Introdução à Teoria das Medidas de Gibbs

Notas de aula

R. Bissacot e L. Cioletti

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Mensuráveis

Seja Ω um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω.

Definição 1. *Uma coleção de conjuntos $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é chamada de σ-álgebra quando:*

i) $\Omega \in \mathscr{F}$;

ii) $A \in \mathscr{F} \;\Rightarrow A^c = \Omega - A \in \mathscr{F}$;

iii) $A_n \in \mathscr{F}$ $(\forall\ n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

Os conjuntos pertencentes a uma σ-álgebra são chamados de *conjuntos mensuráveis* (em relação a σ-álgebra fixada). Em livros de probabilidade muitas vezes ao invés de conjuntos mensuráveis os elementos de uma σ-álgebra são chamados de *eventos*.

Um par $(\Omega,\mathscr{F})$ onde Ω é um conjunto não vazio e $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é uma σ-álgebra é chamado de *espaço mensurável.*

Exemplo 2. *$(\Omega,\mathscr{F})$ onde $\mathscr{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.*

Exemplo 3. *Os seguintes exemplos serão importantes:(definiremos a σ-álgebra de interesse a seguir)*

$$\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}, \ \text{onde } E = \{-1,1\}, \{1,\ldots,k\}, \mathbb{N}, \mathbb{R}^{\nu}, \mathbb{S}^{\nu}.$$

Nomenclatura: Muitas vezes E é em geral chamado de *espaço dos estados*. Por exemplo, se $E = \{-1, 1\}$ os estados que estamos considerando são -1 e $+1$.

Exercício 1. *Seja* $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}$ *e considere* $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, A_1 \cup A_2, A_1^c, A_2^c, (A_1 \cup A_2)^c\}$, $A_1 = \{\sigma\}$, $A_2 = \{\omega\}$ *e* $\sigma = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$, $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$ *são as configurações definidas da seguinte forma:*

$\sigma = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$ *é a configuração tal que* $\sigma_i = +1 \ \forall \ i \in \mathbb{Z}^2$;

$\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$ *é a configuração tal que* $\omega_i = +1 \ \forall \ i \in (\mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\})$ *e* $\omega_{(0,0)} = -1$.

Mostre que $\mathscr{F}$ *é uma* σ*-álgebra.*

Exercício 2. *Seja* $(\Omega, \mathscr{F})$ *um espaço mensurável.*

i) Mostre que $A \in \mathscr{F}$ e $B \in \mathscr{F}$ *então* $A \cap B \in \mathscr{F}$;

ii) Mostre que se $A_n \in \mathscr{F}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

Dadas duas coleções de subconjuntos $\mathscr{F}, \mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ denotaremos por $\mathscr{F} \cap \mathscr{A}$ a coleção de todos os conjuntos que pertencem a ambos $\mathscr{F}$ e $\mathscr{A}$, isto é,

$$\mathscr{F} \cap \mathscr{A} = \{F : F \in \mathscr{F} \text{ e } F \in \mathscr{A}\}.$$

Exercício 3. *Se* $\mathscr{F}, \mathscr{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *são duas* σ*-álgebras de subconjuntos de* Ω*. Então* $\mathscr{F} \cap \mathscr{A}$ *é uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω.

Podemos considerar também interseções arbitrárias de coleções de subconjuntos de Ω, generalizando a definição de interseção de duas coleções da seguinte maneira. Considere $(\mathscr{F}_l)_{l \in \Gamma}$ uma coleção arbitrária tal que $\mathscr{F}_l \subset \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $l \in \Gamma$.Definimos

$$\bigcap_{l \in \Gamma} \mathscr{F}_l = \{F \subset \Omega : F \in \mathscr{F}_l \quad \text{para todo } l \in \Gamma\}.$$

Exercício 4. *Seja* Γ *um conjunto de índices arbitrário e* $(\mathscr{F}_l)_{l \in \Gamma}$ *uma coleção tal que para cada* $l \in \Gamma$, $\mathscr{F}_l \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *é uma* σ*-álgebra. Então* $\cap_{l \in \Gamma} \mathscr{F}_l$ *é uma* σ*-álgebra.*

Definição 4. *Seja Ω um conjunto arbitrário e $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ uma coleção qualquer de subconjuntos de Ω. Chamaremos de σ-álgebra gerada pela coleção $\mathscr{C}$ a menor σ-álgebra contendo $\mathscr{C}$. Notação: $\sigma(\mathscr{C})$. Em outras palavras, se $\mathscr{F}$ é uma σ-álgebra tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}$ então $\sigma(\mathscr{C}) \subseteq \mathscr{F}$.*

Exercício 5. *Sejam Ω e $\mathscr{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ arbitrários. Mostre que $\sigma(\mathscr{C})$ é a intersecção de todas as σ-álgebras contendo $\mathscr{C}$. Ou seja, mostre que*

$$\sigma(\mathscr{C}) = \bigcap_{\substack{\mathscr{F}:\mathscr{C}\subseteq\mathscr{F} \\ \mathscr{F} \text{ é } \sigma-\text{álgebra}}} \mathscr{F}.$$

Definição 5. *Uma coleção de conjuntos $\mathscr{A}$ com $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ é dita uma álgebra quando:*

i) $\Omega \in \mathscr{A}$;

ii) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$;

iii) $A \in \mathscr{A}$ e $B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$.

Exemplo 6. *Álgebra das uniões finitas de cilindros em $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}$.*

Chamaremos de *cilindros* conjuntos de configurações construídos da seguinte forma:

Fixamos um conjunto finito $\Lambda = \{i_1, i_2, ..., i_{|\Lambda|}\} \subseteq \mathbb{Z}^2$ e um estado $j_\ell \in \{-1, +1\}$ para cada um dos elementos $i_\ell \in \Lambda$ $(\ell = 1, 2, ..., |\Lambda|)$. Consideramos então o seguinte conjunto de configurações:

$$C^{i_1,i_2,...,i_{|\Lambda|}}_{j_1,j_2,...,j_{|\Lambda|}} = \{\sigma \in \Omega; \sigma_{i_1} = j_1, ..., \sigma_{i_{|\Lambda|}} = j_{|\Lambda|}\}$$

Exemplo de um cilindro: $C^{(0,0)}_{+1} = \{\sigma \in \Omega; \sigma_{(0,0)} = +1\}$, ou seja, o conjunto de todas as configurações em que o estado na posição $(0, 0)$ é $+1$.

Não é difícil de verificar que intersecção finita de cilindros é um cilindro.

Exercício 6. *Considere $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}$.*

Mostre que $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathcal{P}(\Omega);\ A = \cup_{k=1}^{\ell} C_k$ onde C_ℓ é cilindro para todo $k = 1, 2, ..., \ell\}$ é uma álgebra.

Uma das σ-álgebras que mais utilizaremos é a *σ-álgebra gerada pelos cilindros*. Muitos dos resultados à seguir serão enunciados usando o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ onde $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ e

$\mathcal{F} = \sigma(\mathscr{C})$ onde $\mathscr{C}$ é o conjunto dos cilindros.

Outro tipo de σ-álgebra, na verdade, são sub-σ-álgebras da σ-álgebra gerada pelos cilindros são as σ-álgebras geradas por cilindros tais que os sítios(elementos de $\mathbb{Z}^d$) onde os estados estão fixados são exatamente os elementos de um conjunto $S \subseteq \mathbb{Z}^d$. Para este tipo de σ-álgebra usaremos a notação $\mathcal{F}_S$. Em muitos dos argumentos que virão S será um conjunto finito de $\mathbb{Z}^d$, possivelmente uma retângulo centrado na origem, ou o complementar deste. Nestes casos usaremos a notação $\mathcal{F}_\Lambda$ e $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$, respectivamente. Ou seja:

Os cilindros $C^i_j = \{\sigma \in \Omega; \sigma_i = j \text{ e } i \in \Lambda\}$ geram a σ-álgebra $\mathcal{F}_\Lambda$. Isso significa que tomando $\mathscr{C}_\Lambda = \{C^i_j; i \in \Lambda \text{ e } j \in \{-1, +1\}\}$ teremos $\mathcal{F}_\Lambda = \sigma(\mathscr{C}_\Lambda)$. O análogo vale para $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$.

1.2 Espaços métricos

Definição 7. *Um par ordenado (Ω, d) onde Ω é um conjunto e $d : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$ é chamado de espaço métrico quando:*

i) $d(\sigma, \omega) = 0$ se, e somente se, $\sigma = \omega$;

ii) $d(\omega, \sigma) = d(\sigma, \omega)$ para quaisquer $\omega, \sigma \in \Omega$ (simétrica);

iii) $d(\omega, \sigma) \leq d(\omega, \delta) + d(\delta, \sigma)$ para todo $\omega, \sigma, \delta \in \Omega$ (desigualdade triangular).

Exemplo 8. $\Omega = \mathbb{R}$ *e* $d(x, y) = |x - y|$.

Exemplo 9. $\Omega = \mathbb{Z}^d$ *e* $d'(i, i') = \sum_{k=1}^{d} |i_k - i'_k|$, *onde* $i = (i_1, i_2, ..., i_d)$.

Exercício 7. *Considere* $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ *e* $d : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$ *dada por*

$$d(\sigma, \sigma') = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{2^{\|i\|}} |\sigma_i - \sigma'_i|.$$

Mostre que (Ω, d) é um espaço métrico.

Atenção: Neste exemplo estamos usando a mesma letra d para denotar a dimensão da rede hipercúbica $\mathbb{Z}^d$ e a métrica em Ω.

Definição 10. *Seja $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em um espaço métrico (Ω, d). Dizemos que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento $\sigma \in \Omega$ quando* $\lim\limits_{n\to\infty} d(\sigma_n, \sigma) = 0$.

Definição 11. *Seja (Ω, d) um espaço métrico, um subconjunto $K \subseteq \Omega$ é dito compacto se toda sequencia $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos em K possui pelo menos uma subsequência $(\sigma_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge para algum elemento de K.*

Exercício 8. *Seja E um dos conjuntos listados no exemplo 3, $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ e $d_1 : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty)$ dada por*

$$d_1(\sigma, \sigma') = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sup\{\|i\|;\ \sigma_j = \sigma'_j\ \forall j \in\ \mathbb{Z}^d \text{ tal que } \|j\| < \|i\|\}}$$

a) Mostre que d_1 define uma métrica em $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$.

b) Mostre que se $E = \{-1, 1\}$ e d é a métrica do exemplo 7 então existem constantes positivas c, C tais que

$$c.d_1(\sigma, \sigma') \leq d(\sigma, \sigma') \leq C.d_1(\sigma, \sigma') \qquad \forall\ \sigma, \sigma' \in \Omega = E^{\mathbb{Z}^d}.$$

c) Mostre o mesmo resultado do item (b) para o caso onde E é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}$. Obs: As constantes c e C podem depender do espaço Ω (do espaço de estados E, da dimensão d etc).

d) Prove que se $E = \{-1, 1\}$ e $A \subseteq \Omega$ então A é aberto em (Ω, d) se, e somente se, A é aberto em (Ω, d_1).

e) Mostre que (Ω, d_1) é um espaço métrico compacto.
Sugestão: *O fato de $\mathbb{Z}^d$ ser um conjunto enumerável permite que se possa fazer um argumento estilo "diagonal de Cantor"para obter uma subsequência.*

Funções mensuráveis e a σ-álgebra de Borel

Se (Ω, d) é um espaço métrico podemos usar a métrica d para definir bolas em Ω. De maneira mais precisa chamamos de bola aberta de centro σ e raio $r > 0$ o conjunto

$$B_r(\sigma) = \{\omega \in \Omega; d(\sigma, \omega) < r\}.$$

Analogamente definimos a bola fechada de centro σ e raio $r > 0$ como sendo o conjunto

$$\overline{B_r(\sigma)} = \{\omega \in \Omega; d(\sigma, \omega) \leq r\}.$$

Definição 12. *Seja (Ω, d) um espaço métrico. Um conjunto $A \subseteq \Omega$ é chamado de aberto quando para qualquer que seja $\sigma \in A$ existir um real positivo $r > 0$ (que pode depender de σ) tal que $B_r(\sigma) \subseteq A$. Obs: É um exercício mostrar que a bola aberta é um conjunto aberto.*

Exercício 9. *Mostre que se* $E = \{-1, 1\}$ *então os cilindros do espaço* $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ *são conjuntos abertos no espaço métrico* (Ω, d_1).

Definição 13. *Seja* (Ω, d) *um espaço métrico. A* σ*-álgebra de Borel de* Ω *é a* σ*-álgebra gerada pela coleção de todos os abertos de* Ω. *O elementos desta* σ*-álgebra são chamados de borelianos.*

Exemplo 14. *Tome* $\Omega = \mathbb{R}$ *com* $d(x, y) = |x - y|$ *e seja* $\mathfrak{B}$ *a* σ*-álgebra de borel dos reais, aqui as bolas abertas são os intervalos abertos. É sabido que todo aberto de* $\mathbb{R}$ *pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos de* $\mathbb{R}$ *e, sendo assim, se* $B = \{B_r(x);\ x \in \mathbb{R} \text{ e } r > 0\}$*(conjunto das intervalos abertos de* $\mathbb{R}$*) então* $\mathfrak{B} \subseteq \sigma(B)$. *Isso porque todo elemento de* $\mathfrak{B}$ *é união enumerável de elementos de* B, *portanto é um elemento da* σ*-álgebra* $\sigma(B)$ *já que ela contém os elementos de* B. *Por outro lado, já vimos que toda bola aberta (aqui intervalo) é um conjunto aberto donde* $B \subseteq \mathfrak{B}$, *e assim conclui-se que* $\sigma(B) \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \sigma(B)$ *já que* $\sigma(B)$ *é a menor* σ*-álgebra que contém* B. *Isso mostra que a* σ*-álgebra de borel dos reais coincide com a* σ*-álgebra gerada pelas bolas abertas* $\sigma(B)$.

Outra coleção de conjunto que podemos usar para gerar a σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}$ é a coleção $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, onde $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}; x > \alpha\}$ de fato:

Exercício 10. *Mostre que se* $\mathfrak{B}$ *é a* σ*-álgebra de borel dos reais então* $\mathfrak{B} = \sigma(\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}})$.

Exercício 11. *Mostre que se* $E = \{-1, 1\}$ *então a* σ*-álgebra de borelianos do espaço métrico* $(E^{\mathbb{Z}^d}, d_1)$ *coincide com a* σ*-álgebra gerada pelos cilindros deste espaço.*

Definição 15. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F})$ *e* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *dois espaços mensuráveis. Uma função* $f : \Omega \to \Omega'$ *é chamada de função mensurável quando* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ *para todo conjunto* $A \in \mathcal{F}'$. *Em palavras: a imagem inversa de um conjunto* $\mathcal{F}'$*-mensurável deve ser* $\mathcal{F}$*-mensurável.*

Quando estivermos no caso onde $\Omega' = \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}'$ for a σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}$ é comum chamar uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de *variável aleatória*. Quando não explicitarmos que é a σ-álgebra do contra-domínio estamos assumindo que estamos considerando os borelianos de $\mathbb{R}$.

Proposição 16. *Sejam* $(\Omega, \mathcal{F})$ *e* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *espaços mensuráveis tais que* $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C})$ *para alguma coleção* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* Ω'. *Seja* $f : \Omega \to \Omega'$, *se* $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ *para todo elemento de* $\mathcal{C}$ *então* f *é mensurável.*

Prova. Pedro Fernandez pág. 51.

Essa proposição é importante pois nos diz que para verificar se uma função é mensurável basta conhecer um conjunto que gere a σ-álgebra do espaço de chegada e verificar se suas pré-imagens são elementos da σ-álgebra do conjunto domínio.

Exemplo 17. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F})$ *onde* $\mathcal{F}$ *é a* σ*-álgebra gerada pelos cilindros de* $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$. *Se* $i \in \mathbb{Z}^d$ *é um elemento fixo(arbitrário) de* $\mathbb{Z}^d$ *e* $\pi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *é definida por* $\pi_i(\sigma) = \sigma_i$ *então* π_i *é mensurável.*

Prova. Pelo exercício 10 e pela proposição 16 basta mostrarmos que $\pi_i^{-1}(B_\alpha)$ pertence à σ-álgebra gerada pelos cilindros para todo α real. Dividindo em casos:

a) Se $\alpha \geq +1$ então $\pi_i^{-1}(B_\alpha) = \emptyset \in \mathcal{F}$ pois o vazio sempre está em qualquer σ-álgebra.

b) Se $+1 > \alpha \geq -1$ então

$$\pi_i^{-1}(B_\alpha) = \{\sigma \in \Omega;\ \pi_i(\sigma) = \sigma_i > \alpha \geq -1\} = \{\sigma \in \Omega; \sigma_i = +1\} = C_{+1}^i$$

que é um cilindro e portanto pertence à $\mathcal{F}$.

c) Se $-1 > \alpha$ então $\pi_i^{-1}(B_\alpha) = \{\sigma \in \Omega;\ \pi_i(\sigma) = \sigma_i > \alpha\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

Portanto, π_i é mensurável.

$\square$

Proposição 18. *Seja* $(\Omega, \mathcal{F})$ *um espaço mensurável. Se* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *são funções mensuráveis e* α *é um número real então as seguintes funções também são mensuráveis:*

$$\alpha.f, f^2, |f|, f + g, f^+, f^-, f.g.$$

Prova. Pode ser encontrada em qualquer livro de teoria da medida.

Capítulo 2

Integração e Medidas de Gibbs em Conjuntos Finitos

Definição 19 (Medida)**.** *Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável. Uma função $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ é uma medida em $\mathscr{F}$ se satisfaz as seguintes condições:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

ii) para toda coleção $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos disjuntos de $\mathscr{F}$ temos $\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

Se não houver perigo de confusão sobre qual σ-álgebra de subconjuntos de Ω estamos considerando, podemos dizer simplesmente que μ é uma medida em Ω.

Quando uma função μ definida sobre uma coleção de subconjuntos de um espaço Ω satisfaz a propriedade *ii*), da definição acima, dizemos que μ é contavelmente aditiva.

A tripla $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, onde $(\Omega, \mathscr{F})$ é um espaço mensurável e μ é uma medida em $\mathscr{F}$ é chamado de espaço de medida.

Definição 20 (Espaço de Probabilidade)**.** *Todo espaço de medida $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ tal que $\mu(\Omega) = 1$ é chamado de espaço de probabilidade. A medida μ, neste caso, é chamada de medida de probabilidade. Um elemento $E \in \mathscr{F}$ é chamado de evento e $\mu(E)$ é chamada probabilidade de E ou também a probabilidade de ocorrer o evento E.*

Exercício 12. *Mostre que se $\Omega = \mathbb{N}$ e $\mathscr{F}$ é a σ-álgebra das partes de Ω, então a função $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ cuja a imagem de um subconjunto $E \subset \Omega$ é dada por*

$$\mu(E) = \sharp E$$

é uma medida em $\mathscr{F}$. Esta medida é chamada de medida da contagem em $\mathbb{N}$.

Exercício 13. *Seja Ω um conjunto enumerável não vazio, $\mathscr{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $f : \Omega \to [0, +\infty]$ uma função arbitrária. Mostre que a fórmula*

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x),$$

determina uma medida em $\mathscr{F}$.

No exercício acima se a função f é tal que $f(\omega) = 1$ para todo $\omega \in \Omega$ então dizemos que μ é a medida da contagem. Outro exemplo importante de medida são as chamadas medidas de Dirac. A medida de Dirac em ω_0 é a medida fornecida pelo exercício acima tomando a função f definida por

$$f(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega = \omega_0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação. Quando μ é uma medida de Dirac em ω_0 é comum denotar esta medida por δ_{ω_0}. A medida $\delta_{\omega_0} : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ é tal que para todo $E \subset \Omega$ temos $\delta_{\omega_0}(E) = 1$ se $\omega_0 \in E$ e $\delta_{\omega_0}(E) = 0$ caso contrário.

As restrições das medidas de Dirac em ω_0 e de contagem à sub-σ-álgebras da σ-álgebra das partes de Ω são também chamadas de medida de Dirac em ω_0 e de contagem, respectivamente.

