U$. Logo z_0 é um ponto aderente a U . Como F e G são extensões de f , então temos que F e G coincidem em U .

Portanto, todas as hipóteses do Teorema 5.47 estão garantidas. Então ele afirma que F e G coincidem em $\text{dom}(F) \cap \text{dom}(G) = V$, e logo $F = G$, como queríamos demonstrar. ■

Exemplo 5.49. Considere a seguinte identidade, bem conhecida, para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y} = e^x e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right). \quad (5.22)$$

Vamos mostrar como as técnicas de extensões analíticas (Teorema 5.47) podem ser usadas para estender a identidade acima para números complexos, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Primeiro, observamos que todas as séries que aparecem acima são convergentes. Na verdade, a série de potências dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

tem raio de convergência

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Fixe $w \in \mathbb{R}$ e considere as funções $f_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$f_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \quad e \quad g_w(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Pelo Teorema 5.37 e pela observação anterior é claro que ambas, são funções analíticas definidas em \mathbb{C} . Seguindo a notação do Teorema 5.47, note que se tomamos $I = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, então temos, por exemplo, que 0 é aderente a I e além do mais, para todo $z \in I$, temos que $f_w(z) = g_w(z)$.

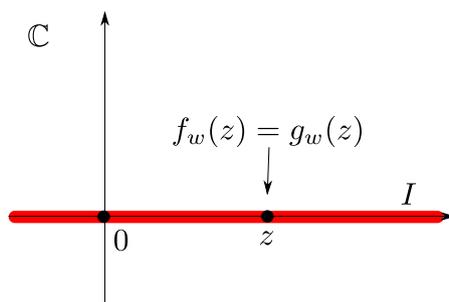


Figura 5.4.11: Para $z \in \mathbb{R}$ temos que $f_w(z) = g_w(z)$.

De fato, como w e z são reais e esta igualdade segue imediatamente de (5.22). Portanto podemos aplicar o Teorema 5.47. Neste caso ele garante que a igualdade permanece válida em todo os pontos da interseção dos domínios das funções f_w e g_w . Mas como ambas estão definidas em todo plano complexo segue que $f_w(z) = g_w(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Portanto temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right), \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ e } w \in \mathbb{R}. \quad (5.23)$$

Para completar a prova da identidade, precisamos de mais um passo. Permitir que w seja também qualquer número complexo. Mas a ideia é a mesma, porém agora podemos contar com a vantagem de poder construir as “funções auxiliares” f_w e g_w , fixando números complexos!

Fixe um número complexo arbitrário $z \in \mathbb{C}$. Como o Teorema 5.37 permite afirmar que qualquer série de potências define em seu raio de convergência uma função analítica. As seguintes funções $F_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $G_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$F_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \quad e \quad G_z(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right), \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

são funções analíticas. Repare que F_z deve ser vista como uma série de potências, centrada em z , e G_z como uma série de potências centrada em zero multiplicada por uma constante.

Considerando novamente $I = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, e 0 como ponto aderente a I temos de (5.23) que $F_z(w) = G_z(w)$ para todo $w \in I$. Aplicando novamente o Teorema 5.47, concluímos que $F_z(w) = F_z(w)$ para todo $w \in \mathbb{C}$. Como z é arbitrário podemos afirmar que vale então a seguinte identidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}. \quad (5.24)$$

Observação. Apesar deste exercício usar um exemplo simples para mostrar como se aplicam as técnicas de extensão analíticas, só faz sentido ter escolhido este e não outro, porque ainda não provamos que a exponencial complexa, definida anteriormente por, $\exp(z) \equiv e^x(\cos(y) + i\sin(y))$, onde $z = x + iy$, admite a representação por sua série de Taylor

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Um roteiro para prova deste fato é apresentado na lista de exercícios. Também daremos, mais a frente, outra prova deste fato no texto, após apresentarmos a Fórmula Integral de Cauchy.