Exercício 14. *Seja Ω um conjunto infinito e $\mathscr{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Considere a função $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ dada por*

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty, & \textit{se } E \textit{ é infinito}; \\ 0, & \textit{se } E \textit{ é finito}. \end{cases}$$

Mostre que μ é aditiva, isto é, para toda coleção finita $E_1, \ldots, E_k$ de conjuntos disjuntos de Ω, temos $\mu(\cup_{j=1}^{k} E_j) = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j)$, porém μ não é σ-aditiva e portanto μ não é uma medida em $\mathscr{F}$.

Exercício 15. *Sejam $k \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{1, \ldots, k\}$ e $\mathscr{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Mostre que $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ definida por*

$$\mu(E) = \frac{\sharp E}{k}$$

é uma medida de probabilidade.

Exemplo 21. *Sejam $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ é um conjunto não vazio finito de cardinalidade k e $p_1, \ldots, p_k$ números reais positivos tais que $p_1 + \ldots + p_k = 1$. Vamos tomar $\mathscr{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se para cada $E \subset \Omega$ definimos*

$$\mu(E) = \sum_{\{j;\ \omega_j \in E\}} p_j$$

então μ é uma medida de probabilidade em $\mathscr{F}$.

Exercício 16. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida e* $E, F \in \mathscr{F}$. *Se* $E \subset F$ *mostre que* $\mu(E) \leq \mu(F)$.

2.1 Conceitos Básicos de Medida e Integração de Funções Simples

Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ é simples se a imagem de f é um conjunto finito. Seja $E \subset \Omega$. A função $\chi_E : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in E; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

será chamada de função característica de E. Observamos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável simples que assume k valores pode ser representada unicamente da seguinte forma

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j},$$

onde $a_j \in f(\Omega)$, $E_j \in \mathscr{F}$, $E_r \cap E_s = \emptyset$ se $r \neq s$, $\cup_{j=1}^{k} E_j = \Omega$, $f|_{E_j} \equiv a_j$ e $a_s \neq a_r$ se $s \neq r$. Esta representação é conhecida como representação padrão.

Definição 22. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f : \Omega \to [0, +\infty]$ *uma função* $\mathscr{F}$ *mensurável simples assumindo* k *valores. Se a representação padrão de* f *é dada por* $f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j}$ *então definimos a integral de* f *em* Ω *com respeito a* μ *como sendo*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(E_j)$$

Observe que se f é uma função mensurável simples não negativa então $\int_\Omega f d\mu$ está sempre bem definido como um elemento em $\overline{\mathbb{R}}$. Diremos que f é integrável se $\int_\Omega f d\mu < +\infty$.

Exercício 17. *Se* $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ *são funções mensuráveis simples mostre que*

$$\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$$

A partir da definição acima podemos definir a integral de uma função simples f que assume valores em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ou $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Para isto vamos considerar a seguinte decomposição de

$f = f^+ - f^-$, onde $f^+(\omega) = \max\{0, f(\omega)\}$ e $f^- = \max\{0, -f(\omega)\}$. Pode-se verificar que f^+ e f^- são mensuráveis e portanto podemos definir

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu.$$

2.2 Exemplo de Medida de Gibbs Definidas Sobre Conjuntos Finitos

A seguir introduzimos uma importante classe de medidas que terão papel muito importante no desenrolar deste texto. Para fixar as ideias em toda esta seção $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ será um conjunto arbitrário não vazio de cardinalidade $k \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as medidas de probabilidade que podemos definir sobre $\mathscr{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, isto é,

$$\mathcal{M} = \{\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]; \mu \text{ é uma medida de probabilidade}\}$$

Neste caso, já que Ω tem cardinalidade k, existe uma bijeção entre os elemento de $\mathcal{M}$ e os elementos do conjunto

$$\left\{ (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{R}^n;\ p_j \geq 0 \text{ para todo } j = 1, \ldots, k \text{ e } \sum_{j=1}^{k} p_j = 1 \right\}.$$

De fato, a aplicação $\mu \mapsto (p_1, \ldots, p_k)$, onde $p_j = \mu(\{\omega_j\})$ é uma bijeção.

Exercício 18. *Prove a afirmação acima.*

Em vista desta afirmação vamos usar nesta seção a seguinte identificação $\mu = (p_1, \ldots, p_k)$.

Definição 23 (Entropia de uma Medida)**.** *A entropia da medida $\mu = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{M}$ é definida como sendo o número real*

$$h(\mu) = -\sum_{j=1}^{k} p_j \log p_j,$$

onde log *denota a função logaritmo na base e.*

Na sequência apresentamos uma motivação para a definição da entropia de uma medida μ e também uma de suas propriedades importantes. Seja $E \subset \Omega$. Já que estamos considerando a σ-álgebra das partes de Ω o conjunto E pode ser visto como um evento no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Suponha que estamos interessados em associar a este evento E um número real não-negativo I_E que possa ser interpretado como uma quantidade de informação. Se exigimos que I_E dependa apenas de $\mu(E) = \sum_{\omega\in E}\mu(\{\omega\})$ e que esta dependência seja contínua quando variamos μ em $\mathcal{M}$ e adicionalmente exigimos que $I_{E\cap F} = I_E + I_F$ sempre que E e F sejam eventos independentes com respeito a μ, isto é, $\mu(E\cap F) = \mu(E)\cdot\mu(F)$ a única possível escolha é $I_E = -\log\mu(E)$, onde este logaritmo pode ser tomado em qualquer base. Por conveniência vamos trabalhar sempre com logaritmo natural. O valor médio da quantidade de informação dos eventos elementares (dos conjuntos unitários) é dado por

$$\sum_{\omega\in\Omega} I_{\{\omega\}}\mu(\{\omega\})$$

em outras palavras, esta é a quantidade de informação que ganhamos sobre nosso sistema fazendo observações sucessivas supondo que os resultados possíveis das nossas observações sejam $\{\omega_1,\ldots,\omega_k\}$ e que a probabilidade de ocorrência de cada um destes resultados é determinada por μ. Usando a identificação $\mu = (p_1,\ldots,p_k)$ e que $I_{\{\omega_j\}} = -\log\mu(\{\omega_j\}) = -\log p_j$ obtemos imediatamente uma interpretação de $h(\mu)$.

Olhando para a entropia como uma função $h : \mathcal{M} \to [0,\infty)$, na proposição abaixo mostramos que h é uma função uniformemente limitada e que assume máximo em um ponto do conjunto $\mathcal{M}$. Para facilitar o enunciado da proposição definimos a função $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = \begin{cases} -t\log t, & \text{se } t\in(0,+\infty); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

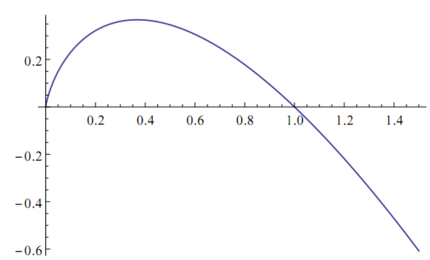

Figura 2.1: Gráfico de φ

Definição 24 (Conjunto Convexo)**.** *Um subcojunto C de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$ é convexo se, para todo $v,w\in C$ e para todo $t\in[0,1]$ temos $tv+(1-t)w\in C$. Em outras palavras, todos os pontos no segmento de reta unindo v a w estão em C.*

Exercício 19. *Mostre que se C é um conjunto convexo para quaisquer $v_1,\ldots,v_n\in C$ e quaisquer números não negativos $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tais que $\lambda_1+\ldots+\lambda_n = 1$ então o vetor $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \in C$.*

Definição 25 (Função Convexa). *Seja C um conjunto convexo. Uma função $f : C \to \mathbb{R}$ é convexa se para todo $v, w \in C$ e $t \in [0,1]$ temos $f(tv + (1-t)w) \leq tf(v) + (1-t)f(w)$.*

O leitor deve estar atento ao fato de que só faz sentido dizer que uma função é convexa caso seu domínio seja um conjunto convexo. A partir de agora sempre que nos referirmos a este tipo de função estará implícito que seu domínio é um conjunto convexo.

Definição 26 (Função Concava). *Seja C é um conjunto convexo. Dizemos que uma função $f : C \to \mathbb{R}$ é concava se $(-f)$ é uma função convexa.*

Exercício 20. *Sejam C um conjunto convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ função convexa. Suponha que $v_1, \ldots, v_n \in C$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são número reais não negativos tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Então $f(\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n) \leq \lambda_1 f(v_1) + \ldots \lambda_n f(v_n)$.*

Exercício 21. *Mostre que a função φ é uma função contínua e concava, em seguida observe que é válida a seguinte igualdade $h(\mu) = \sum_{j=1}^{k} \varphi(\mu(\{\omega_j\}))$.*

Exercício 22 (Desigualdade de Jensen). *Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função concava. Suponha que $x_1, \ldots, x_n \in [0, +\infty)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sejam números reais não negativos tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Então*

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \leq f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right)$$

Proposição 27. *Se $\mu^* = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})$ então para qualquer $\mu \in \mathcal{M}$ temos*

$$h(\mu) \leq h(\mu^*) = \log k.$$

Prova. Pela Desigualdade de Jensen temos que

$$\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \varphi(\mu(\{\omega_j\})) \leq \varphi\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \mu(\{\omega_j\})\right) = \varphi\left(\frac{1}{k}\right)$$

logo

$$h(\mu) = \sum_{j=1}^{k} \varphi(\mu(\{\omega_j\})) \leq k \cdot \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = h(\mu*) = \log k.$$

$\square$

2.3 Principio Variacional - Espaços Finitos

Suponha que um observador esteja interessado em obter informação sobre o resultado de um experimento aleatório cujos possíveis resultados sejam elementos do conjunto $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Se por algum motivo sabemos que o resultado deste experimento é sempre o elemento ω_1 a descrição estatística da realização deste experimento pode ser feita pela medida de probabilidade $\nu = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{M}$. Neste caso em que temos conhecimento completo sobre a realização do experimento a medida de probabilidade que modela seu comportamento estatístico tem entropia nula e consequentemente mínima, verifique isto. A situação oposta a esta ocorre quando não temos a priori nenhuma informação sobre o sistema. Assim a descrição estatística mais "honesta" para os possíveis resultados deste experimento deve ser feita usando a medida de probabilidade $\mu^* = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})$. Agora que estamos supondo que não há nenhum conhecimento inicial sobre o sistema a medida de probabilidade que modela seu comportamento estatístico tem entropia máxima, como mostra a proposição acima. Relembrando que a entropia pode ser interpretada como a quantidade média de informação que ganhamos sobre o sistema a cada nova realização do nosso experimento é natural pensar que a medida de probabilidade $\mu \in \mathcal{M}$ que será usada para descrever estatisticamente nosso sistema deve ter entropia cada vez menor a medida que alguma informação a priori sobre o sistema seja adicionada.

Se estivermos interessados em criar um modelo probabilístico que descreva estatisticamente os estados de equilíbrio de um determinado sistema físico do qual não temos nenhum conhecimento, a não ser que o número de alternativas dos estados de equilíbrio é k, nossa melhor alternativa é descreve-lo através da medida $\mu^* = (\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k})$, ou em outras palavras, dizer que qualquer um dos estados de equilíbrio é equiprovável. Neste tipo de situação onde estamos lidando com um sistema físico, é comum termos alguma informação adicional sobre seus os estados de equilíbrio $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ como, por exemplo, a energia que pode ser pensada como uma função $U : \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \to \mathbb{R}$. Observações empíricas de diversos sistemas físicos mostram que boas descrições probabilísticas são aquelas em que os estados mais prováveis de equilíbrio do sistema são aqueles de mais baixa energia. Considerando esta observação e a discussão feita acima sobre a interpretação da entropia somos imediatamente motivados a estudar o seguinte problema variacional: encontrar uma medida $\mu \in \mathcal{M}$ que realiza o supremo na expressão abaixo

$$\sup_{\nu \in \mathcal{M}} \left[h(\nu) - \int_\Omega U d\nu \right].$$

Em outras palavras, dada uma função de energia $U : \Omega \to \mathbb{R}$ queremos saber se existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}$ satisfazendo a seguinte equação

$$h(\mu) - \int_\Omega U d\mu = \sup_{\nu \in \mathcal{M}} \left[h(\nu) - \int_\Omega U d\nu \right].$$

O teorema apresentado logo abaixo responde afirmativamente esta pergunta e nos fornece explicitamente a medida que resolve este problema variacional.

Teorema 28. *Sejam $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ um conjunto não vazio, $U : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária e $\mathcal{M}$ como definido acima. Então*

$$\sup_{\nu \in \mathcal{M}} \left[h(\nu) - \int_\Omega U d\nu \right] = \log Z,$$

onde $Z = \sum_{\omega \in \Omega} e^{-U(\omega)}$ e além do mais este supremo é atingido pela medida $\mu \in \mathcal{M}$ dada por

$$\mu(\{\omega\}) = \frac{e^{-U(\omega)}}{Z}.$$

Prova. Seja $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x_1, \ldots, x_k) = -\sum_{j=1}^{k} \Big[x_j \log x_j + K_j x_j \Big],$$

onde $K_j = U(\omega_j)$. Defina a função $g : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}$ por $g(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + \ldots + x_k$. Vamos agora fixar uma enumeração de Ω e escolher $K_i = U(\omega_i)$ para $i = 1, \ldots, k$. Usando a identificação $\mu = (p_1, \ldots, p_k)$ segue diretamente das definições de entropia e de integral que problema de encontrar um ponto em $\mathcal{M}$ que realize o supremo

$$\sup_{\nu \in \mathcal{M}} \left[h(\nu) - \int_\Omega U d\nu \right]$$

é equivalente a encontrar um ponto de máximo global de f restrito a $[0, +\infty)^k \cap g^{-1}(1)$.

Sabemos pelo Teorema do Multiplicador de Lagrange que se $(y_1, \ldots, y_k) \in (0, \infty)^k \cap g^{-1}(1)$ é um ponto crítico de f no hiperplano $g^{-1}(1)$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(y_1, \ldots, y_k) = \lambda \nabla g(y_1, \ldots, y_k).$$

Daí segue que

$$-(\log y_j + 1 + K_j) = \lambda, \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, k.$$

Esta igualdade implica que para todo $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, temos

$$\log y_i + K_i = \log y_j + K_j.$$

Tomando a exponencial na igualdade acima obtemos

$$y_i e^{K_i} = y_j e^{K_j}. \tag{2.1}$$

Já que $\sum_{i=1}^{k} y_i = 1$ temos

$$\begin{aligned} y_i e^{-K_i} &= e^{-K_i} - e^{-K_i} \sum_{j\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}} y_j \\ &= e^{-K_i} - \sum_{j\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}} y_j e^{-K_i}. \end{aligned}$$

Agora segue de (2.1) e da igualdade acima que

$$y_i e^{-K_i} = e^{-K_i} - y_i \sum_{j\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}} e^{-K_j}.$$

Explicitando y_i na expressão acima verificamos imediatamente que qualquer ponto crítico de f no conjunto $(0,+\infty)^k \cap g^{-1}(1)$ é da forma

$$y_i = \frac{e^{-K_i}}{\sum_{j=1}^{k} e^{-K_j}}, \qquad \text{para todo } i = 1,\dots,k.$$

Note que $f(y_1,\dots,y_k)$ é exatamente

$$-\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\frac{e^{-K_i}}{\sum_{j=1}^{k} e^{-K_j}}\right)\log\left(\frac{e^{-K_i}}{\sum_{j=1}^{k} e^{-K_j}}\right) + K_i\left(\frac{e^{-K_i}}{\sum_{j=1}^{k} e^{-K_j}}\right)\right] = \log\left(\sum_{j=1}^{k} e^{-K_j}\right).$$

Um cálculo direto mostra que a matriz $\text{Hess}(f)(y_1,\dots,y_k)$ é negativa definida, logo podemos concluir que $(y_1,\dots,y_k)$ é um ponto de máximo local. Para concluir a prova de que este ponto é um ponto de máximo global precisamos agora comparar $f(y_1,\dots,y_k)$ com os valores que f assume no conjunto $\partial(0,\infty)^k \cap g^{-1}(1)$. Observe que este conjunto está contido em $\cup_{j=1}^{k} \mathscr{C}_j$, onde $\mathscr{C}_j$ é o subconjunto de $\partial(0,\infty)^k \cap g^{-1}(1)$ formado pelos pontos cuja a j-ésima coordenada é nula. Usando argumento análogo ao apresentado acima podemos verificar para todo $j = 1,\dots,k$ que

$$\max_{(x_1,\dots,x_k)\in\mathscr{C}_j} f(x_1,\dots,x_k) = \log\left(\sum_{r\in\{1,\dots,k\}\setminus\{j\}} e^{-K_r}\right) \le f(y_1,\dots,y_k)$$

e este fato encerra a prova do teorema. $\square$

A medida μ obtida no teorema acima é um exemplo de uma medida de Gibbs em Ω determinada ou associada a U.

2.4 O Modelo de Ising a Volume Finito.

Nesta seção vamos introduzir um dos modelos mais importantes que serão tratados neste texto, o chamado modelo de Ising. Vamos nos concentrar aqui no modelo de Ising a volume finito na rede hipercúbica $\mathbb{Z}^d$. Para definir este modelo inicialmente fixamos um subconjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, agora definimos o espaço de estados sendo $\Omega = \{-1, +1\}^\Lambda$. Um elemento deste espaço de estados será simplesmente denotado por σ e podemos representá-lo da seguinte maneira $\sigma = (\sigma_i)_{i\in\Lambda}$, onde $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ para todo $i \in \Lambda$. Observe que Ω tem cardinalidade $2^{|\Lambda|}$, isto é, um conjunto finito. O próximo passo é introduzir a função de energia que terá um papel semelhante a função U da seção anterior. Esta função é chamada de hamiltoniano do modelo. No caso do modelo de Ising de primeiros vizinhos a volume Λ o hamiltoniano é a função $H_\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\Lambda(\sigma) = -J \sum_{\substack{i,j\in\Lambda \\ \|i-j\|=1}} \sigma_i\sigma_j - h \sum_{i\in\Lambda} \sigma_i. \tag{2.2}$$

onde $J, h \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas. A constante J é chamada de constante de acoplamento e h de campo magnético ou campo externo. A medida de Gibbs do modelo de Ising a volume Λ e inverso da temperatura $\beta \in (0, +\infty)$ é definida em cada elemento de Ω por

$$\mu_\Lambda^\beta(\{\sigma\}) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}}{Z_\Lambda(\beta)}.$$

Como Ω é finito podemos notar que μ_Λ^β é uma medida de probabilidade que está definida na σ-álgebra das partes de Ω. Ressaltamos que a medida μ_Λ^β é a medida fornecida pelo Teorema 28 quando tomamos $U = \beta H_\Lambda$.

Exercício 23. *Considere o hamiltoniano* (2.2) *onde a constante de acoplamento e o campo externo satisfazem* $J, h > 0$. *Determine explicitamente os elementos do conjunto*

$$M = \{\sigma \in \Omega; H_\Lambda(\sigma) \leq H_\Lambda(\omega) \text{ para todo } \omega \in \Omega\}.$$

(OBS: Os elementos de M são chamados de estados fundamentais. Posteriormente introduziremos a noção de estados fundamentais em casos mais gerais)

Exercício 24. *Sob as mesmas hipóteses do exercício anterior calcule para cada $\sigma \in \Omega$ o limite* $\lim\limits_{\beta\to\infty} \mu_\Lambda^\beta(\{\sigma\})$.

Exercício 25. *Considere novamente o hamiltoniano do modelo de Ising* (2.2) *com a constante de acoplamento $J > 0$ e agora com campo externo $h < 0$. Determine todos os elementos do conjunto*

$$M = \{\sigma \in \Omega; H_\Lambda(\sigma) \leq H_\Lambda(\omega) \text{ para todo } \omega \in \Omega\}.$$

Exercício 26. *Sob as mesmas hipóteses do exercício anterior calcule para cada* $\sigma \in \Omega$ *o limite* $\lim_{\beta\to\infty} \mu_\Lambda^\beta(\{\sigma\})$.

Exercício 27. *Suponha que* $\Lambda = [-n, n]^d \cap \mathbb{Z}^d$. *Considere o hamiltoniano* (2.2) *com* $h = 0$ *e* $J = -1$. *Determine todos estados fundamentais deste sistema.*

Capítulo 3

O Limite Termodinâmico

3.1 A Integral de Funções Mensurárveis

Nesta seção vamos estender a noção de integral de Lebesgue. Como feito anteriormente vamos inicialmente mostrar como definir a integral de funções mensuráveis positivas.

Teorema 29. *Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço de medida. Se $f : \Omega \to [0, +\infty]$ é mensurável, existe uma sequência de funções simples $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ tal que para todo $\omega \in \Omega$ temos $0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \ldots \leq f(\omega)$ e $f_n(\omega) \to f(\omega)$.*

Prova. Fixe $n \in \mathbb{N}$ arbitrário e considere $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$, definimos

$$E_n^k = f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right) \qquad \text{e} \qquad F_n = f^{-1}\big((2^n, +\infty]\big).$$

Com auxilio deste conjuntos, definimos agora uma sequência de funções simples dadas por

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^{2n-1}} \frac{k}{2^n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

Segue diretamente da definição dos conjuntos E_n^k que $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Note também que se $f(\omega) \leq 2^n$ então $0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) < \frac{1}{2^n}$. Por outro lado se $f(\omega) = +\infty$ note que $f_n(\omega) = 2^n$ logo $f_n(\omega) \to +\infty$. $\square$

Observação. O leitor mais atento deve ter notado que a última estimativa apresentada na demonstração acima implica que a convergência das funções simples f_n para f é uniforme nos conjuntos onde f é limitada, isto é, dado $M > 0$ seja $\Omega_M = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \leq M\}$ então a sequência $f_n|_{\Omega_M} \to f|_{\Omega_M}$ uniformemente.

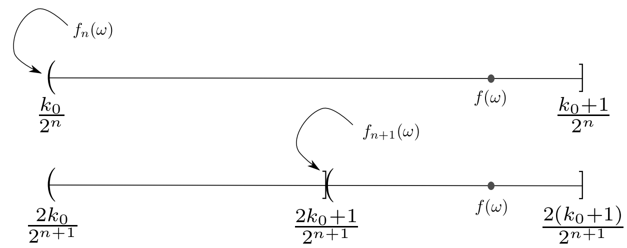

Figura 3.1: Monotonicidade da Sequência f_n.

Exercício 28. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ **funções simples** $\mathscr{F}$**-mensuráveis**. *Suponha que para todo* $\omega \in \Omega$ *temos* $g(\omega) \leq f(\omega)$. *Então mostre que*

$$\int_\Omega g \; d\mu \leq \int_\Omega f \; d\mu.$$

Definição 30 (Integral de Lebesgue)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f : \Omega \to [0, +\infty]$ *uma função mensurável. A integral de* f *em* Ω *com respeito a* μ *é definida por*

$$\int_\Omega f \; d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega g \; d\mu : 0 \leq g \leq f \; \textit{ e } g \textit{ é uma função simples} \right\}.$$

Exercício 29. *Mostre que as Definições 22 e 30 coincidem no caso em que* f *é uma função mensurável simples.*

Exercício 30. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ **funções** $\mathscr{F}$**-mensuráveis**. *Suponha que para todo* $\omega \in \Omega$ *temos* $g(\omega) \leq f(\omega)$. *Então mostre que*

a) $\displaystyle\int_\Omega g \; d\mu \leq \int_\Omega f \; d\mu$;

b) para todo $c \in [0, +\infty]$ *temos* $\displaystyle\int_\Omega cf \, d\mu = c \int_\Omega f \, d\mu$.

Teorema 31 (Convergência Monótona)**.** *Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida. Suponha que* $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ *seja uma sequência* **monótona** *de funções* $\mathscr{F}$*-mensuráveis, isto é,* $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ *para todo* $\omega \in \Omega$. *Seja* $f : \Omega \to [0, +\infty]$ *uma função definida por* $f(\omega) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$. *Então*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Corolário 32. *Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida. Suponha que* $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ *seja uma sequência de funções* $\mathscr{F}$*-mensuráveis se* $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ *então*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Um conceito fundamental na teoria da medida é o conceito de igualdade em quase todo ponto. Para ser mais preciso, sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis arbitrárias. Dizemos que $f = g$ em quase todo ponto (q.t.p.) se

$$\mu\Big(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}\Big) = 0.$$

Proposição 33. *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \to [0, +\infty]$ uma função mensurável. Então*

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0$$

se, e somente,se $f = 0$ q.t.p.

Corolário 34. *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ uma sequência funções mensuráveis tal que $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ q.t.p., isto é, $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ q.t.p. então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

A esta altura o leitor já deve ter notado que de maneira análoga a da seção anterior já estamos preparados para definir a integral de funções reais mensuráveis $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Para integral de uma função f estar bem definida precisamos apenas que pelo menos uma das duas integrais abaixo

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu \quad \text{ou} \quad \int_\Omega f^- \, d\mu \tag{3.1}$$

seja finita. Neste caso podemos definir

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu.$$

Caso ambas integrais em (3.1) sejam finitas dizemos que f é integrável. Observe que a finitude das duas integrais em (3.1) também implica que $|f|$ é integrável pois $|f| = f^+ + f^-$ e como estas funções são não negativas a prova desta afirmação é consequência imediata do Corolário 32.

Definição 35. *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Se $E \in \mathscr{F}$ definimos a integral de f em E com respeito a μ por*

$$\int_E f \, d\mu = \int_\Omega \chi_E \cdot f \, d\mu.$$

Teorema 36 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida. Suponha que* $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ *seja uma sequência de funções* $\mathscr{F}$*-mensuráveis, integráveis e que exista* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $f_n \to f$ μ*-q.t.p.. Se existe uma função integrável* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* f *é integrável e*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Exercício 31. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida e* $f : \Omega \to [0, +\infty]$ *uma função* $\mathscr{F}$*-mensurável integrável. Mostre que a aplicação* $\nu : \mathscr{F} \to [0, +\infty)$ *dada por*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu$$

é uma medida.

3.2 Compacidade fraca do Espaço de Probabilidades.

Nesta seção vamos mostrar como são construídas medidas de Gibbs em espaços da forma $E^{\mathbb{Z}^d}$, onde $E \subset \mathbb{Z}$ é um subconjunto finito arbitrário, via limite termodinâmico. A construção feita aqui será generalizada nos capítulos seguintes para o caso em que E é qualquer espaço métrico compacto.

Como estamos assumindo que E é finito, podemos mostrar que $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ com a métrica definida no Exercício 8 é um espaço métrico compacto. Seguindo a convenção adotada nas seções anteriores vamos denotar por $\mathcal{F}$ a σ-álgebra dos borelianos de Ω. Para definir medidas de Gibbs em espaços mensuráveis como $(\Omega, \mathcal{F})$ a ideia será construir uma métrica d no espaço de todas as medidas de probabilidade, que será denotado por

$$\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) := \{\mu : \mathcal{F} \to [0, 1] : \mu \text{ é medida de probabilidade.}\} \tag{3.2}$$

de forma que $(\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}), d)$ seja um espaço métrico compacto. Para dar primeiro passo na direção da construção desta métrica precisamos usar o Teorema de Stone-Weierstrass. Por simplicidade, enunciamos este teorema somente com a generalidade necessária nesta seção. Como se trata de um resultado bastante clássico de análise o leitor interessado encontrará com facilidade o enunciado deste teorema em uma forma bem mais geral, em qualquer bom livro de análise funcional.

Por toda esta seção $C(\Omega, \mathcal{F})$ denotará o espaço de todas as funções contínuas de Ω em $\mathbb{R}$, isto é, o espaço de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que para toda sequência $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Ω, satisfazendo $d_1(\omega_n, \omega) \to 0$ temos $|f(\omega_n) - f(\omega)| \to 0$. Para toda $f \in C(\Omega, \mathcal{F})$ denotamos por

$\|f\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$. A aplicação que sai de $C(\Omega,\mathcal{F})\times C(\Omega,\mathcal{F})$ dada por $(f,g)\mapsto \|f-g\|_\infty$ é uma métrica. Assim podemos olhar o espaço das funções reais contínuas definidas em Ω como um espaço métrico que será denotado simplesmente por $(C(\Omega,\mathcal{F}),\|\cdot\|_\infty)$. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{D}\subset C(\Omega,\mathcal{F})$ é denso se para toda $f\in C(\Omega,\mathcal{F})$ existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{D}$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

3.2.1 Metrizando $\mathcal{M}_1$

Definição 37 (Sub-Álgebra de Funções)**.** *Um subconjunto $\mathcal{A}\subset C(\Omega,\mathcal{F})$ é chamado de sub-álgebra de funções de $C(\Omega,\mathcal{F})$ se para toda $f,g\in\mathcal{A}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, temos que $f\cdot g\in\mathcal{A}$ e $f+\alpha g\in\mathcal{A}$.*

Definição 38. *Dizemos que uma sub-álgebra $\mathcal{A}\subset C(\Omega,\mathcal{F})$ separa pontos, se para quaisquer $\sigma,\omega\in\Omega$ existe pelo menos uma função $f\in\mathcal{A}$ tal que $f(\sigma)\neq f(\omega)$.*

Teorema 39 (Stone-Weierstrass)**.** *Se Ω é um espaço métrico compacto e $\mathcal{A}$ uma sub-álgebra de $C(\Omega,\mathcal{F})$ que possui pelo menos uma função constante não-nula. Então $\mathcal{A}$ é um conjunto denso em $C(\Omega,\mathcal{F})$ se, e somente se, $\mathcal{A}$ separa pontos.*

Já que $E\subset\mathbb{Z}$ temos uma maneira natural de definir funções polinomiais em Ω. São todas as funções que podem ser obtidas como combinações lineares com coeficientes reais de finitos produtos de projeções de Ω em $\mathbb{Z}$, por exemplo, $\sigma\mapsto\sum_{j_1=1}^{k_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{k_n} a_{j_1\cdots j_n}\,\sigma_{r_1}^{j_1}\cdot\ldots\cdot\sigma_{r_n}^{j_n}$, onde $r_1,\ldots,r_n\in\mathbb{Z}^d$. O conjunto de todas as funções polinomiais definidas em Ω será denotado por $\mathrm{Pol}(\Omega)$.

Exercício 32. *Mostre que Pol(Ω) é uma sub-álgebra de $C(\Omega,\mathcal{F})$ que separa pontos.*

Já que $\mathrm{Pol}(\Omega)$ é uma sub-álgebra de $C(\Omega,\mathcal{F})$ que separa pontos, segue do Teorema de Stone-Weierstrass que $\mathrm{Pol}(\Omega)$ é denso em $C(\Omega,\mathcal{F})$.

Exercício 33. *Usando que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, particione Pol(Ω) por subconjuntos de polinômios de grau exatamente n e mostre que o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais, notação $Pol_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ é denso em Pol(Ω). Conclua a partir deste fato, usando a desigualdade triangular para a norma $\|\cdot\|_\infty$, que $Pol_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ é denso em $C(\Omega,\mathcal{F})$.*

Do exercício acima sabemos que $\mathrm{Pol}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ é um subconjunto enumerável denso de $C(\Omega,\mathcal{F})$. Fixe uma enumeração qualquer $\{\psi_1,\psi_2,\ldots\}$ de $\mathrm{Pol}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$. Sejam $\overline{B(0,1)}$ a bola fechada unitária de $C(\Omega,\mathcal{F})$, isto é, $\overline{B(0,1)} = \{f\in C(\Omega,\mathcal{F}) : \|f\|_\infty\leq 1\}$ e $\{\phi_1,\phi_2\ldots\}\subset\{\psi_1,\psi_2,\ldots\}$ um subconjunto denso em $\overline{B(0,1)}$. Agora defina a função $d:\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})\times\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})\to\mathbb{R}$ por

$$d(\mu,\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left|\int_\Omega \phi_n\,d\mu-\int_\Omega\phi_n\,d\nu\right|.$$

Afirmamos que d é uma métrica em $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$. Uma vez que $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in \overline{B(0,1)}$, segue que $d(\mu, \nu) \leq 2$. Claramente d é uma função simétrica. Para quaisquer $\mu, \nu, \gamma \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ temos

$$\begin{aligned} d(\mu, \gamma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_\Omega \phi_n \, d\mu - \int_\Omega \phi_n \, d\gamma \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_\Omega \phi_n \, d\mu - \int_\Omega \phi_n \, d\nu + \int_\Omega \phi_n \, d\nu - \int_\Omega \phi_n \, d\gamma \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_\Omega \phi_n \, d\mu - \int_\Omega \phi_n \, d\nu \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int_\Omega \phi_n \, d\nu - \int_\Omega \phi_n \, d\gamma \right| \\ &= d(\mu, \nu) + d(\nu, \gamma). \end{aligned}$$

Portanto a desigualdade triangular é satisfeita. Para terminar a prova de que d é realmente uma métrica resta verificar apenas que $d(\mu, \nu) = 0$ se, e somente se, $\mu = \nu$. Para provar este fato vamos invocar o Teorema de Riesz-Markov, da mesma maneira que fizemos no Teorema de Stone-Weierstrass apresentamos abaixo o enunciado em uma forma particular

Teorema 40 (Riesz-Markov). *Sejam Ω um espaço métrico compacto e $F : C(\Omega, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo, isto é para toda $f \geq 0$ temos $F(f) \geq 0$. Então existe uma única medida $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ tal que*

$$F(f) = \int_\Omega f \, d\mu, \qquad \textit{para toda } f \in C(\Omega, \mathcal{F}).$$

Além do mais $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ se, e somente se, $F(1) = 1$.

Vamos mostrar agora que $d(\mu, \nu) = 0$ implica $\mu = \nu$. Assumindo que $d(\mu, \nu) = 0$, segue da definição de d, que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_\Omega \phi_n \, d\mu - \int_\Omega \phi_n \, d\gamma \right| = 0.$$

Isto significa que os funcionais lineares positivos

$$F_1(f) = \int_\Omega f \, d\mu \qquad \text{e} \qquad F_2(f) = \int_\Omega f \, d\nu$$

coincidem em todos os pontos do conjunto $\{\phi_1, \phi_2 \ldots\}$ que é subconjunto denso de $\overline{B(0,1)} \subset C(\Omega, \mathcal{F})$. Seja $g \in \overline{B(0,1)}$ uma função arbitrária. Por densidade, sabemos que existe uma subsequência $(\phi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\|\phi_{n_j} - g\|_\infty \to 0$, quando $j \to \infty$. Já que a esta sequência $(\phi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada temos

$$F_1(g) = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} \phi_{n_j}\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \phi_{n_j}\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \phi_{n_j}\, d\nu = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} \phi_{n_j}\, d\nu = F_2(g).$$

Assim concluímos que F_1 coincide com F_2 em todo elemento de $\overline{B(0,1)}$. Já que uma função arbitrária $f \in C(\Omega, \mathcal{F}) \setminus \{0\}$ pode ser escrita como $\|f\|_\infty \cdot \frac{f}{\|f\|_\infty}$ e que $\frac{f}{\|f\|_\infty} \in \overline{B(0,1)}$ segue da linearidade de F_1 e F_2 e das igualdades logo acima que ambos coincidem em todo $C(\Omega, \mathcal{F})$. Finalmente pela unicidade garantida pelo Teorema de Riesz-Markov temos $\mu = \nu$ e isto encerra a prova de que d é uma métrica.

Convergência Fraca de Medidas e a Compacidade fraca de $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$

Agora que sabemos que $(\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}), d)$ é um espaço métrico, temos naturalmente a noção de convergência de uma sequência de medidas de probabilidade $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se existe uma medida $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $d(\mu_n, \mu) \to 0$, dizemos que a sequência μ_n converge fracamente para μ. Usaremos neste caso a notação $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

Exercício 34. *Seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}), d)$ e suponha que exista $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\mu_n \rightharpoonup \mu$. Então mostre que isto é equivalente a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\, d\mu_n = \int_\Omega f\, d\mu, \qquad \textit{para toda } f \in C(\Omega, \mathcal{F}).$$

Teorema 41 (Compacidade de $(\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}), d)$)**.** *Toda sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ admite uma subsequência que é fracamente convergente. Como $(\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}), d)$ é um espaço métrico isto é equivalente a dizer que este espaço métrico é compacto.*

O leitor com alguma experiência em análise funcional pode observar que a prova do teorema acima pode ser dada por uma aplicação imediata do Teorema de Banach-Alaoglu, pois como mencionamos acima o Teorema de Riesz-Markov prova exatamente que o dual topológico de $C(\Omega, \mathcal{F})$ é o espaço das medidas com sinal definidas em $\mathcal{F}$. Para uma prova mais construtiva e elementar deste fato veja [18].

Antes de prosseguir apresentamos mais uma belíssima caracterização sobre compacidade do espaço $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ cuja a prova pode ser encontrada na íntegra em [20] página 45.

Teorema 42. *$\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é um espaço métrico compacto se, e somente se, Ω é um espaço métrico compacto.*

3.3 Medidas de Gibbs - Limite Termodinâmico

Usando as ferramentas apresentadas na seção anterior damos agora a primeira construção das medidas de Gibbs em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$, onde E é um conjunto finito. A hipótese de E ser finito simplifica bastante a construção das medidas de Gibbs via Limite Termodinâmico. Esta hipótese como veremos nos próximos capítulos, pode ser bastante enfraquecida e a construção pode na verdade ser feita para o caso em que E é apenas um espaço métrico completo e separável.

Apresentamos abaixo alguns conceitos que serão utilizados na construção do limite termodinâmico nesta e nas seções posteriores.

Definição 43 (Sequência Absorvente). *Uma sequência $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ é chamada de absorvente se para todo subconjunto finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda \subset \Lambda_n$ para todo $n \geq n_0$.*

Dizemos que uma sequência $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos $\mathbb{Z}^d$, converge para $\mathbb{Z}^d$, notação $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ se $\cup_{n=1}^{\infty}\Lambda_n = \mathbb{Z}^d$. O leitor com mais experiência em teoria da medida deve reconhecer esta noção de convergência como a noção de convergência de conjuntos. Note que toda sequência absorvente $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ converge para $\mathbb{Z}^d$.

Sejam $\sigma, \omega \in \Omega$ duas configurações arbitrárias. Usaremos a notação de concatenação $\sigma_\Lambda\omega_{\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda}$ para denotar a configuração $\eta \in \Omega$ definida por $\eta_i = \sigma_i$ se $i \in \Lambda$ e $\eta_i = \omega_i$ se $i \in \Lambda^c$.

Limite Termodinâmico e o Modelo de Ising

Por questão de simplicidade vamos considerar nesta seção o modelo de Ising de primeiros vizinhos na rede hipercúbica $\mathbb{Z}^d$. A definição mais geral será apresentada nos capítulos seguintes.

Este modelo será definido da seguinte maneira. Consideramos $E = \{-1, 1\}$ e $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ e o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pelos cilindros de Ω. Fixamos uma família de números J_{ij}, indexada no conjunto de pares de primeiros vizinhos da rede, isto é, $i, j \in \mathbb{Z}^d$ e $\|i - j\| = 1$ e uma família de números reais h_i indexada em $\mathbb{Z}^d$. Dada uma sequência absorvente $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o **hamiltoniano** do modelo de Ising a volume Λ_n é a função $H_{\Lambda_n} : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_{\Lambda_n}(\sigma) = -\sum_{\substack{\{i,j\}\subset\mathbb{Z}^d:\\ i\in\Lambda_n, \|i-j\|=1}} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_{i\in\Lambda_n} h_i\sigma_i\sigma_j.$$

A medida de Gibbs do modelo de Ising a volume finito Λ_n com condições de fronteira $\omega \in \Omega$ ao inverso da temperatura $\beta > 0$, é a medida de probabilidade $\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ que associa a cada configuração $\sigma \in \Omega$ a seguinte probabilidade

$$\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}(\{\sigma\}) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\beta H_{\Lambda_n}(\sigma_{\Lambda_n}\omega_{\Lambda_n^c})}}{Z^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}}, & \text{se } \sigma_{\Lambda_n^c} = \omega_{\Lambda_n^c}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde o fator de normalização $Z^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}$ que é chamado de função de partição a volume Λ_n com condição de fronteira ω ao inverso da temperatura β é dado simplesmente por

$$Z^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} = \sum_{\substack{\eta\in\Omega: \\ \eta_{\Lambda_n^c}=\omega_{\Lambda_n^c}}} e^{-\beta H_{\Lambda_n}(\eta_{\Lambda_n}\omega_{\Lambda_n^c})}.$$

Para ver que as medidas definidas acima são não-triviais basta observar que $Z^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} < +\infty$, pois $|\{\eta \in \Omega : \eta_{\Lambda_n^c} = \omega_{\Lambda_n^c}\}| = 2^{|\Lambda_n|}$.