Exemplo 5.50. Um dos exemplos mais instrutivos sobre extensões analíticas é dado pela série geométrica. Como sabemos a série geométrica em \mathbb{C} pode ser vista como uma série de potências, centrada em zero e de raio de convergência $R = 1$. Esta série define uma função analítica $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Por outro lado, considere a função $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Também sabemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Em outras palavras, a igualdade acima diz que $f = g|_{\mathbb{D}}$. Ou seja, g é uma extensão de f . Procedendo analogamente ao Exemplo 5.41 podemos mostrar sem dificuldades que a função $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica. Então o que a igualdade acima nos diz é que f admite uma (única - Corolário 5.48) extensão analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Obviamente podemos calcular $g(3)$, substituindo o número complexo 3 na expressão $1/(1-z)$, pois 3 é um ponto do domínio de g . Mas apesar de g ser uma extensão de f , **não** faz nenhum sentido falar em $f(3)$ muito menos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = f(3) = g(3) = -\frac{1}{2}.$$

Este tipo de confusão geralmente é causado pelo frequente abuso de notação de denotar f e sua extensão pelo mesmo símbolo. Esta não é uma prática ruim, mas devemos ter sempre em mente que dependendo do ponto em que vamos calcular a extensão, devemos ser cuidadosos e não usar a expressão algébrica da função f inicialmente dada. Compreender precisamente esta diferença é ainda mais fundamental para lidar com casos onde a extensão é obtida por algum argumento abstrato de existência. Vamos discutir este assunto mais profundamente e apresentar outros exemplo mais à frente.

Observação 5.51. No exemplo acima mostramos que $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

admite uma extensão analíticas à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Por outro lado, vimos no Exemplo 5.22 que a série acima diverge para todo $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. Mas observe que para todo $z \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ a função g é contínua em todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Em particular, se $z_0 \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ temos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_0} = g(z_0).$$

Logo o limite acima existe por qualquer caminho. Então podemos tomá-lo por pontos que estão no interior do disco unitário. Dentro do disco unitário sabemos que $f = g$, logo temos

$$\frac{1}{1-z_0} = g(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathbb{D}}} g(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathbb{D}}} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathbb{D}}} \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Todas as igualdades acima são realmente válidas. Mas por que, já que g é um extensão analítica (portanto contínua) de f , agora não temos uma contradição com o fato da série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ divergir em z_0 e ao mesmo tempo $g(z_0)$ estar bem definido? Isto é, o que tem de errado em concluir da igualdade acima (absolutamente correta) que

$$\text{bem definido} \longrightarrow g(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n \longleftarrow \text{diverge}.$$

Refraseando a pergunta. Por que a existência de uma extensão analítica para a série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, à todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, em particular, à todo disco unitário, exceto $z = 1$ não conflita com o fato da série ser divergente em todo ponto do bordo do disco unitário?

Lista 5

1. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.
2. Mostre que, se $|\alpha| < 1$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^n = 0$.
3. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[i + \left(\frac{2+3i}{5} \right)^n \right]$.
4. Existe o seguinte limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[i + \left(\frac{2+3i}{5} \right)^n \right]$?
5. Calcule

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(ni)}{ni} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ni}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^i]{ni}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^i]{n}. \end{array}$$

6. Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ diga se cada uma das seqüências converge ou diverge e, se convergir, determine o limite:

$$\alpha^n, \quad n\alpha^n, \quad \frac{\alpha^n}{n}, \quad \sqrt{n} (\sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n})$$

7. Suponha que $|\alpha| < |\beta| < 1$. Existe o limite $\sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$?
8. Suponha que $1 < |\alpha| = |\beta|$. Mostre que, se a seqüência $\alpha^n - \beta^n$ é limitada, então $\alpha = \beta$.
9. Existem os seguintes limites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi i) \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} ni \operatorname{sen} \left(\frac{\pi i}{n} \right) ?$$

10. Mostre que as séries abaixo divergem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ni} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+i}.$$

11. Determine o raio de convergência de cada uma das séries abaixo:

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3i)^n} (z-1)^n, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{11^{n+2i}}{n!} z^n, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2i}}{2^n} (z-\pi)^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(4+3i)^n} z^n, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n}{(5+i)^n} (z+2)^n, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(ni)} z^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{ni}} z^n, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{3i}} z^n, & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{ni}}{i(2n)!} z^n, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^n, & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n, & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n} z^n, & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} z^n, \end{array}$$

12. Mostre usando o produto de séries que se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ então

$$\frac{1}{1-z} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + \dots + a_n) z^n.$$

13. Mostre que

- $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z+z^2}{(1-z)^2}.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z+4z^2+z^3}{(1-z)^4}.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n = \frac{z+11z^2+11z^3+z^4}{(1-z)^5}.$

14. Seja $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ um polinômio e considere a sequência $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n) z^n$$

é uma função racional.