Para construir o limite termodinâmico vamos considerar a restrição de $\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}$ a σ-álgebra $\mathcal{F}$. Por simplicidade vamos denotar esta restrição também por $\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}$. Assim qualquer uma destas medidas $\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}$ é agora um elemento de $\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$.

Já que $\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$ é compacto segue que, para qualquer sequência $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Ω e uma sequência absorvente $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Z}^d$, sempre existe pelo menos uma subsequência de $(\mu^{\omega_n}_{\Lambda_n,\beta})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge em $\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$.

Finalmente fixado $\beta > 0$, definimos o conjunto das medidas de Gibbs do modelo de Ising ao inverso da temperatura β sendo o fecho da envoltória convexa em $\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$ do conjunto

$$G = \{\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F}) : \text{existe uma sequência absorvente } \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d \text{ e } \omega_n \in \Omega \text{ tal que } \mu^{\omega_n}_{\Lambda_n,\beta} \rightharpoonup \mu\}.$$

Definido desta maneira o conjunto das medidas de Gibbs é o conjunto das medidas de probabilidade em $\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$ que estão no fecho da envoltória convexa do conjunto de todos os limites fracos de medidas de Gibbs a volume finito com condições de fronteira arbitrárias.

Com objetivo de introduzir uma notação que seja coerente com as outras formulações que apresentaremos sobre as medidas de Gibbs vamos novamente apresentar o modelo de Ising, só que desta vez usando uma família de funções $\Phi = \{\Phi_A\}_{A\in\mathbb{Z}^d}$, tais que para cada $A \in \mathbb{Z}^d$ finito a função $\Phi_A : \Omega \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} J_{ij}\ \sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i,j\} \text{ e } \|i-j\| = 1; \\ h_i\ \sigma_i, & \text{se } A = \{i\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com auxílio desta família podemos ver que o hamiltoniano do modelo de Ising a volume finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ é dado por

$$H_{\Lambda}(\sigma) = -\sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset} \Phi_A(\sigma)$$

e portanto observamos que as medidas de Gibbs a volume finito dependem diretamente de Φ. Por estas razões usaremos a seguinte notação $\mathcal{G}_\beta(\Phi)$ para nos referir ao conjunto das medidas do modelo de Ising ao inverso da temperatura β. Como veremos mais a frente esta notação será usada para denotar o conjunto das medidas de Gibbs para uma família $\Phi = \{\Phi_A\}_{A \in \mathbb{Z}^d}$ em outros modelos. No caso mais geral, a ser apresentado nos capítulos seguintes, esta família Φ é chamada de interação e $\mathcal{G}_\beta(\Phi)$ será a notação do conjunto das medidas de Gibbs para a interação Φ ao inverso da temperatura β.

3.4 Esperança Condicional

3.4.1 Medidas com Sinal

Considere $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável. Se μ e ν são duas medidas sobre $\mathscr{F}$, tomando valores em $[0, +\infty)$. Podemos verificar facilmente que para todo real $\lambda \in [0,1]$ que $\lambda\mu + (1-\lambda)\nu$ é também uma medida tomando valores em $[0, +\infty)$. Segundo nossa definição de convexidade, estritamente falando não podemos ainda dizer que esta observação prova que o espaço de todas as medidas finitas sobre $\mathscr{F}$ é um conjunto convexo, pois segundo nossa definição de convexidade conjuntos convexos são sempre subconjuntos de espaços vetoriais. A maneira mais simples de ganharmos direito de chamar o conjunto das medidas finitas de um conjunto convexo é então mergulhá-lo em um espaço vetorial possuindo uma cópia do espaço das medidas finitas. A definição abaixo é motivada por esta observação.

Definição 44. $(\Omega, \mathscr{F})$ *um espaço mensurável. Uma medida com sinal em* $(\Omega, \mathscr{F})$ *é uma função* $\nu : \mathscr{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tal que*

i) $\nu(\emptyset) = 0$;

ii) ν *assume no máximo um dos valores* $\pm\infty$;

iii) para toda coleção $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ *de conjuntos disjuntos de* $\mathscr{F}$ *temos* $\nu\left(\cup_{j=1}^\infty E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$, *onde a soma que aparece a direita na igualdade acima é absolutamente convergente sempre que* $\nu\left(\cup_{j=1}^\infty E_j\right)$ *for finito.*

Definição 45. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F})$ *um espaço mensurável,* ν *e* μ *duas medidas definidas em* $\mathscr{F}$. *Dizemos que* ν *é absolutamente contínua com relação* μ, *notação* $\nu \ll \mu$, *se para todo* $E \in \mathscr{F}$ *tal que* $\mu(E) = 0$ *temos que* $\nu(E) = 0$.

Exercício 35. *Mostre que o espaço das medidas com sinal finitas de um espaço mensurável* $(\Omega, \mathscr{F})$ *é um espaço vetorial. Em seguida, mostre que conjunto das medidas de probabilidade em* $(\Omega, \mathscr{F})$ *é um conjunto convexo.*

Teorema 46 (Radon-Nikodým)**.** *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F})$ *um espaço mensurável,* ν *e* μ *duas medidas* σ*-finitas definidas em* $\mathscr{F}$*. Se* $\nu \ll \mu$ *então existe um função* $\mathscr{F}$*-mensurável* $f : \Omega \to [0, +\infty]$ *tal que*

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu, \qquad \textit{para todo } E \in \mathscr{F}.$$

Além do mais f *é unicamente determinada* μ*-q.t.p.*

Normalmente a função f dada pelo teorema acima é chamada de derivada de Radon-Nikodým e denotada por $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.

3.4.2 Definição e Propriedades da Esperança Condicional

Nesta seção usando o Teorema de Radon-Nikodým vamos mostrar como são construídas as probabilidade e esperança condicional. Em várias partes desta seção vamos considerar um espaço de medida $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, uma sub-$\sigma$-álgebra $\mathscr{B}$ de $\mathscr{F}$ e usaremos a notação $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$, para denotar a restrição da medida μ a sub-σ-álgebra $\mathscr{B}$. Vamos denotar por $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ o conjunto de todas as funções $\mathscr{F}$-mensuráveis $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ tais que $\int_\Omega |f|\, d\mu < +\infty$. Obs: Nos textos de teoria da Medida e Análise funcional $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ é uma notação consagrada para denotar um espaço de classes de equivalência obtido pela identificação de duas funções que diferem em um subconjunto de Ω de medida zero. Voltaremos a discutir isto mais a frente no texto. E neste ponto para evitar confusão e fixar a notação vamos pensar em $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ apenas como um espaço de funções.

Teorema 47. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida finita,* $\mathscr{B}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathscr{F}$ *e* $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$*. Para cada* $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *existe uma função* g *mensurável segundo a* σ*-álgebra* $\mathscr{B}$ *com* $g \in L^1(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ *tal que*

$$\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\nu \qquad \textit{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Além do mais se $g' \in L^1(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ *é uma outra função satisfazendo a igualdade acima, então* $g = g'$ ν*-q.t.p.*

Observação. A função g cuja a existência é garantida no Teorema (47) é nosso ponto de partida para apresentar a definição da esperança condicional. A esperança condicional será um dos conceitos fundamentais deste texto e vital para o estudo de medidas de Gibbs do ponto de vista probabilístico e da teoria de especificações. Seguimos a partir de agora apresentando em todos os detalhes a construção da esperança condicional e suas propriedades importantes para a teoria das medidas de Gibbs.

Prova do Teorema (47) Vamos considerar inicialmente que $f \geq 0$. Seja $\eta : \mathscr{B} \to [0, +\infty)$ a medida definida por

$$\eta(E) = \int_E f\, d\mu. \tag{3.3}$$

Note que se $\nu(E) = 0$ então obviamente $\mu(E) = 0$, mas se $\mu(E) = 0$ então a integral acima é igual a zero logo $\eta(E) = 0$, e assim temos que $\eta \ll \nu$. Daí segue do Teorema de Radon-Nikodym que existe uma função $\mathscr{B}$-mensurável $g : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\eta(E) = \int_E g \, d\nu \tag{3.4}$$

Usando a hipótese $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e tomando $E = \Omega$ nas igualdades (3.3) e (3.4) concluímos que $g \in L^1(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$. O Teorema de Radon-Nikodým garante que g é unicamente determinada ν-q.t.p. e portanto o teorema fica provado no caso em que $f \geq 0$. No caso em que f toma valores reais basta repetir argumento apresentado acima para f^+ e f^-. □

Definição 48. *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de* **probabilidade**, $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$, $\mathscr{B}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathscr{F}$ *e* $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$. *Dizemos que uma função* $\mathscr{B}$*-mensurável* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma esperança condicional de* f *dada a* σ*-álgebra* $\mathscr{B}$, *se*

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\nu \qquad \textit{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Como vimos acima o Teorema (47) garante a existência de uma esperança condicional para toda $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e para toda sub-σ-álgebra $\mathscr{B}$ de $\mathscr{F}$. Cada uma das funções g satisfazendo a condição acima é chamada de uma versão da esperança condicional de f com respeito a $\mathscr{B}$. O Teorema (47) também nos garante que quaisquer duas versões da esperança condicional são funções que diferem apenas em um conjunto de medida ν nula. Já que do ponto de vista de integração a escolha de uma versão arbitrária da esperança condicional não afeta nenhum cálculo é comum tomarmos uma versão qualquer e denotá-la por $\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]$. Ressaltamos que $\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]$ é uma função ($\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] : \Omega \to \mathbb{R}$) cujo domínio é o conjunto Ω e toma valores em $\mathbb{R}$. Na sequência apresentamos algumas de suas principais propriedades.

Proposição 49 (Linearidade da Esperança Condicional). *Sejam* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida finita,* $\mathscr{B}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathscr{F}$ *e* $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$. *Para todas* $f, g \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$\mathbb{E}[f + \alpha g|\mathscr{B}] = \mathbb{E}[f|\mathscr{B}] + \alpha \mathbb{E}[g|\mathscr{B}] \quad \nu - q.t.p.$$

Prova. Pela definição de esperança condicional temos

$$\int_E (f + \alpha g) \, d\mu = \int_E \mathbb{E}[f + \alpha g|\mathscr{B}] \, d\nu \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}. \tag{3.5}$$

Usando a linearidade da Integral de Lebesgue e a definição de esperança condicional de f e g dado a σ-álgebra $\mathscr{B}$ temos

$$\int_E (f + \alpha g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \alpha \int_E g \, d\mu = \int_E \mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \, d\nu + \alpha \int_E \mathbb{E}[g|\mathscr{B}] \, d\nu \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}. \tag{3.6}$$

Já que o lado esquerdo em (3.5) e (3.6) é o mesmo temos

$$\int_E \mathbb{E}[f+\alpha g|\mathscr{B}]\,d\nu = \int_E \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\,d\nu + \alpha \int_E \mathbb{E}[g|\mathscr{B}]\,d\nu \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Usando novamente a linearidade da integral e que E é arbitrário em $\mathscr{B}$ concluímos que $\mathbb{E}[f+\alpha g|\mathscr{B}] = \mathbb{E}[f|\mathscr{B}] + \alpha\mathbb{E}[g|\mathscr{B}] \quad \nu -$ q.t.p.. $\square$

A prova da próxima proposição é completamente análoga, mas repetiremos todos os detalhes para que o leitor menos experiente vá se familiarizando com o conceito da esperança condicional e suas propriedades.

Proposição 50 ($\mathscr{B}$-homogenidade da Esperança Condicional)**.** *Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida finita, $\mathscr{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$ e $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$. Se $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e g é uma função $\mathscr{B}$-mensurável então*

$$\mathbb{E}[fg|\mathscr{B}] = g\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \quad \nu - q.t.p.$$

Prova. Suponha que inicialmente que $g = \chi_F$ para algum $F \in \mathscr{B}$. Da definição de esperança condicional temos

$$\int_E f\chi_F\, d\mu = \int_E \mathbb{E}[f\chi_F|\mathscr{B}]\,d\nu \tag{3.7}$$

para todo $E \in \mathscr{B}$. Como estamos supondo que $F \in \mathscr{B}$, temos que $E \cap F \in \mathscr{B}$ logo, aplicando novamente a definição da esperança condicional obtemos

$$\int_E f\chi_F\, d\mu = \int_{E\cap F} f\, d\mu = \int_{E\cap F} \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\,d\nu = \int_E \chi_F\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\,d\nu. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8) segue que

$$\int_E \mathbb{E}[f\chi_F|\mathscr{B}]\,d\nu = \int_E \chi_F\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\,d\nu, \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Logo $\mathbb{E}[f\chi_F|\mathscr{B}] = \chi_F\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]$ ν-q.t.p. e isto prova o teorema para o caso $g = \chi_F$.

Vamos mostrar agora o teorema no caso em que g é uma função simples $\mathscr{B}$-mensurável. Suponha que sua representação padrão seja $g = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j}$, onde $a_j \in \mathbb{R}$ e $E_j \in \mathscr{B}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Pela linearidade da esperança condicional e pela propriedade que acabamos de demostrar acima, uma indução mostra que as seguintes igualdades são verdadeiras

$$\mathbb{E}[gf|\mathscr{B}] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j}\right) f \;\Big|\mathscr{B}\right] = \sum_{j=1}^n a_j\mathbb{E}[\chi_{E_j} f|\mathscr{B}] = \sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j}\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] = g\mathbb{E}[f|\mathscr{B}].$$

Resta agora estabelecer este fato para funções $g \in L^1(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$. Primeiro vamos mostrar que é suficiente provar a proposição para f e g não negativas. De fato, assuma que o teorema seja válido para $f^+, f^- \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e $g^+, g^- \in L^1(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$. Já que $f = f^+ - f^-$ e $g = g^+ - g^-$ temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[gf|\mathscr{B}] &= \mathbb{E}[g^+f^+ - g^-f^+ - g^+f^- + g^-f^-|\mathscr{B}] \\
&= \mathbb{E}[g^+f^+|\mathscr{B}] - \mathbb{E}[g^-f^+|\mathscr{B}] - \mathbb{E}[g^+f^-|\mathscr{B}] + \mathbb{E}[g^-f^-|\mathscr{B}] \\
&= g^+\mathbb{E}[f^+|\mathscr{B}] - g^-\mathbb{E}[f^+|\mathscr{B}] - g^+\mathbb{E}[f^-|\mathscr{B}] + g^-\mathbb{E}[f^-|\mathscr{B}] \\
&= (g^+ - g^-)\mathbb{E}[f^+|\mathscr{B}] - (g^+ - g^-)\mathbb{E}[f^-|\mathscr{B}] \\
&= g\mathbb{E}[f^+|\mathscr{B}] - g\mathbb{E}[f^-|\mathscr{B}] \\
&= g(\mathbb{E}[f^+|\mathscr{B}] - \mathbb{E}[f^-|\mathscr{B}]) \\
&= g\mathbb{E}[f|\mathscr{B}].
\end{aligned}$$

Portanto só resta mostrar que a proposição é verdadeira para $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ e $g \in L^1(\Omega, \mathscr{B}, \nu)$ ambas não negativas. Pelo Teorema 29 existe uma sequência $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ monótona crescente de funções simples $\mathscr{B}$-mensuráveis tal que $g_n \uparrow g$. Já que $f \geq 0$ podemos afirmar que $g_n f \uparrow gf$. Pela definição de esperança condicional

$$\int_E g_n f \, d\mu = \int_E \mathbb{E}[g_n f|\mathscr{B}] \, d\nu, \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}. \tag{3.9}$$

Já sabemos que para toda função $\mathscr{B}$-mensurável g_n simples que a seguinte igualdade é verdadeira $\mathbb{E}[g_n f|\mathscr{B}] = g_n\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]$. Como $f \geq 0$ é imediato verificar que $\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \geq 0$, assim $g_n\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \uparrow g\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]$ o que nos permite aplicar o teorema da convergência monótona em ambos os lados de (3.9) e concluir que

$$\int_E gf \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \, d\nu = \int_E g\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \, d\nu, \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Observando que a integral mais a esquerda da igualdade acima é, por definição de esperança condicional, igual a $\int_E \mathbb{E}[gf|\mathscr{B}] \, d\nu$ e que esta igualdade é válida para todo $E \in \mathscr{B}$ concluímos que $\mathbb{E}[gf|\mathscr{B}] = g\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]$ ν-q.t.p. e assim está completa a prova da proposição. □

Proposição 51 (Monotonicidade da Esperança Condicional). *Seja $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Se $f, g \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ são tais que $f \leq g$ e $\mathscr{B}$ é uma sub-σ-álgebra qualquer de $\mathscr{F}$ então $\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \leq \mathbb{E}[g|\mathscr{B}]$ ν-q.t.p., onde $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$*

Prova. Pela definição da esperança condicional temos

$$\int_E \mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \, d\nu = \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu = \int_E \mathbb{E}[g|\mathscr{B}] \, d\nu, \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

De onde segue o resultado. □

Teorema 52 (Teorema da Convergência Monótona para Esperança Condicional)**.** *Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de probabilidade,* $\mathscr{B}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathscr{F}$ *e* $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$*. Se* $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ *é uma sequência de funções* $\mathscr{B}$*-mensuráveis tal que* $f_n \uparrow f$ μ*-q.t.p. então* $\mathbb{E}[f_n|\mathscr{F}] \uparrow \mathbb{E}[f|\mathscr{F}]$ ν*-q.t.p..*

Prova. Por linearidade e monotonicidade da esperança condicional temos

$$0 \leq \int_E \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\, d\nu - \int_E \mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}]\, d\nu = \int_E f\, d\mu - \int_E f_n\, d\mu. \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Como $\int_E \mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}]\, d\nu$ é uma sequência de números reais não decrescente e limitada ela possui limite. Assim podemos tomar o limite quando n vai a infinito em ambos os lados da desigualdade acima e concluir usando o Teorema da Convergência Monótona, no lado direito, que

$$0 \leq \int_E \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\, d\nu - \lim_{n\to\infty} \int_E \mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}]\, d\nu = 0 \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Já que $\mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}]$ é uma sequência monótona de funções, existe o limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}](\omega)$ ν-q.t.p. Logo podemos aplicar novamente o Teorema da Convergência Monótona na desigualdade acima e concluir que

$$\int_E \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\, d\nu = \int_E \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}]\, d\nu \qquad \text{para todo } E \in \mathscr{B}.$$

Desta forma acabamos de mostrar que $\mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}] \uparrow \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]$ ν-q.t.p. □

Exercício 36. *Prove a chamada propriedade de contração para a esperança condicional. Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de probabilidade,* $\mathscr{B}$ *uma sub-*σ*-álgebra de* $\mathscr{F}$*,* $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$ *e* $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$*. Mostre que*

$$\int_\Omega \big|\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\big|\, d\nu \leq \int_\Omega |f|\, d\mu.$$

Teorema 53 (Convergência Dominada para Esperança Condicional)**.** *Seja* $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *um espaço de medida* $\mathscr{B}$ *sub-*σ*-álgebra de* $\mathscr{F}$ *e* $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$*. Suponha que* $f_n : \Omega \to [0, +\infty)$ *seja uma sequência de funções em* $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ *que converge* μ*-q.t.p. para* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Se existe uma função integrável* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}] = \mathbb{E}[f|\mathscr{B}] \quad \nu - q.t.p.$$

Prova. Seja $h_n : \Omega \to [0, +\infty)$ uma sequência de funções dada por

$$h_n(\omega) = \sup_{\{j\in\mathbb{N}: n\leq j\}} |f(\omega) - f_j(\omega)|.$$

Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $h_{n+1}(\omega) \leq h_n(\omega)$ e $h_n(\omega) \leq |f(\omega)| + |g(\omega)|$. Desta duas propriedades podemos concluir que $(|f| + |g| - h_n) \uparrow (|f| + |g|)$ μ-q.t.p.. Pelo Teorema 52 (convergência monótona) segue que

$$\mathbb{E}[(|f| + |g| - h_n)|\mathscr{B}] \uparrow \mathbb{E}[(|f| + |g|)|\mathscr{B}] \quad \nu - \text{q.t.p.}$$

Usando a linearidade e monotonicidade da esperança condicional segue da observação acima que $\mathbb{E}[h_n|\mathscr{B}] \downarrow 0$. Usando novamente a monotonicidade obtemos

$$\Big|\mathbb{E}[f|\mathscr{B}] - \mathbb{E}[f_n|\mathscr{B}]\Big| \leq \mathbb{E}[|f - f_n||\mathscr{B}] \leq \mathbb{E}[h_n|\mathscr{B}] \downarrow 0 \quad \nu - \text{q.t.p..}$$

□

Proposição 54. *Sejam $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função $\mathscr{F}$-mensurável, $\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ σ-álgebras, $\nu = \mu|_{\mathscr{B}}$ e $\eta = \mu|_{\mathscr{A}}$. Então $\mathbb{E}[\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]|\mathscr{A}] = \mathbb{E}[f|\mathscr{A}]$ η-q.t.p..*

Prova. Por definição da esperança condicional temos

$$\int_F \mathbb{E}[\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]|\mathscr{A}]\, d\eta = \int_F \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\, d\nu, \qquad \text{para todo } F \in \mathscr{A}.$$

Como F também é um conjunto $\mathscr{B}$-mensurável segue novamente da definição de esperança condicional que

$$\int_F \mathbb{E}[f|\mathscr{B}]\, d\nu = \int_F f\, d\mu, \qquad \text{para todo } F \in \mathscr{A}.$$

Das duas igualdades acima, temos que

$$\int_F f\, d\mu = \int_F \mathbb{E}[\mathbb{E}[f|\mathscr{B}]|\mathscr{A}]\, d\eta, \qquad \text{para todo } F \in \mathscr{A}.$$

Da unicidade η-q.t.p. garantida pelo Teorema 47 segue que o lado direito da igualdade acima é igual a $\mathbb{E}[f|\mathscr{A}]$ η-q.t.p., o que prova a proposição. □

Capítulo 4

Especificações Gibbsianas

Em todo este capítulo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ denotará um subconjunto finito da rede. Também tem um papel importante a família de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ e por isso introduzimos a seguinte notação $\mathscr{L} := \{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d : |\Lambda| < \infty\}$.

Assumiremos também que o espaço de estados Ω será sempre o produto cartesiano $E^{\mathbb{Z}^d}$, onde E é um espaço métrico compacto como, por exemplo, $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$, $\{1,\ldots,q\}^{\mathbb{Z}^d}$, $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{Z}^d}$. Se $\sigma = (\sigma_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \in \Omega$ então cada uma de suas componentes $\sigma_i \in E$ será chamada de spin no sítio $i \in \mathbb{Z}^d$. Vamos considerar também a rede $\mathbb{Z}^d$ como um espaço métrico cuja a métrica é dada pela norma ℓ^1, isto é, $\|i-j\| = \sum_{k=1}^d |i_k - j_k|$. Quando nos referirmos ao espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$, estaremos considerando sempre que $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pelos cilindros.

Se $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ é um subconjunto arbitrário e $\sigma \in \Omega$, usaremos a notação σ_Γ para denotar o elemento de E^Γ, dado por $\sigma_\Gamma = (\sigma_i)_{i\in\Gamma}$. Ou seja, σ_Γ como um elemento da imagem de $\pi_\Gamma : E^{\mathbb{Z}^d} \to E^\Gamma$ que aplica $\sigma = (\sigma_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \mapsto (\sigma_i)_{i\in\Gamma} = \sigma_\Gamma$. Em geral, vamos considerar nesta seção que o espaço de spins está munido de uma σ-álgebra $\mathscr{E}$. Por exemplo, se E é igual a $\{-1,1\}$ ou $\{1,\ldots,q\}$ tomamos $\mathscr{E} = \mathcal{P}(E)$. No caso $E = \mathbb{S}^1$ a σ-álgebra mais natural para ser tomada é a σ-álgebra de Borel do círculo. No caso geral onde E é um espaço métrico compacto vamos tomar sempre $\mathscr{E}$ sendo a σ-álgebra dos borelianos.

Seguimos com uma pequena generalização da construção apresentada anteriormente da σ-álgebra $\mathcal{F}_\Gamma$. Para cada $i \in \Gamma$ e $F \in \mathscr{E}$, definimos $C_F^i = \{\sigma \in \Omega : \sigma_i \in F\}$. Agora consideramos a coleção de todos estes conjuntos, notação $\mathscr{C}_\Gamma = \{C_F^i : i \in \Gamma \text{ e } F \in \mathscr{E}\}$. A σ-álgebra $\mathcal{F}_\Gamma$ é então a menor sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ gerada pela coleção $\mathscr{C}_\Gamma$. Na maior parte deste capítulo estaremos interessados no caso em que $\Gamma = \Lambda$ (finito) ou $\Gamma = \Lambda^c$.

Já que Λ é um subconjunto finito nos referimos aos elementos de $\mathcal{F}_\Lambda$ como um evento local ou evento cilíndrico.

Exercício 37. *Mostre que se $\Gamma \subset \Lambda$ então $\mathcal{F}_\Gamma$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}_\Lambda$. O que podemos dizer* *sobre a relação de continência entre* $\mathcal{F}_{\Gamma^c}$ *e* $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ *?*

Denotamos por $B(\Omega, \mathcal{F})$ o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-mensuráveis limitadas. De maneira análoga, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ definimos o espaço $B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ como o espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\Lambda$-mensuráveis limitadas.

Vamos introduzir uma notação que será bastante conveniente para a discussão que segue. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, $\sigma, \omega \in \Omega$. Usaremos a notação de concatenação $\sigma_\Lambda \omega_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$ para denotar a configuração $\eta \in \Omega$ definida por $\eta_i = \sigma_i$ se $i \in \Lambda$ e $\eta_i = \omega_i$ se $i \in \Lambda^c$.

Exercício 38. *Seja* $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ *finito. Mostre que se* $f \in B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ *então*

$$f(\sigma_\Lambda \omega_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}) = f(\sigma_\Lambda \eta_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}),$$

para quaisquer $\sigma, \omega, \eta \in \Omega$. *Em outras palavras as funções em* $B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ *são funções que dependem apenas dos valores dos spins em* Λ.

Dica: Comece provando este resultado para funções características, em seguida estenda seu resultado para funções simples e mostre como é possível usar o Teorema 29 para finalmente concluir que a afirmação é válida em $B(\Omega, \mathcal{F})$.

Funções que estão em algum $B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ são chamadas de *funções locais* e denotamos este espaço por

$$B_{loc}(\Omega) = \bigcup_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ |\Lambda| < \infty}} B(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$$

Outro espaço importante nesta seção será o espaço das funções quase-locais que denotaremos por $B_{qloc}(\Omega)$, sendo este o conjunto formando pelas funções que são limite uniforme de funções em $B_{loc}(\Omega)$.

Exercício 39. *Mostre que* $f \in B_{qloc}(\Omega)$ *se, e somente se,*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \sup_{\substack{\sigma, \sigma' \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \sigma'_\Lambda}} |f(\sigma) - f(\sigma')| = 0.$$

Dica ($\Rightarrow$): Se $\Lambda \subset \Gamma$, verifique que

$$\sup_{\substack{\sigma, \sigma' \in \Omega \\ \sigma_\Gamma = \sigma'_\Gamma}} |f(\sigma) - f(\sigma')| \leq \sup_{\substack{\sigma, \sigma' \in \Omega \\ \sigma_\Lambda = \sigma'_\Lambda}} |f(\sigma) - f(\sigma')|.$$

($\Leftarrow$) Fixe $\omega \in \mathbb{Z}^d$ considere a seguinte sequência de funções locais $f_\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}$, definida por $f_\Lambda(\sigma') = f(\sigma'_\Lambda \omega_{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda})$.

4.1 Interações Regulares

Nesta seção consideramos uma classe bastante ampla de Hamiltonianos para os quais poderemos falar sobre medidas de Gibbs. Introduzimos também ainda num contexto particular (caso compacto) a noção de especificação gibbsiana com intuito de preparar o leitor para o estudo do caso geral, que será feito mais adiante.

Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável, com $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ e $\mathscr{F}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros. Vamos supor sempre que existe uma métrica d em Ω tal que $\mathscr{F}$ é gerada por esta métrica e (Ω, d) é um espaço métrico compacto. Se $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, denotaremos por $C(\Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ o conjunto de todas as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas que são $\mathcal{F}_\Lambda$-mensuráveis.

Definição 55. *Uma interação é uma família $\Phi = \{\Phi_A\}_{A \in \mathscr{L}}$ de funções indexada por $\mathscr{L}$ onde $\Phi_A \in B(\Omega, \mathcal{F}_A)$ $\forall$ $A \in \mathscr{L}$. No caso em que $\Phi_A \in C(\Omega, \mathcal{F}_A)$ para todo $A \in \mathscr{L}$ dizemos que a interação Φ é contínua.*

De maneira usual denotamos por $\|\Phi_A\|_\infty$ a norma do sup de Φ_A, isto é,

$$\|\Phi_A\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |\Phi_A(\omega)|.$$

Definição 56 (Interação Regular)**.** *Uma interação $\Phi = \{\Phi_A\}_{A \in \mathscr{L}}$ é chamada de regular se para cada $i \in \mathbb{Z}^d$, existe uma constante $c_i > 0$ tal que*

$$\sum_{\substack{A \ni i \\ A \in \mathscr{L}}} \|\Phi_A\|_\infty \leq c_i < \infty.$$

Observação. O conjunto de todas as interações para as quais $\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i < \infty$, forma um espaço de Banach $(\mathcal{B}_0, \|\!| \cdot |\!\|)$, com a norma definida por

$$|\!|\!|\Phi|\!|\!| = \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{A \ni i} \|\Phi_A\|_\infty.$$

Na ausência da limitação uniforme das constantes c_i podemos garantir apenas que o conjunto das interações forma um espaço de Fréchet. Quando a interação é invariante por translação, isto é, $\Phi_{A+j}(T_j(\sigma)) = \Phi_A(\sigma)$, onde $(T_j(\sigma))_i = \sigma_{i+j}$, para todo $j \in \mathbb{Z}^d$ as constantes c_i podem ser tomadas como sendo uma constante c e portanto o subconjunto dos potenciais invariantes por translação é um subespaço de $(\mathcal{B}_0, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$.

A partir de uma interação podemos construir um Hamiltoniano para todo volume finito $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, da seguinte forma

$$H_\Lambda(\sigma) = - \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma) \tag{4.1}$$

Exercício 40. *Se $\Phi \in (\mathcal{B}_0, \|\!| \cdot |\!\|)$, mostre que existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito temos*

$$\|H_\Lambda\|_\infty \leq C|\Lambda|.$$

Exercício 41. *Mostre que se $\Phi = \{\Phi_A\}_{A \in \mathscr{L}}$ é uma interação regular então H_Λ é uma função quase local para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito.*

Exercício 42. *Mostre que se $\Phi = \{\Phi_A\}_{A \in \mathscr{L}}$ é uma interação regular* **contínua** *então H_Λ é uma função quase local contínua para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito.*

4.1.1 Medida Produto

Teorema 57. *Sejam $(E_1, \mathscr{E}_1, \mu_1)$ e $(E_2, \mathscr{E}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida finita. Seja $\mathscr{E}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros de $E_1 \times E_2$. Então existe uma única medida $\mu : \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ tal que*

$$\mu(F_1 \times F_2) = \mu_1(F_1)\mu_2(F_2) \qquad \text{para todos } F_1 \in \mathscr{E}_1 \text{ e } F_2 \in \mathscr{E}_2.$$

A medida μ é chamada de medida produto de μ_1 e μ_2 e denotada por $\mu_1 \times \mu_2$.

Um corolário importante do teorema acima é que esta construção também pode ser feita para qualquer número finito de espaços de medida finita.

Corolário 58. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(E_j, \mathscr{E}_j, \mu_j)$ espaços de medida finita para todo $j = 1, \ldots, n$. Denote por $\mathscr{E}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros de $E_1 \times \ldots \times E_n$. Então existe uma única medida $\mu : \mathscr{E} \to [0, +\infty]$ tal que*

$$\mu(F_1 \times \ldots \times F_n) = \mu_1(F_1) \ldots \mu_n(F_n) \qquad \text{para todos } F_j \in \mathscr{E}_j \text{ com } j = 1, \ldots, n.$$

A medida μ é também chamada de medida produto e denotada por $\prod_{j=1}^n \mu_j$.

Em Mecânica Estatística é muito comum falar de medida produto de uma quantidade infinita de fatores, o caso das chamadas medidas a priori que serão definidas mais a frente. Nesta situação, onde precisamos lidar com o problema de definir uma medida produto no produto cartesiano infinito de espaços de probabilidade existe uma versão dos resultados mencionados acima que pode ser, por exemplo, obtido pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov. Nesta seção porém apresentamos uma construção alternativa um pouco menos sofisticada.

Seja $(E, \mathscr{E}, \nu)$ um espaço de probabilidade. Considere $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ e seja $\mathscr{A}$ a álgebra das uniões finitas de cilindros de Ω. A construção da medida produto é feita em três etapas. Na primeira etapa definimos uma função μ cujo o domínio é o conjunto de todos os cilindros que denotaremos por $\mathscr{C}$. Esta função é definida da seguinte maneira. Se $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e

$$C^{i_1, i_2, \ldots, i_{|\Lambda|}}_{F_1, F_2, \ldots, F_{|\Lambda|}} = \{\sigma \in \Omega : \sigma_{i_1} \in F_1, \ldots, \sigma_{i_{|\Lambda|}} \in F_{|\Lambda|}\}$$

definimos

$$\mu\left(C^{i_1,i_2,\ldots,i_{|\Lambda|}}_{F_1,F_2,\ldots,F_{|\Lambda|}}\right) = \nu(F_1)\cdot\ldots\cdot\nu(F_{|\Lambda|}).$$

Próximo passo é estender esta medida para a álgebra $\mathscr{A}$. Tome um elemento de $\mathscr{A}$ da forma $\cup_{j=1}^{n} C_j$, onde C_j é um cilindro para todo $j = 1,\ldots,n$. Então usando o principio de inclusão-exclusão definimos

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} C_j\right) = \sum_{1\le j\le n}\mu(C_j) - \sum_{1\le i,j\le n}\mu(C_i\cap C_j) + \sum_{1\le i,j,k\le n}\mu(C_i\cap C_j\cap C_k) - \ldots + (-1)^n\mu(C_1\cap\ldots\cap C_n).$$

Exercício 43. *Verifique que $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ está bem definida, isto é, se $\cup_{j=1}^{m} D_j = \cup_{j=1}^{n} C_j$, são uniões finitas de cilindros, então $\mu(\cup_{j=1}^{m} D_j) = \mu(\cup_{j=1}^{n} C_j)$.*

Exercício 44. *Mostre que se $F_j \in \mathscr{A}$ e $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \in \mathscr{A}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_j = \emptyset$ para todo $j \ge n$.*

Neste ponto da construção já podemos concluir que μ é uma função não negativa que leva o vazio no zero, é σ-aditiva em $\mathscr{A}$. Último passo da construção é simplesmente aplicar o Teorema da Extensão de Carathéodory.

Teorema 59 (Teorema da Extensão de Carathéodory)**.** *Seja Ω um conjunto e $\mathscr{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω. Se $\tilde{\mu} : \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ é uma função não negativa definida em $\mathscr{A}$, σ-aditiva em $\mathscr{A}$ e tal que $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$, então $\tilde{\mu}$ se estende a uma medida $\mu : \sigma(\mathscr{A}) \to [0,+\infty]$. Além do mais se $\tilde{\mu}(\Omega) < \infty$ então $\mu(\Omega) < \infty$.*

4.2 Especificações Locais

Definição 60 (Especificação Local)**.** *Uma especificação local é uma família $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$, satisfazendo as seguintes condições:*

i) Para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ (finito) e $F \in \mathscr{F}$ a aplicação $\omega \mapsto \mu^{\omega}_{\Lambda,\beta}(F)$, onde $\omega \in \Omega$, é uma função $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$-mensurável.

ii) Para todo $\omega \in \Omega$, $\mu^{\omega}_{\Lambda,\beta}$ é uma medida de probabilidade em $(\Omega,\mathscr{F})$.

iii) Para quaisquer $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ e qualquer $f \in B(\Omega,\mathscr{F})$ e $\eta \in \Omega$, temos

$$\int_\Omega\int_\Omega f(\sigma_\Lambda\omega_{\Gamma\setminus\Lambda}\eta_{\Gamma^c})\, d\mu^{(\omega_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}_{\Lambda,\beta}(\sigma) d\mu^{\eta}_{\Gamma,\beta}(\omega) = \int_\Omega f(\omega_\Gamma\eta_{\Gamma^c})\, d\mu^{\eta}_{\Gamma,\beta}(\omega).$$

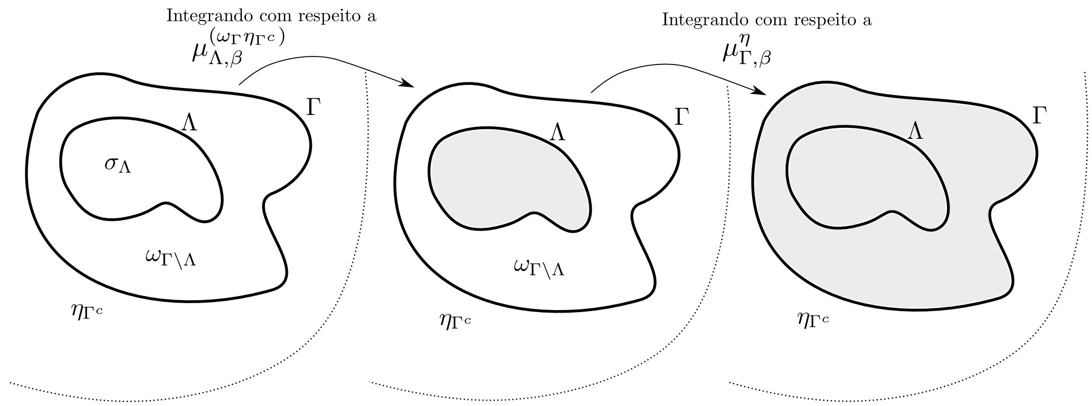

Figura 4.1: Condição de Compatibilidade

Para produzir um dos principais exemplos de especificação, que é a especificação Gibbsiana, vamos precisar da ajuda do teorema de Fubini, cujo enunciado é o seguinte:

Teorema 61 (Teorema de Fubini-Tonelli)**.** *Sejam $(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ espaços de medida finita e $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Se $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ é uma função $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-mensurável, então as seguintes funções*

$$\sigma \mapsto \int_{\Omega_2} f(\sigma, \omega)\, d\mu_2(\omega) \quad e \quad \omega \mapsto \int_{\Omega_1} f(\sigma, \omega)\, d\mu_1(\sigma) \tag{4.2}$$

são $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ mensuráveis respectivamente e

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(\sigma, \omega)\, d\mu_2(\omega) \right] d\mu_1(\sigma) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d\mu = \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(\sigma, \omega)\, d\mu_1(\sigma) \right] d\mu_2(\omega). \tag{4.3}$$

Além do mais se $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ é uma função $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-mensurável que é integrável, então valem as igualdades em (4.3) e as funções em (4.2) também são mensuráveis e integráveis em quase todo ponto com respeito a μ_1 e μ_2 respectivamente.

Proposição 62. *Sejam $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ e $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ espaços mensuráveis e $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0, +\infty]$ uma função $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2$-mensurável, então para cada $\omega \in \Omega_2$ a função $\sigma \mapsto f(\sigma, \omega)$ é $\mathscr{F}_1$-mensurável e para cada $\sigma \in \Omega_1$ a função $\omega \mapsto f(\sigma, \omega)$ é $\mathscr{F}_2$-mensurável.*

De posse destas ferramentas estamos prontos para enunciar e provar um dos teoremas mais importantes deste texto. Este teorema mostra como construir uma classe especial de especificações que serão chamadas de especificações Gibbsianas. Observe que não precisamos de nenhuma informação topológica do espaço Ω e portanto esta construção é válida também no caso não compacto. Apesar da prova dada abaixo usar o usar a regularidade da função Φ é simples se convencer que o único papel mais importante que a regularidade joga é a existência da função de partição. Assim não é difícil generalizar a prova abaixo para o caso não-regular.