Dica: comece considerando monômios, isto é, séries da forma $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$. Para estes casos inspire-se no exercício anterior.

15. Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ na qual os coeficientes se repetem ciclicamente, $a_{n+k} = a_n$, onde n é qualquer e k um inteiro positivo fixado. Calcule seu raio de convergência e sua soma.

16. Seja

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad \text{onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f converge para todo $|z| < 1$ e que $f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}$. Conclua daí que $[(1+z)^\alpha f(z)]' = 0$ e que $f(z) = (1+z)^\alpha$. Este resultado pode ser generalizado para $\alpha \in \mathbb{C}$?

17. Use os resultados do apêndice sobre o raio de convergência, do livro texto, para calcular o raio de convergência das seguintes séries:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n z^{n^2}.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^{n^2}.$

Módulo 2

Semana 6

“At the basis of the distance concept lies, for example, the concept of a convergent point sequence and their defined limits, and one can, choosing these ideas as those fundamental to the point set theory, eliminate the notions of distance ... Thirdly, we can associate with each point of the set certain parts of the space called neighborhoods, and these can again be made building stones of the theory with the elimination of the distance concept. Here the view of a set is in consideration of the association between elements and subsets.”

—F. Hausdorff, 1949

6.1 A Integral Complexa

Em construção...

6.2 Primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo

Em construção...

Lista 6

1. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um caminho suave inteiramente contido em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo dado por $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Fazendo a identificação natural de U com um subconjunto do plano complexo podemos observar que o campo vetorial F induz uma função complexa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ contínua. Usando a definição escreva a integral de linha de F e em seguida a integral complexa de f . Explique quais são as diferenças entre estes conceitos.
2. A função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2$ induz um campo de vetores F em \mathbb{R}^2 . Descreva este campo em coordenadas, em seguida calcule a integral de linha (real), e a integral complexa deste campo, ao longo do círculo unitário no sentido anti-horário.
3. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo contendo a origem e $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua (não necessariamente holomorfa). Para cada $r > 0$ fixado considere a curva suave $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\gamma_r(t) = re^{it}$. Mostre que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{h(z)}{z} dz = 2\pi i h(0).$$

(Dica: use a técnica apresentada na prova do Teorema de Cauchy-Goursat.)

4. Sejam R um retângulo contido em um domínio estrelado $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Mostre que

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0.$$

5. O objetivo deste exercício é provar que a transformada de Fourier da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-\pi x^2}$ é ela mesma.

Primeiro lembramos que a transformada de Fourier desta função é definida para cada $\xi \in \mathbb{R}$ pela expressão

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x \xi} dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{2\pi i x \xi} dx.$$

Para calcular a transformada de Fourier acima vamos precisar usar o seguinte fato bem-conhecido

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx = 1$$

e seguir os seguintes passos:

- Mostre que basta considerar $\xi \geq 0$, isto é, $\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, para todo $\xi \geq 0$.
- Para cada $R, \xi > 0$, considere o contorno γ_R consistindo do retângulo no plano complexo cujos os vértices são os pontos $R, R + i\xi, -R + i\xi, -R$. Faça o esboço deste contorno;
- Defina a função $g(z) = e^{-\pi z^2}$ e mostre que é possível usar o exercício anterior para calcular a integral $\int_{\gamma_R} g(z) dz$ para cada $R > 0$;
- Sejam $I_1(R)$ e $I_2(R)$ as integrais da função g ao longo dos segmentos de reta unindo os pontos R à $R + i\xi$ e $-R$ à $-R + i\xi$, respectivamente. Mostre que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $|I_1(R)| \leq C_1 e^{-\pi R^2}$ e que $|I_2(R)| \leq C_2 e^{-\pi R^2}$.
- Conclua que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = f(\xi).$$

6. Calcular $\int_{\gamma} f(z) dz$, onde

- $f(z) = z\bar{z}$ e $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = \frac{1}{4}e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- $f(z) = \frac{z+1}{z}$ e $\gamma(t) = 5i + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2}$ e $\gamma(t) = 2 + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2}$ e $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
- $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$ e γ é o quadrado de vértices $0, 1, 1+i$ e i , orientado no sentido anti-horário.