Teorema 63. *Sejam $(E, \mathscr{E}, \nu)$ um espaço de probabilidade e Φ uma interação regular definida em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$, $\beta > 0$, $\Lambda \in \mathscr{L}$ e $F \in \mathcal{F}$, então a fórmula*

$$\mu^{\omega}_{\Lambda,\beta}(F) = \frac{1}{Z^{\omega}_{\Lambda,\beta}} \int_{E^\Lambda} \chi_F(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) \cdot e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i \in \Lambda} d\nu(\sigma_i), \tag{4.4}$$

onde $Z^{\omega}_{\Lambda,\beta} = \int_{E^\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)$, define uma especificação local, chamada especificação Gibbsiana para interação Φ ao inverso da temperatura β.

Observação. A função $Z^{\omega}_{\Lambda,\beta}$ é chamada de função de partição a volume Λ e ao inverso da temperatura β.

Prova. Primeiro devemos argumentar que o lado direito de (4.4) está bem definido. Já que $F \in \mathcal{F}$ segue da Proposição 62 que fixado $\omega \in E^{\mathbb{Z}^d}$ ambas funções que aparecem no integrando de (4.4) são funções $\mathscr{E}^\Lambda$-mensuráveis e também não negativas, logo esta integral está bem definida. Para verificar que esta integral é finita usamos a hipótese da interação ser regular. De fato,

$$\begin{aligned} |H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})| = \left| \sum_{A \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_A(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) \right| &\leq \sum_{i\in\Lambda} \sum_{A \ni i} |\Phi_A(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})| \\ &\leq \sum_{i\in\Lambda} \sum_{A \ni i} \|\Phi_A\|_\infty \\ &\leq \sum_{i\in\Lambda} c_i \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{E^\Lambda} \chi_F(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) \cdot e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) \leq \int_{E^\Lambda} e^{\beta \sum_{i\in\Lambda} c_i} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) = e^{\beta \sum_{i\in\Lambda} c_i} < \infty.$$

Como esta desigualdade é uniforme em $F \in \mathcal{F}$ e $\omega \in E^{\mathbb{Z}^d}$, tomando $F = E^{\mathbb{Z}^d}$ segue imediatamente que $Z^{\omega}_{\Lambda,\beta} < \infty$. Pelo Teorema de Fubini-Tonelli temos que $Z^{\omega}_{\Lambda,\beta}$ é $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$-mensurável. Usando desigualdade $|H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})| \leq \sum_{i\in\Lambda} c_i$ verificamos que $Z^{\omega}_{\Lambda,\beta} \neq 0$ e portanto $1/Z^{\omega}_{\Lambda,\beta}$ é mensurável. Aplicando novamente o Teorema de Fubini-Tonelli podemos ver que a aplicação

$$\omega \mapsto \int_{E^\Lambda} \chi_F(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) \cdot e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)$$

determina uma função $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$-mensurável, para todo $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ finito e $F \in \mathcal{F}$. Isto mostra finalmente que o item $i)$ da definição de especificação local é válido. O item $ii)$ agora é consequência direta do Exercício 31. Para provar o item *iii*) precisamos do seguinte lema:

Lema. Seja $(f_\Lambda)_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d}$ (os índices são subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$) família de funções positivas $\mathcal{F}$-mensuráveis f_Λ, tal que para todo $\omega\in\Omega$ temos $\int_\Omega f_\Lambda(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i) = 1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. Para todo $\Lambda\subset\Gamma$ subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ e $\omega,\eta\in\Omega$ tais que $\omega_{\Lambda^c}=\eta_{\Lambda^c}$ temos
$$\frac{f_\Gamma(\eta)}{f_\Gamma(\omega)} = \frac{f_\Lambda(\eta)}{f_\Lambda(\omega)} \tag{4.5}$$
2. Para todo $\Lambda\subset\Gamma$ subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$ e para todo $\omega\in\Omega$ temos
$$f_\Gamma(\omega) = f_\Lambda(\omega)\cdot\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i). \tag{4.6}$$

Prova do Lema. Vamos mostrar primeiro que (4.5) implica (4.6).

Usando condição $\int_{E^\Lambda} f_\Lambda(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i)=1$ na primeira igualdade abaixo e em seguida a condição (4.5) na terceira igualdade temos

$$\begin{aligned}
f_\Gamma(\omega) &= f_\Gamma(\omega)\int_{E^\Lambda} f_\Lambda(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i)\\
&= \int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\omega)f_\Lambda(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i)\\
&= \int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})f_\Lambda(\omega)\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i)\\
&= f_\Lambda(\omega)\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i).
\end{aligned}$$

O que prova que (4.5) implica (4.6). Vamos assumir agora que vale (4.6). Sejam $\Lambda\subset\Gamma\subset\mathbb{Z}^d$ e $\eta,\omega\in\Omega$ tais que $\eta_{\Lambda^c}=\omega_{\Lambda^c}$. Por hipótese temos

$$f_\Gamma(\omega) = f_\Lambda(\omega)\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i) \quad \text{e} \quad f_\Gamma(\eta) = f_\Lambda(\eta)\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\eta_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i).$$

Já que $\omega_{\Lambda^c}=\eta_{\Lambda^c}$ segue que

$$\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i) = \int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\eta_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i).$$

Logo são válidas as seguintes igualdades

$$
\begin{aligned}
f_\Gamma(\eta)\left(f_\Lambda(\omega)\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)\right) &= f_\Gamma(\eta)f_\Gamma(\omega)\\
&= f_\Gamma(\omega)\left(f_\Lambda(\eta)\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\eta_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)\right)\\
&= f_\Gamma(\omega)f_\Lambda(\eta)\int_{E^\Lambda} f_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})\prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)
\end{aligned}
$$

Portanto $f_\Gamma(\eta)f_\Lambda(\omega) = f_\Gamma(\omega)f_\Lambda(\eta)$. Usando que estas funções são estritamente positivas segue o resultado.

Fim da prova do Lema.

No que segue vamos aplicar o lema provado acima, para verificar o item $iii)$ da definição de especificação local. Observamos que a dependência da função de partição $Z^\omega_{\Lambda,\beta}$ em ω é na verdade uma dependência apenas em ω_{Λ^c}. Por isto, abusando um pouco da notação, é lícito escrever $Z^\omega_{\Lambda,\beta} = Z^{\omega_{\Lambda^c}}_{\Lambda,\beta}$. Usando este fato definimos, para cada $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, a função $f_\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$f_\Lambda(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\sigma)}}{Z^{\sigma_{\Lambda^c}}_{\Lambda,\beta}}.$$

O próximo passo é mostrar que o item 1 do lema é válido. Assim vamos considerar $\Lambda \subset \Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ e $\omega, \eta \in \Omega$ tais que $\omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}$. Pela definição da família $(f_\Lambda)_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d}$ temos

$$\frac{f_\Gamma(\eta)}{f_\Gamma(\omega)} = \frac{Z^{\omega_{\Lambda^c}}_{\Gamma,\beta}}{Z^{\eta_{\Lambda^c}}_{\Gamma,\beta}} \cdot \frac{e^{-\beta H_\Gamma(\eta)}}{e^{-\beta H_\Gamma(\omega)}}. \tag{4.7}$$

No lado direito a razão entre as partições é igual a 1, pois $\omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}$. Observe que

$$\frac{e^{-\beta H_\Gamma(\eta)}}{e^{-\beta H_\Gamma(\omega)}} = \frac{e^{\beta \sum\limits_{A\cap\Gamma\neq\emptyset}\Phi_A(\eta)}}{e^{\beta \sum\limits_{A\cap\Gamma\neq\emptyset}\Phi_A(\omega)}}$$

Já que Φ_A é uma função $\mathcal{F}_A$-mensurável e $\eta_{\Lambda^c} = \omega_{\Lambda^c}$
então para todo $A \subset \Lambda^c$ temos que $\Phi_A(\eta) = \Phi_A(\omega)$ (pois $\Phi_A(\eta) = \Phi_A(\eta_{\Lambda^c}) = \Phi_A(\omega_{\Lambda^c}) = \Phi_A(\omega)$). Desta observação concluímos a segunda igualdade abaixo

$$\frac{e^{\beta \sum\limits_{A\cap\Gamma\neq\emptyset}\Phi_A(\eta)}}{e^{\beta \sum\limits_{A\cap\Gamma\neq\emptyset}\Phi_A(\omega)}} = e^{\beta \sum\limits_{A\cap\Gamma\neq\emptyset}(\Phi_A(\eta)-\Phi_A(\omega))} = e^{\beta \sum\limits_{A\cap\Lambda\neq\emptyset}(\Phi_A(\eta)-\Phi_A(\omega))}.$$

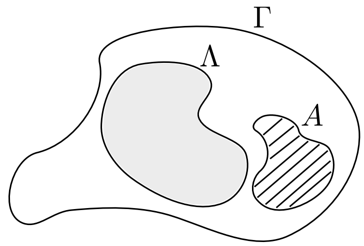

Figura 4.2: exemplo de um conjunto A onde $\Phi_A(\eta) = \Phi_A(\omega)$.

Conclusão, mostramos que

$$\frac{f_\Gamma(\eta)}{f_\Gamma(\omega)} = e^{\beta \sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset}(\Phi_A(\eta)-\Phi_A(\omega))}. \tag{4.8}$$

Analogamente, sempre que $\eta_{\Lambda^c} = \omega_{\Lambda^c}$, temos

$$\frac{f_\Lambda(\eta)}{f_\Lambda(\omega)} = \frac{Z^{\omega_{\Lambda^c}}_{\Lambda,\beta}}{Z^{\eta_{\Lambda^c}}_{\Lambda,\beta}} \cdot \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\eta)}}{e^{-\beta H_\Lambda(\omega)}} = e^{\beta \sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset}(\Phi_A(\eta)-\Phi_A(\omega))}. \tag{4.9}$$

De (4.8) e (4.9) segue imediatamente que

$$\frac{f_\Gamma(\eta)}{f_\Gamma(\omega)} = \frac{f_\Lambda(\eta)}{f_\Lambda(\omega)}.$$

Desta maneira o item 1 do lema está demostrando e usando que ele implica no item 2 e a expressão explicita de f_Λ o que de fato já temos é que se $\omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}$ e $\Lambda \subset \Gamma$ então

$$\frac{e^{-\beta H_\Gamma(\omega)}}{Z^{\omega_{\Gamma^c}}_{\Gamma,\beta}} = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\omega)}}{Z^{\omega_{\Lambda^c}}_{\Lambda,\beta}} \int_{E^\Lambda} \frac{e^{-\beta H_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})}}{Z^{\omega_{\Gamma^c}}_{\Gamma,\beta}} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)$$

substituindo $\omega_{\Lambda^c} = \eta_{\Lambda^c}$ e usando no numerador da integral que $\omega_{\Lambda^c} = \omega_{\Gamma\setminus\Lambda}\eta_{\Gamma^c}$ temos

$$\frac{e^{-\beta H_\Gamma(\omega)}}{Z^{\eta_{\Gamma^c}}_{\Gamma,\beta}} = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\omega)}}{Z^{\omega_{\Lambda^c}}_{\Lambda,\beta}} \int_{E^\Lambda} \frac{e^{-\beta H_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Gamma\setminus\Lambda}\eta_{\Gamma^c})}}{Z^{\eta_{\Gamma^c}}_{\Gamma,\beta}} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i).$$

Como observamos anteriormente $Z^{\eta_{\Gamma^c}}_{\Gamma,\beta} = Z^{\eta}_{\Gamma,\beta}$ e $Z^{\omega_{\Lambda^c}}_{\Lambda,\beta} = Z^{\omega}_{\Lambda,\beta}$ fazendo esta substituições na igualdade acima obtemos

$$\frac{e^{-\beta H_\Gamma(\omega)}}{Z^{\eta}_{\Gamma,\beta}} = \frac{e^{-\beta H_\Lambda(\omega)}}{Z^{\omega}_{\Lambda,\beta}} \int_{E^\Lambda} \frac{e^{-\beta H_\Gamma(\sigma_\Lambda\omega_{\Gamma\setminus\Lambda}\eta_{\Gamma^c})}}{Z^{\eta}_{\Gamma,\beta}} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) \tag{4.10}$$

Voltaremos a utilizar esta igualdade mais tarde.

Usando as definições de integral de função característica e a definição da especificação $\left\{\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ temos para todo $F \in \mathcal{F}$ e $\omega \in \Omega$

$$\int_{\Omega} \chi_F \, d\mu_{\Lambda,\beta}^{\omega} = \mu_{\Lambda,\beta}^{\omega}(F) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{\omega}} \int_{E^{\Lambda}} \chi_F(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)$$

Usando a linearidade da integral é imediato verificar que a igualdade acima permanece válida se no lugar de χ_F consideramos qualquer função simples $\mathcal{F}$-mensurável, digamos, $g : \Omega \to \mathbb{R}$. De fato, seja $g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{F_j}$ a representação padrão de g então a seguintes igualdades são verdadeiras

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} g \, d\mu_{\Lambda,\beta}^{\omega} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{F_j} \, d\mu_{\Lambda,\beta}^{\omega} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{\Omega} \chi_{F_j} \, d\mu_{\Lambda,\beta}^{\omega} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{\omega}} \int_{E^{\Lambda}} \chi_{F_j}(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) \\
&= \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{\omega}} \int_{E^{\Lambda}} g(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i).
\end{aligned}$$

Se $f \in B(\Omega, \mathcal{F})$ então existe uma sequência de funções simples $\mathcal{F}$-mensuráveis $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ com $|g_n| \leq |f|$ tal que $g_n \to f$. Assim segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue a seguinte igualdade

$$\int_{\Omega} f \, d\mu_{\Lambda,\beta}^{\omega} = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{\omega}} \int_{E^{\Lambda}} f(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i). \tag{4.11}$$

Logo para qualquer função $f \in B(\Omega, \mathcal{F})$ temos a seguinte expressão para o lado direito do item $iii)$ da definição de especificação:

$$\int_{\Omega} f d\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta} = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{\eta}} \int_{E^{\Gamma}} f(\sigma_\Gamma \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Gamma(\sigma_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Gamma} d\nu(\sigma_i). \tag{4.12}$$

Agora vamos trabalhar no lado esquerdo da equação que aparece no item $iii)$ da definição de especificação. Primeiro observamos que

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} f(\sigma_\Lambda \omega_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) \, d\mu_{\Lambda,\beta}^{(\omega_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}(\sigma) d\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}(\omega) = \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} f \, d\mu_{\Lambda,\beta}^{(\omega_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \right] d\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}(\omega).$$

Aplicando a fórmula (4.11), temos que o lado direito da igualdade acima pode ser reescrito como

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\omega_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}} \int_{E^\Lambda} f(\sigma_\Lambda \omega_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) \right] d\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}(\omega).$$

Avaliando esta integral usando novamente (4.11) temos

$$\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}} \int_{E^\Gamma} \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}} \left[\int_{E^\Lambda} f(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) \right] e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Gamma} d\nu(\theta_i)$$

Pelo teorema de Fubini-Tonelli a integral iterada acima é igual a integral dupla

$$\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}} \int_{E^\Gamma} \int_{E^\Lambda} \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}} f(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})} e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) \prod_{i\in\Gamma} d\nu(\theta_i)$$

Usando a identificação natural de $E^\Gamma = \mathbb{E}^{\Gamma\setminus\Lambda} \times E^\Lambda$ e novamente o teorema de Fubini-Tonelli reescrevemos a integral acima como segue

$$\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}} \int_{E^{\Gamma\setminus\Lambda}} \int_{E^\Lambda} \int_{E^\Lambda} \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}} f(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})} \times$$

$$\times \; e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i) \prod_{i\in\Gamma\setminus\Lambda} d\nu(\theta_i) \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\theta_i)$$

Novamente por Fubini-Tonelli podemos mudar a ordem da integração acima obtendo

$$\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}} \int_{E^\Lambda} \int_{E^{\Gamma\setminus\Lambda}} \int_{E^\Lambda} \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}} f(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) \qquad e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})} \times$$

$$\times \; e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\theta_i) \prod_{i\in\Gamma\setminus\Lambda} d\nu(\theta_i) \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)$$

Já que $f(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})}$ é constante com respeito a integração nos sítios de Λ então a integral acima é igual a

$$\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}} \int_{E^\Lambda} \int_{E^{\Gamma\setminus\Lambda}} f(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})} \times$$

$$\times \int_{E^\Lambda} \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}} e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\theta_i) \prod_{i\in\Gamma\setminus\Lambda} d\nu(\theta_i) \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i)$$

usando novamente a identificação $E^\Gamma = E^{\Gamma\setminus\Lambda} \times E^\Lambda$ segue mais uma vez do Teorema de Fubini-Tonelli que podemos escrever a integral acima da seguinte maneira

$$\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}} \int_{E^\Gamma} f(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c}) e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \theta_{\Gamma\setminus\Lambda} \eta_{\Gamma^c})} \int_{E^\Lambda} \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})}} e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Gamma \eta_{\Gamma^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\theta_i) \prod_{i\in\Gamma\setminus\Lambda} d\nu(\theta_i) \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i).$$

Como a função $Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}$ não depende de nenhuma das variáveis θ_i com $i \in \Lambda$ e $\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}}$ é um número (já que η é um parâmetro fixado o tempo todo nesta prova) podemos dizer que a integral acima é igual a

$$\int_{E^\Gamma} f(\sigma_\Lambda\theta_{\Gamma\setminus\Lambda}\eta_{\Gamma^c})e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda\theta_{\Gamma\setminus\Lambda}\eta_{\Gamma^c})}\frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\theta_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}}\int_{E^\Lambda}\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}}e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\theta_i)\prod_{i\in\Gamma\setminus\Lambda}d\nu(\theta_i)\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\sigma_i).$$

Fazendo a mudança de variáveis $\theta_i = \sigma_i$ para $i \in \Gamma\setminus\Lambda$, podemos reescrever a integral acima como

$$\int_{E^\Gamma} f(\sigma_\Gamma\eta_{\Gamma^c})e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}\frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{(\sigma_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}}\left(\int_{E^\Lambda}\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{\eta}}e^{-\beta H_\Gamma(\theta_\Lambda\sigma_{\Gamma\setminus\Lambda}\eta_{\Gamma^c})}\prod_{i\in\Lambda}d\nu(\theta_i)\right)\prod_{i\in\Gamma}d\nu(\sigma_i).$$

substituindo o integrando acima usando a identidade (4.10) obtemos finalmente que

$$\int_\Omega\left[\int_\Omega f\,d\mu_{\Lambda,\beta}^{(\omega_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}\right]d\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}(\omega) = \int_{E^\Gamma} f(\sigma_\Gamma\eta_{\Gamma^c})e^{-\beta H_\Gamma(\sigma_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}\frac{1}{Z_{\Gamma,\beta}^{(\sigma_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}}\prod_{i\in\Gamma}d\nu(\sigma_i).$$

Logo iii) está demonstrado e isto completa a prova do teorema. $\square$

Observação. Como vimos na prova do teorema para especificações Gibbsianas podemos escrever a condição iii) da definição de especificação de maneira mais compacta

$$\int_\Omega\left[\int_\Omega f\,d\mu_{\Lambda,\beta}^{(\omega_\Gamma\eta_{\Gamma^c})}\right]d\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}(\omega) = \int_\Omega f\,d\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}. \tag{4.13}$$

Esta condição é chamada de condição de compatibilidade. Vamos também usar em diversas partes do texto a seguinte notação para nos referir a esta equação quando $f = \chi_F$

$$\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}(F) = \mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}(F).$$

De maneira análoga, no caso em que f é uma função mais geral, $\mathcal{F}$-mensurável escreveremos a equação 4.13 da seguinte forma

$$\mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}(f) = \mu_{\Gamma,\beta}^{\eta}(f).$$

estas equações para os casos em $\Lambda \subset \Lambda$ são chamadas de condições de compatibilidade. Estudantes com experiência na teoria de probabilidade podem observar que estas condições são semelhantes as condições de compatibilidade que aparecem no Teorema da Extensão de Kolmogorov.

4.3 Medidas de Gibbs e o Formalismo D.L.R.

Considere $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ conjunto finito e $\beta > 0$. Por questão de conveniência quando estivermos lindando com um espaço de probabilidade como $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_\beta)$ a esperança condicional de uma função $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu_\beta)$ com respeito a uma sub-σ-álgebra $\mathcal{F}_{\Lambda^c} \subset \mathcal{F}$ antes denotada simplesmente por $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_{\Lambda^c}]$ será agora denotada por $\mu_\beta(f|\mathcal{F}_{\Lambda^c})$. A razão para esta mudança é que na notação anterior está implícito e claro qual é a medida de probabilidade em relação a qual estamos fazendo o condicionamento. Agora, como as medidas serão indexadas por vários índices como, por exemplo $\mu^\omega_{\Lambda,\beta}$, a notação anterior poderia se tornar bastante imprecisa. Quando f for a função característica de um conjunto F, ou seja $f = \chi_F$, usaremos também a notação $\mu_\beta(F|\mathcal{F})$ para denotar $\mu_\beta(\chi_F|\mathcal{F}^c)$. Alternativamente mas com menos frequência usaremos também a notação $\mathbb{E}_{\mu_\beta}[f|\mathcal{F}_{\Lambda^c}]$.

Exercício 45. *Seja $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ uma especificação Gibssiana associada a uma interação regular Φ. Mostre que para todo $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$, temos $\mu^{(\omega)}_{\Lambda,\beta}(B) = \chi_B(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Definição 64 (Medidas de Gibbs- DLR)**.** *Sejam $(E, \mathscr{E}, \nu)$ um espaço de probabilidade, $\beta > 0$ fixado e $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ uma especificação Gibbsiana local definida por uma interação regular Φ em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ como no Teorema 63. Uma medida de probabilidade $\mu_\beta : \mathcal{F} \to [0, 1]$ é chamada de uma Medida de Gibbs para esta especificação se, e somente se, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e todo $F \in \mathcal{F}$ temos a seguinte igualdade*

$$\mu_\beta(F|\mathcal{F}^c)(\omega) = \mu^\omega_{\Lambda,\beta}(F) \qquad \mu_\beta - q.t.p.$$

O conjunto de todas as medidas de Gibbs satisfazendo as condições acima é chamado conjunto das medidas de Gibbs para interação Φ no inverso da temperatura β, notação $\mathcal{G}^{DLR}_\beta(\Phi)$.

Teorema 65 (Equações DLR)**.** *Seja $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ uma especificação Gibbsiana local definida por uma interação regular Φ em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$. Uma medida de probabilidade $\mu_\beta \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é uma medida de Gibbs para especificação $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ se, e somente se,*

$$\mu_\beta\, \mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta} = \mu_\beta, \qquad \textit{para todo } \Lambda \subset \mathbb{Z}^d \textit{ finito.}$$

Observação. As equações acima são chamadas de equações DLR em homenagem a Dobrushin, Landford e Ruelle.

Prova. Se $\mu_\beta \in \mathcal{G}_\beta(\Phi)$ e $f \in B(\Omega, \mathcal{F})$ então para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, temos $\mu_\beta(f|\mathcal{F}_{\Lambda^c})(\omega) = \mu^\omega_{\Lambda,\beta}(f)$, μ_β-q.t.p.. Por definição da esperança condicional temos

$$\int_\Omega \mu_\beta(f|\mathcal{F}_{\Lambda^c})\ d\mu_\beta|_{\mathcal{F}_{\Lambda^c}} = \int_\Omega f\ d\mu_\beta$$

e portanto $\mu_\beta\ \mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta} = \mu_\beta$, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito.

Reciprocamente, suponha que $\mu_\beta\ \mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta} = \mu_\beta$, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e seja $f \in B(\Omega, \mathcal{F})$. Assim temos $\mu_\beta\ \mu_{\Lambda,\beta}(f) = \mu_\beta(f)$, isto é,

$$\int_\Omega \mu^\omega_{\Lambda,\beta}(f)\ d\mu_\beta = \int_\Omega f\ d\mu_\beta.$$

Segue do Exercício (45) que $\mu^\omega_{\Lambda,\beta}(B) = \chi_B(\omega)$, para todo $B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}$. Usando este fato, substituindo f por $\chi_B \cdot f$ nas integrais acima e aplicando o Teorema da Convergência Dominada podemos afirmar que

$$\int_B \mu^\omega_{\Lambda,\beta}(f)\ d\mu_\beta = \int_B f\, d\mu_\beta, \qquad \text{para todo } B \in \mathcal{F}_{\Lambda^c}.$$

Como B é arbitrário e a aplicação que leva $\omega \mapsto \mu^\omega_{\Lambda,\beta}(f)$ é $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$-mensurável segue da definição de esperança condicional que

$$\mu^\omega_{\Lambda,\beta}(f) = \mu_\beta(f|\mathcal{F}_{\Lambda^c}).$$

Finalmente tomando $f = \chi_F$, onde $F \in \mathcal{F}$, completamos a prova. $\square$

Exercício 46. *Sejam Φ uma interação regular e $\beta > 0$. Mostre que $\mathcal{G}^{\text{DLR}}_\beta(\Phi)$ é um conjunto convexo e fechado com respeito a topologia fraca.*

Dica. *Para mostrar que $\mathcal{G}^{\text{DLR}}_\beta(\Phi)$ é fechado na topologia fraca, mostre que para toda sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{G}^{\text{DLR}}_\beta(\Phi)$ que converge para μ então temos que $\mu \in \mathcal{G}^{\text{DLR}}_\beta(\Phi)$. Lembrando que $\mu_n \rightharpoonup \mu$, se para toda $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ temos*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\, d\mu_n = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Teorema 66. *Fixada uma interação regular Φ, $\beta > 0$ são equivalentes:*

1. *$\mu \in \mathcal{G}^{\text{DLR}}_\beta(\Phi)$.*
2. *$\mu_\beta\ \mu_{\Lambda,\beta} = \mu_\beta$, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito.*
3. *$\mu_\beta\ \mu_{\Lambda_n,\beta} = \mu_\beta$, onde $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência absorvente arbitrária.*

Prova. Basta mostrar que *3* implica *2*. Já que $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência absorvente, fixado $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda \subset \Lambda_n$ para todo $n \geq n_0$. Pelo item *iii)* de especificação local temos

$$\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} \cdot \mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta} = \mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}.$$

Integrando com respeito a μ_β ambos membros da igualdade acima e usando a hipótese que as equações DLR valem em Λ_n temos

$$\mu_\beta \cdot \mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta} = \mu_\beta \cdot \mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} \cdot \mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta} = \mu_\beta \cdot \mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta} = \mu_\beta.$$

Portanto o teorema está demonstrado. □

4.3.1 Existência de Medidas de Gibbs

O principal resultado desta seção é sobre a existência de medidas de Gibbs para uma classe muito geral de espaço de estados e potenciais. Vamos considerar (E, d) espaço métrico compacto e $\Phi = \{\Phi_A\}_{A\in\mathscr{L}}$ interação regular definida em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$. Sob estas hipóteses no potencial e no espaço de estados E a existência de uma medida de Gibbs será demonstrada usando o limite termodinâmico e a compacidade fraca de $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$. Na verdade um fato bem mais forte será provado, todos pontos de acumulação de sequências de medidas de Gibbs a volume finito $\mu^{\omega}_{\Lambda_n,\beta}$ satisfazem as equações DLR. Portanto o Teorema 66 irá garantir a seguinte continência $\mathcal{G}_\beta(\Phi) \subset \mathcal{G}^{\mathbf{DLR}}_\beta(\Phi)$. No final desta seção usando um resultado sobre separação de convexos mostraremos a recíproca deste resultado, ou seja, que $\mathcal{G}_\beta(\Phi) = \mathcal{G}^{\mathbf{DLR}}_\beta(\Phi)$!

Definição 67 (Propriedade de Feller)**.** *Sejam $(E, \mathscr{E}, \nu)$ um espaço de probabilidade, $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ uma especificação local em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$. Dizemos que esta especificação tem a propriedade de Feller se para toda $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua e $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito a aplicação*

$$\omega \mapsto \int_{E^{\mathbb{Z}^d}} f \, d\mu^{\omega}_{\Lambda,\beta}$$

é contínua.

Exercício 47. *Sejam $(E, \mathscr{E}, \nu)$ um espaço de probabilidade, $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ uma especificação Gibbsiana definida como em (4.4) por uma interação regular Φ em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$. Mostre que esta especificação tem a propriedade de Feller.*

Teorema 68. *Seja (E, d) um espaço métrico completo e separável e $\Phi = \{\Phi_A\}_{A\in\mathscr{L}}$ interação regular definida em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$. Seja $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ a especificação Gibbsiana definida pela interação regular Φ como em (4.4). Dada uma sequência $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em Ω e uma sequência absorvente $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Z}^d$, seja $\mu_\beta \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ um elemento qualquer do conjunto de pontos de acumulação da sequência de medidas de Gibbs a volume finito $(\mu^{\omega_n}_{\beta,\Lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Então $\mu_\beta \in \mathcal{G}_\beta(\Phi)$.*

Prova. Já que a especificação $\left\{\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ satisfaz a propriedade de Feller (Exercício 47) sabemos que dada $f \in C_b(\Omega, \mathcal{F})$ e $n \in \mathbb{N}$ a aplicação $\omega \to \mu_{\Lambda_n,\beta}^{\omega}(f)$ é contínua. Deste fato e da definição da convergência fraca $\mu_{\Lambda_n,\beta}^{\omega_n} \rightharpoonup \mu_\beta$ e das condição de compatibilidade *iii)* para especificações, para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito temos

$$\mu_\beta \cdot \mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n,\beta}^{\omega_n} \cdot \mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_{\Lambda_n,\beta}^{\omega_n}(f) = \mu_\beta(f).$$

Para completar a demonstração basta usar a equivalência dos itens *1* e *2* do Teorema 66. □

Definição 69. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{V}$ um conjunto convexo. Dizemos que dois subconjuntos $A, B \subset C$ são estritamente separados por um hiperplano, se existem $a \in \mathbb{R}$ e um funcional linear contínuo $F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tais que $F(x) > a$ para todo $x \in A$ e $F(x) < a$ para todo $x \in B$.*

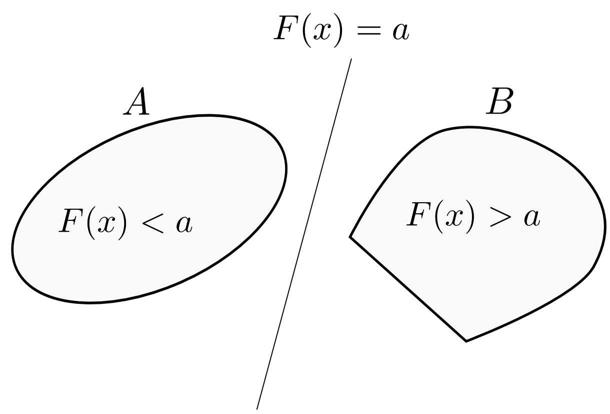

Figura 4.3: Separação estrita de A e B.

Teorema 70 (Teorema de Separação por Hiperplanos)**.** *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{V}$ um conjunto convexo. Se $A, B \subset C$ são subconjuntos convexos disjuntos tais que A é compacto e B é fechado, então eles podem ser estritamente separados por um hiperplano.*

A prova do Teorema de Separação por Hiperplanos pode ser encontrada em [23], página 130.

Teorema 71. *Seja (E, d) um espaço métrico compacto e $\Phi = \{\Phi_A\}_{A\in\mathscr{L}}$ interação regular definida em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$. Seja $\left\{\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ a especificação Gibbsiana definida pela interação Φ como em (4.4). Então $\mathcal{G}_\beta(\Phi) = \mathcal{G}_\beta^{\text{DLR}}(\Phi)$.*

Prova. Seja $f \in C(\Omega, \mathcal{F})$. Já que $\mathcal{G}_\beta(\Phi) \subset \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é um subconjunto fechado e $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$ é um **espaço métrico** compacto segue que $\mathcal{G}_\beta(\Phi)$ é compacto. Considere a aplicação J_f :

$\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ que associa $\mu \mapsto \mu(f)$. Afirmamos que esta aplicação é contínua. De fato, se dada qualquer sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$ temos pela definição de convergência fraca que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f\, d\mu_n = \int_\Omega f\, d\mu,$$

pois $f \in C(\Omega,\mathcal{F})$. Mas isto é equivalente a dizer que $\mu_n(f) \to \mu(f)$. Como $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência arbitrária em $\mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F})$, temos que J_f é contínua. Assim podemos afirmar que $J_f(\mathcal{G}_\beta(\Phi))$ é um subconjunto compacto da reta. Vamos supor que $\mathcal{G}_\beta(\Phi) \subsetneq \mathcal{G}_\beta^{\mathrm{DLR}}(\Phi)$. Já que ambos são subconjuntos convexos compactos existem, pelo Teorema de Separação por Hiperplanos, um funcional linear contínuo $\varphi : \mathcal{M}_1(\Omega,\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$, uma medida $\nu_\beta \in \mathcal{G}_\beta^{\mathrm{DLR}}(\Phi)$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $\varphi(\mathcal{G}_\beta(\Phi)) \subset (a,+\infty)$ e $\varphi(\nu_\beta) \in (-\infty,a)$. Podemos mostrar que $\varphi = J_f$ para alguma $f \in C(\Omega,\mathcal{F})$, veja [7], página 125 Teorema 1.3.

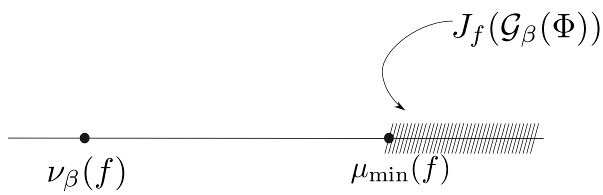

Figura 4.4: Separação de Convexos

Já que $J_f(\mathcal{G}_\beta(\Phi))$ é um compacto da reta e $\nu_\beta(f) \notin J_f(\mathcal{G}_\beta(\Phi))$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$d\Big(\nu_\beta(f), J_f(\mathcal{G}_\beta(\Phi))\Big) = \varepsilon.$$

A menos de uma translação e uma homotetia podemos supor que

$$d\Big(\nu_\beta(f), J_f(\mathcal{G}_\beta(\Phi))\Big) \geq 1$$

e também que

$$\nu_\beta(f) \leq -1, \quad \text{e} \quad \mu_\beta(f) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \mu_\beta \in \mathcal{G}_\beta(\Phi).$$

Usando que $\nu_\beta \in \mathcal{G}_\beta^{\mathrm{DLR}}(\Phi)$ segue do Teorema 66 que para qualquer sequência absorvente $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{Z}^d$, temos

$$\nu_\beta\Big(\mu^\omega_{\Lambda_n,\beta}(f)\Big) = \nu_\beta(f) \leq -1.$$

Portanto para cada $n \in \mathbb{N}$, deve existir pelo menos uma configuração $\omega_n \in \Omega$ tal que

$$\mu^{\omega_n}_{\Lambda_n,\beta}(f) \leq -1. \tag{4.14}$$

A menos de subsequência temos que $\mu^{\omega_n}_{\Lambda_n,\beta}(f) \rightharpoonup \mu_\beta(f)$ para alguma $\mu_\beta \in \mathcal{G}_\beta(\Phi)$. De (4.14) segue que $\mu_\beta(f) \leq -1$. Mas isto é uma contradição, pois $\mu_\beta(f) \geq 0$ para toda $\mu_\beta \in \mathcal{G}_\beta(\Phi)$. □

Capítulo 5

Transições de Fase

Nas seções anteriores estabelecemos alguns fatos elementares sobre o cojunto das medidas de Gibbs. No caso em que o espaço de spins E é um espaço métrico compacto e Φ uma interação regular mostramos que $\mathcal{G}_\beta(\Phi)$ é não vazio e que $\mathcal{G}_\beta(\Phi) = \mathcal{G}_\beta^{\mathbf{DLR}}(\Phi)$, ou seja, que ambas as definições podem ser tomadas como ponto de partida da teoria das medidas de Gibbs. Neste capítulo vamos estudar a possível mudança deste conjunto quando variamos o parâmetro β. Na próxima seção apresentamos um importante Teorema devido a Dobrushin sobre unicidade das medidas de Gibbs em altas temperaturas (β pequeno).

O critério de Dobrushin é uma poderosa ferramenta utilizada para concluir que para temperaturas suficientemente altas uma grande variedade de modelos possui uma única medida de Gibbs. Assumindo que temos esta informação é natural nos perguntarmos se esse comportamento se estende para todo o regime de temperatura, ou seja, se para todo β é verdade que $|\mathcal{G}_\beta(\Phi)| = 1$. Esse questionamento sugere a seguinte definição que adotaremos para o fenômeno de *transição de fase*:

Definição 72 (Transição de Fase)**.** *Diremos que um modelo de interação regular*[1] Φ *apresenta transição de fase quando existe* $\beta > 0$ *tal que* $|\mathcal{G}_\beta(\Phi)| > 1$.

Transição de fase é uma expressão de muitos significados tanto na literatura de Física quanto na de Matemática. Em geral esse termo é usado quando ao variarmos algum parâmetro do sistema de interesse observamos uma mudança em seu comportamento.

Nosso ponto de vista é o de dizer que ocorre transição de fase quando há uma mudança no número de elementos do conjunto $\mathcal{G}_\beta(\Phi)$. Poderíamos ter definido como transição de fase o fato das correlações do sistema terem diferentes decaimentos para diferentes valores de β ou mesmo

[1] É possível definirmos transição de fase para interações mais gerais para as quais exista a especificação ou definirmos transição de fase para a especificação diretamente, voltaremos neste ponto mais adiante

quando alguma função termodinâmica apresentar pontos de não-diferenciabilidade (a Pressão por exemplo).

Para os estudantes pouco familiarizados com estes conceitos esclareceremos no futuro o que significa cada uma destas outras maneiras de definir transição de fase e mostraremos que no caso do Modelo de Ising bidimensional ferromagnético fixado $\beta > 0$ o fato da Pressão não ser diferenciável (em relação ao campo externo h) quando $h = 0$ implica que temos mais de uma medida de Gibbs para este β. Esse é um exemplo onde um ponto de não-diferenciabilidade implica a existência de mais de uma medida mas nem sempre estas noções coincidem, voltaremos nisso mais tarde.

Outros autores adotam a definição de que o modelo apresenta transição de fase quando a Pressão deixa de ser analítica em algum ponto, definição adotada por muitos livros e artigos que estudam medidas de Gibbs com enfoque mais voltado para as áreas de Sistemas Dinâmicos e Teoria Ergódica. Tais áreas ainda possuem uma terceira definição de medida de Gibbs que provaremos que coincide com as duas já apresentadas para uma classe relativamente grande de potenciais.

Ainda neste capítulo vamos mostrar que no modelo de Ising bidimensional o conjunto das medidas de Gibbs em baixas temperaturas tem pelo menos dois elementos. Como já sabemos que este conjunto é convexo isto implicará imediatamente que existe uma quantidade não enumerável de medidas de Gibbs (o segmento de probabilidades ligando estas duas). Para provar isto vamos usar um famoso argumento que carrega o nome de quem o inventou conhecido na literatura como *argumento de Peierls*. A técnica tem um forte apelo geométrico e em linhas gerais troca o espaço de probabilidade das configurações por um espaço de probabilidade de contornos com pesos, a maioria das provas conhecidas para mostrar que temos mais de um elemento em $\mathcal{G}_\beta(\Phi)$ são variações deste argumento.

Passamos agora para o critério de Dobrushin que nos garante a unicidade em altas temperaturas e logo depois apresentaremos um prova direta de uma classe de modelos unidimensionais de curto alcance possuem uma única medida de Gibbs para todo β, ou seja, não apresentam transição de fase. Nesta classe está incluída por exemplo o modelo de Ising de interação de primeiros vizinhos unidimensional.

Aqui cabe um comentário histórico, o fato é que Ernest Ising em sua tese de doutorado descobriu o fato de que em dimensão 1 o modelo (na época ainda não chamado de modelo de Ising) não apresentava transição de fase. Até aí tudo correto, no entanto Ernest afirmara na época que o resultado se estendia para dimensões maiores, o que é falso como veremos a seguir.