Referências Bibliográficas

- [Abb15] Abbott, S.: *Understanding analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, segunda edição, 2015.
- [Con78] Conway, J. B.: *Functions of one complex variable*, volume 11 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, second edition, 1978, ISBN 0-387-90328-3.
- [GM78] Gray, J. D. e S. A. Morris: *When is a function that satisfies the Cauchy-Riemann equations analytic?* Amer. Math. Monthly, 85(4):246–256, 1978.
- [Loo23] Loomann, H.: *Über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1923:97–108, 1923.
- [Men36] Menchoff, D.: *Les conditions de monogénéité*. Herman, Paris, 1936.
- [Mon13] Montel, P.: *Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes*. CR Acad. Sci. Paris, 156:1820–1822, 1913.
- [NN01] Narasimhan, R. e Y. Nievergelt: *Complex analysis in one variable*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, segunda edição, 2001.
- [Rud76] Rudin, W.: *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, terceira edição, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.
- [Sim15] Simon, B.: *Basic complex analysis*. A Comprehensive Course in Analysis, Part 2A. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [Soa16] Soares, M. G.: *Cálculo em uma variável complexa*, volume 9 de *Coleção Matemática Universitária*. SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, quinta edição, 2016, ISBN 978-8524401442.
- [SS03] Stein, E. e R. Shakarchi: *Complex analysis*, volume 2 de *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003, ISBN 0-691-11385-8.

Índice Remissivo

B

Binômio de Newton, 126

C

Caminho

 fechado, 37

 normalizado, 39

 reverso, 37

 simples, 39

 suave, 35

 suave por partes, 38

Comprimento

 de um caminho, 40

Condições

 de Cauchy-Riemann, 66

Conjugado, 11

Conjunto

 aberto, 30

 compacto, 32

 conexo, 34

 conexo por caminhos, 40

 fechado, 30

 limitado, 31

Convergência

 pontual, 108

Corpo, 7

Curva

 de Jordan, 39

D

Derivada

 complexa, 63

Derivadas

 parciais, 45

Desigualdade

 Triangular, 11, 14

Disco

 aberto, 29

 de convergência, 115

 fechado, 29

 unitário, 29

Domínio, 35

E

Extensão

 analítica, 132, 146

F

Fecho, 30

Forma polar, 15

Fórmula

 De Moivre, 17

Fronteira, 31

Função

 analítica, 123

 contínua, 45, 62

 cosseno complexo, 80

 cosseno hiperbólico complexo, 81

 exponencial complexa, 77

 harmônica, 74

 holomorfa, 75

 inteira, 76

 seno complexo, 80

 seno hiperbólico complexo, 81

 zeta de Riemann, 110

I

Ínfimo, 55

Integral

 de linha em \mathbb{R}^2 , 47

Interior

 de um conjunto, 30

Isomorfismo, 8

L

Limite

- de uma função, 44
- de uma função complexa, 59
- de uma sequência, 27

M

Módulo de z , 11

O

Orientação

- compatível, 50

P

Parte imaginária, 11

Parte real, 11

Ponto

- aderente, 142
- de acumulação, 30
- inicial, 36
- interior, 29
- isolado, 30
- singular, 76
- terminal, 36

Princípio da Identidade, 142

R

Raio

- de convergência, 115

Ramo

- do argumento, 84
- do logaritmo, 89
- principal do argumento, 86
- principal do logaritmo, 89

Raíz

- n -ésima de z , 93

Raízes da unidade, 18

Regra da Cadeia, 65

S

Sequência

- convergente, 26
- de Cauchy, 28
- de funções complexas, 106
- de somas parciais, 97

Singularidade, 76

Subsequência, 32

Supremo, 54

Séries

- absolutamente convergentes, 103
- convergentes, 97
- de números complexos, 97
- de potências, 112
- de Taylor, 121, 123
- divergentes, 97
- geométricas, 103

T

Teorema

- de Green, 50

Teste

- da Integral, 99, 100
- de comparação, 98

U

Unidade imaginária, 2