5.1 O Teorema da Unicidade de Dobrushin

A construção de uma especificação Gibbsiana como feita na seção anterior envolve um espaço de probabilidade $(E, \mathscr{E}, \nu)$ "a priori"que na verdade poderia ser apenas um espaço de medida finita, mais uma interação $\Phi = \{\Phi\}_{A\in\mathscr{L}}$ regular e uma especificação da forma

$$\mu^{\omega}_{\Lambda,\beta}(F) = \frac{1}{Z^{\omega}_{\Lambda,\beta}} \int_{E^{\Lambda}} \chi_F(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) \cdot e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i). \tag{5.1}$$

Após dada esta estrutura definimos "a posteriori"o conjunto das medidas de Gibbs

$$\mathcal{G}_\beta(\Phi) = \{\mu_\beta : \mathcal{F} \to [0,1] \text{ medida de probabilidade} : \mu_\beta(A|\mathcal{F}_{\Lambda^c})(\omega) = \mu^{\omega}_{\Lambda,\beta}(F)\ \mu_\beta - \text{q.t.p}\}.$$

Por isto nos referimos a medida ν do espaço de probabilidade $(E, \mathscr{E}, \nu)$ como a medida a priori.

Definição 73 (Distância da Variação Total). *Sejam $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. Dadas quaisquer $\mu, \nu : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ medidas finitas. Definimos a distância da variação total entre μ e ν por*

$$\|\mu - \nu\| = 2 \cdot \sup_{A\in\mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)|$$

Teorema 74 (Teorema da Unicidade de Dobrushin). *Sejam (E, d) espaço métrico compacto e $\mathscr{E}$ a σ-álgebra de borel de E. Considere $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ e $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\in\mathscr{L}}$ uma especificação local em $(\Omega, \mathcal{F})$ satisfazendo a propriedade de Feller. Para cada par $i, j \in \mathbb{Z}^d$ defina*

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2} \sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega \\ \omega_k=\eta_k\,\forall\, k\neq i}} \left\| \mu^{\omega}_{\{j\},\beta} - \mu^{\eta}_{\{j\},\beta} \right\|.$$

Se a condição de Dobrushin

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \rho_{i,j} < 1$$

é satisfeita então a especificação local é compatível com no máximo uma medida de Gibbs.

Prova. Para cada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função contínua, vamos denotar sua variação no ponto $i \in \mathbb{Z}^d$ por

$$\delta_i(f) = \sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega \\ \omega_k=\eta_k\,\forall\, k\neq i}} |f(\omega) - f(\eta)|$$

e sua variação total por

$$\Delta(f) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \delta_i(f).$$

Chamaremos de $\mathcal{T}$ o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas em Ω de variação total finita, isto é, $\mathcal{T} = \{f \in C(\Omega, \mathcal{F}) :\ \Delta(f) < +\infty\}$.

Exercício 48. *Mostre que para toda função $f \in C(\Omega, \mathcal{F})$ existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{T}$ tal que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$. Em outras palavras, $\mathcal{T}$ é denso em $C(\Omega, \mathcal{F})$ na topologia da convergência uniforme.*

Próximo passo será construir uma função $\mathbb{T} : C(\Omega, \mathcal{F}) \to C(\Omega, \mathcal{F})$. Seja $i_1, i_2, \ldots$ uma enumeração de todos os pontos de $\mathbb{Z}^d$ (que estará fixada em toda a demonstração) e para cada $f \in C(\Omega, \mathcal{F})$, vamos mostrar que a aplicação que leva $f \mapsto \mathbb{T}(f)$ dada por

$$\mathbb{T}f(\eta) = \lim_{n\to\infty} \mu^{(\eta)}_{\{i_1\},\beta} \cdots \mu^{(\cdot)}_{\{i_n\},\beta}(f), \tag{5.2}$$

está bem definida.

Vamos usar os seguintes fatos para justificar que o lado direito acima está bem definido.

Exercício 49. *Se (E, d) é espaço métrico compacto então $C(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F}) = C_{qloc}(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$.*

Exercício 50. *Existe o limite em (5.2) para toda $f \in C_{loc}(\Omega, \mathcal{F})$ e $\mathbb{T}f \in C(\Omega, \mathcal{F})$.*

Dica. Prove que $\mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta} \cdots \mu^{(\cdot)}_{\{i_n\},\beta}(f)$ é uma sequência de Cauchy em $(C(\Omega, \mathcal{F}), \|\cdot\|_\infty)$.

Seja $f \in C_{qloc}(\Omega, \mathcal{F})$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C_{loc}(\Omega, \mathcal{F})$ satisfazendo $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \geq n_0$ então temos

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}(f_n)(\omega) - \mathbb{T}(f_m)(\omega)| &= \lim_{k\to\infty} |\mu^{(\omega)}_{\{i_1\},\beta} \cdots \mu^{(\cdot)}_{\{i_k\},\beta}(f_n - f_m)| \\ &\leq \|f_n - f_m\|_\infty \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Desta forma podemos definir para cada $\omega \in \Omega$

$$\mathbb{T}(f)(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{T}(f_n)(\omega)$$

Exercício 51. *Mostre que se $f \in C_{qloc}(\Omega, \mathcal{F})$ então a função $\mathbb{T}(f)$ está bem definida, isto é, não depende da escolha da sequência de Cauchy usada na igualdade acima.*

Já que $(C_{qloc}(\Omega, \mathcal{F}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach e $(\mathbb{T}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy neste espaço então seu limite $\mathbb{T}(f) \in C_{bqloc}(\Omega, \mathcal{F})$. Usando agora que $C(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F}) = C_{qloc}(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ temos que $\mathbb{T}(f)$ está definido para toda função contínua.

Se μ_β é uma medida de probabilidade especificada por $\left\{\mu^{(\cdot)}_{\Lambda,\beta}\right\}_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d}$ segue do Teorema da convergência dominada e das equações DLR que

$$\begin{aligned} \mu_\beta(\mathbb{T}(f)) &= \mu_\beta\left(\lim_{n\to\infty} \mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta} \cdots \mu^{(\cdot)}_{\{i_n\},\beta}(f)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_\beta \cdot \mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta} \cdots \mu^{(\cdot)}_{\{i_n\},\beta}(f) \qquad (5.3) \\ &= \mu_\beta(f). \end{aligned}$$

Próximo passo é mostrar que $\mathbb{T}$ é uma contração com respeito a semi-norma Δ, sempre que

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\rho_{i,j}\leq\alpha<1,$$

isto é, vamos mostrar que $\Delta(\mathbb{T}(f))\leq\alpha\Delta(f)$, para qualquer função $f\in\mathcal{T}$.

Lema. Seja $f\in\mathcal{T}$. Então

1. $\delta_i(\mu_{\{i\},\beta}(f))=0$;
2. para $i\neq j$, temos $\delta_i(\mu_{\{j\},\beta}(f))\leq\delta_i(f)+\rho_{i,j}\delta_j(f)$.

Prova do Lema. A propriedade 1 segue diretamente da definição de especificação local já que $\mu_{\{i\},\beta}(f)$ é $\mathcal{F}_{\{i\}^c}$-mensurável e portanto não depende da variável de spin no sítio i. Logo sua variação neste sítio é zero. Prova do item 2. Suponha que $i\neq j$ então

$$\begin{aligned}\delta_i(\mu_{\{j\},\beta}(f)) &= \sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall\,k\neq i}}|\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}(f)-\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}(f)|\\ &= \sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall\,k\neq i}}\left|\int_\Omega f(\sigma_j,\omega_{\{j\}^c})\,d\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}(\sigma)-\int_\Omega f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c})\,d\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}(\sigma)\right|\end{aligned}$$

Somando e subtraindo dentro do módulo da expressão acima a seguinte integral $\int_\Omega f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c})\,d\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}(\sigma)$ obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\delta_i(\mu_{\{j\},\beta}(f)) \leq \sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall\,k\neq i}}&\left[\int_\Omega|f(\sigma_j,\omega_{\{j\}^c})-f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c})|\,d\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}(\sigma)\right.\\ &\left.+\left|\int_\Omega f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c})\,d\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}(\sigma)-\int_\Omega f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c})\,d\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}(\sigma)\right|\,\right]\end{aligned}$$

O primeiro termo da soma acima é por definição de variação cotado por

$$\sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall\,k\neq i}}\int_\Omega|f(\sigma_j,\omega_{\{j\}^c})-f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c})|\,d\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}(\sigma)\leq\delta_i(f).$$

Para o segundo termo usamos o fato de que a integral de qualquer função constante com respeito a qualquer medida de probabilidade é a própria constante. Tomando esta constante igual a $\inf\limits_{\tau_j\in E} f(\tau_j,\eta_{\{j\}^c})$ podemos reescrever a segunda parcela como segue

$$\sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall\, k\neq i}}\left|\int_\Omega [f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c}) \;-\; \inf_{\tau_j\in E} f(\tau_j,\eta_{\{j\}^c})]\, d\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}(\sigma) + \right.$$
$$\left. + \int_\Omega [f(\sigma_j,\eta_{\{j\}^c}) - \inf_{\tau_j\in E} f(\tau_j,\eta_{\{j\}^c})]\, d\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}(\sigma)\right|.$$

Observando que em ambas as integrais acima que o integrando é o mesmo segue diretamente da definição da distância da variação entre duas medidas que o valor absoluto acima é majorado por

$$\frac{1}{2}\sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall\, k\neq i}}\left\|\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}-\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}\right\|\delta_j(f).$$

Combinando as estimativas das duas parcelas terminamos a prova do item 2 do lema. Seguimos com a demonstração de outro lema auxiliar

Lema. Seja $f\in\mathcal{T}$. Se $\sup\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}^d}\rho_{i,j}<\alpha$. Então para todo $n\in\mathbb{N}$ temos

$$\Delta\Big(\mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta}\cdots\mu^{(\cdot)}_{\{i_n\},\beta}(f)\Big)\leq \alpha\sum_{k=1}^{n}\delta_{i_k}(f)+\sum_{k\geq n+1}\delta_{i_k}(f) \tag{5.4}$$

Prova. A prova será feita por indução em n. Note que o caso $n=1$ é verdadeiro pela definição de Δ. De fato, por hipótese temos $\sup\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}\rho_{j,i_1}\leq\alpha$, isto é,

$$\rho_{j,i_1}=\frac{1}{2}\sup_{\substack{\omega,\eta\in\Omega\\ \omega_k=\eta_k\,\forall\, k\neq j}}\left\|\mu^{\omega}_{\{i_1\},\beta}-\mu^{\eta}_{\{i_1\},\beta}\right\|\leq\alpha \qquad \text{para todo } j\in\mathbb{Z}^d.$$

Logo

$$\Delta\Big(\mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta}(f)\Big)=\delta_{i_1}\Big(\mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta}(f)\Big)+\sum_{k\geq 2}\delta_{i_k}\Big(\mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta}(f)\Big)\leq\alpha\delta_{i_1}(f)+\sum_{k\geq 2}\delta_{i_k}(f).$$

Pela hipótese de indução temos

$$\Delta\Big(\mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta}\cdots\mu^{(\cdot)}_{\{i_n\},\beta}\cdot\mu^{(\cdot)}_{\{i_{n+1}\},\beta}(f)\Big)\;\leq\;\alpha\sum_{k=1}^{n}\delta_{i_k}(\mu^{(\cdot)}_{\{i_{n+1}\},\beta}(f))+\sum_{k\geq n+1}\delta_{i_k}(\mu^{(\cdot)}_{\{i_{n+1}\},\beta}(f)).$$

Observe que a primeira parcela, no segundo somatório acima é nula, isto é, $\delta_{i_{n+1}}(\mu^{(\cdot)}_{\{i_{n+1}\},\beta}(f)) = 0$. Usando este fato e o item 2 do primeiro lema podemos cotar ambas as parcelas da desigualdade acima por

$$\alpha\sum_{k=1}^{n}[\delta_{i_k}(f) + \rho_{i_k,i_{n+1}} \cdot \delta_{i_{n+1}}(f)] + \sum_{k\geq n+2}^{\infty}[\delta_{i_k}(f) + \rho_{i_k,i_{n+1}} \cdot \delta_{i_{n+1}}(f)]$$

que por sua vez é menor ou igual a

$$\alpha\sum_{k=1}^{n}\delta_{i_k}(f) + \sum_{k=1}^{\infty}\rho_{i_k,i_{n+1}} \cdot \delta_{i_{n+1}}(f) + \sum_{k\geq n+2}^{\infty}\delta_{i_k}(f).$$

Como estamos assumindo que $\sup_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{i\in\mathbb{Z}^d}\rho_{i,j} < \alpha$, o segundo somatório acima é limitado superiormente por $\alpha\delta_{i_{n+1}}(f)$ e assim o lema está demonstrado.

Utilizando o lema acima já podemos mostrar que $\mathbb{T}$ é uma contração com respeito a semi-norma determinada por Δ. De fato, para toda $f \in \mathcal{T}$ temos diretamente do lema anterior e da definição de Δ, tomando o limite $n \to \infty$, que

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbb{T}f) &\leq \lim_{n\to\infty}\Delta\Big(\mu^{(\cdot)}_{\{i_1\},\beta}\cdots\mu^{(\cdot)}_{\{i_n\},\beta}(f)\Big)\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left[\alpha\sum_{k=1}^{n}\delta_{i_k}(f) + \sum_{k\geq n+1}\delta_{i_k}(f)\right]\\
&= \alpha\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{i_k}(f)\\
&= \alpha\Delta(f).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Outro fato importante que será necessário para no curso da demonstração é que se $\Delta(f) = 0$ então $f \equiv const.$. Observe que para provar este fato é suficiente mostrar que

$$\sup_{\omega\in\Omega} f(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leq \Delta(f). \tag{5.6}$$

De fato, já que f é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e $\omega^+, \omega^- \in \Omega$, com $\omega^+_{\Lambda^c} = \omega^-_{\Lambda^c}$, tais que

$$\sup_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leq f(\omega^+) + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad f(\omega^-) - \varepsilon \leq \inf_{\omega\in\Omega} f(\omega).$$

Usando uma expansão telescópica temos

$$f(\omega^+) - f(\omega^-) \leq \sum_{i\in\Lambda}\delta_i(f) \leq \Delta(f),$$

de onde segue imediatamente que

$$\sup f - \inf f \leq \Delta(f) + 2\varepsilon$$

e esta cota prova que se $\Delta(f) = 0$ então $f \equiv const.$.

Agora vamos usar os fatos mostrados acima para finalizar a demonstração do Teorema de Dobrushin. Suponha que μ_β seja uma medida especificada por $\left\{\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}\right\}_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d}$, então segue de (5.3) que

$$\mu_\beta(f) = \mu_\beta(\mathbb{T}(f)) = \mu_\beta(\mathbb{T}^n(f)) \tag{5.7}$$

Usando a desigualdade (5.5) iterativamente temos que $\Delta(\mathbb{T}^n(f)) \leq \alpha^n \Delta(f)$, como $\alpha < 1$ esta desigualdade implica imediatamente que existe o limite $\lim_{n\to\infty} \Delta(\mathbb{T}^n(f)) = 0$. Vamos mostrar em seguida, que este fato implica que para todo $\omega \in \Omega$ existe $\lim_{n\to\infty} \mathbb{T}^n(f)(\omega) = \mathbb{T}^\infty(f)(\omega)$, além do mais que esta função é constante, isto é, $\mathbb{T}^\infty(f)(\omega) \equiv c(f)$.

Observe que para qualquer $f \in \mathcal{T}$ temos $\mathbb{T}(f)(\omega) \leq \sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)$ e portanto $\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}(f)(\omega) \leq \sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)$. Aplicando iterativamente esta desigualdade temos para todos naturais $m > n$ que

$$\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^m(f)(\omega) \leq \sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \leq \sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)$$

por outro lado, temos que $\inf_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leq \mathbb{T}(f)$ e tomando o ínfimo nesta desigualdade temos também que $\inf_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leq \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}(f)$. Daí para todos naturais $m > n$ temos

$$\inf_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leq \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \leq \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^m(f)(\omega).$$

Portanto $\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)$ e $\inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)$ são sequências de números reais monótonas ambas limitadas superiormente e inferiormente por $\sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)$ e $\inf_{\omega\in\Omega} f(\omega)$, respectivamente. Logo ambas convergem. Denotamos seus limites por

$$\mathbb{T}_+^\infty(f) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \qquad \text{e} \qquad \mathbb{T}_-^\infty(f) = \lim_{n\to\infty} \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)$$

Pela propriedade de Feller temos que $\mathbb{T}^n(f)$ é uma função contínua, assim podemos aplicar (5.6) e concluir que

$$\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \leq \Delta(\mathbb{T}^n(f)).$$

Como sabemos que $\Delta(\mathbb{T}^n(f)) \to 0$, segue da desigualdade acima que $\mathbb{T}_+^\infty(f) = \mathbb{T}_-^\infty(f) \equiv \mathbb{T}^\infty(f)$.

Pela definição de supremo e ínfimo temos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\mathbb{T}^n(f)(\omega) - \frac{1}{2}\left(\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) + \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)\right)\right|$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathbb{T}^n(f)(\omega) - \sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) + \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)\right|$$

$$\leq$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathbb{T}^n(f)(\omega) - \sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)\right| + \frac{1}{2}\left|\mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)\right|$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \mathbb{T}^n(f)(\omega)\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)\right)$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega)\right)$$

Já que $\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) + \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \to \mathbb{T}^\infty(f)$ e que $\sup_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} \mathbb{T}^n(f)(\omega) \to 0$ quando $n \to \infty$ concluímos da desigualdade acima que para todo $\omega \in \Omega$ que existe

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{T}^n(f)(\omega) = \mathbb{T}^\infty(f).$$

Usando este fato em (5.7) e o Teorema da Convergência Dominada concluímos que se μ_β e ν_β são compatíveis com a especificação $\left\{\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}\right\}_{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d}$ então

$$\mu_\beta(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_\beta(\mathbb{T}^n(f)) = \mathbb{T}^\infty(f) = \lim_{n\to\infty} \nu_\beta(\mathbb{T}^n(f)) = \nu_\beta(f),$$

para qualquer $f \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ é um conjunto denso em $C(\Omega, \mathcal{F})$ e Ω é um espaço métrico compacto, segue do Teorema de Riesz-Markov que $\mu_\beta = \nu_\beta$. $\square$

5.2 Critério de Unicidade de Dobrushin Para Especificações Gibbsianas

O objetivo desta seção é mostrar como podemos usar o Teorema de Dobrushin para concluir que $|\mathcal{G}_\beta(\Phi)| \leq 1$, com Φ sendo uma interação regular e β suficientemente pequeno. No caso em que o espaço de estados Ω é compacto sabemos $\mathcal{G}_\beta(\Phi) \neq \emptyset$ e portanto teremos a partir do Teorema de Dobrushin um critério de unicidade de medidas de Gibbs. No final desta seção apresentamos também alguns exemplos de aplicação deste teorema e discutimos sua otimalidade.

Lema 75. *Seja $(\Omega, \mathscr{F})$ um espaço mensurável e $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{F} \to [0, +\infty)$ duas medidas finitas tais que $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$. Se existe uma medida $\mu : \mathscr{F} \to [0, +\infty)$ tal que $\mu \ll \mu_1$ e $\mu \ll \mu_2$ e se $g_1 = \frac{d\mu_1}{d\mu}$ e $g_2 = \frac{d\mu_2}{d\mu}$. Então*

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = \int_\Omega |g_1 - g_2| \, d\mu.$$

Prova. Para qualquer $f : \Omega \to \mathbb{R}$ função $\mathscr{F}$-mensurável limitada e $m \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f \, d\mu_1 - \int_\Omega f \, d\mu_2 \right| &= \left| \int_\Omega (f - m)(g_1 - g_2) \, d\mu \right| \\ &\leq \int_\Omega |g_1 - g_2| \, d\mu \cdot \|f - m\|_\infty \end{aligned}$$

com a igualdade sendo válida se

$$f - m = \operatorname{sign}(g_1 - g_2)\|f - m\|_\infty. \tag{5.8}$$

Para $f = \chi_F$, onde $F \in \mathscr{F}$ e $m = 1/2$, temos imediatamente a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} |\mu_1(F) - \mu_2(F)| \leq \left| \int_\Omega \chi_F \, d\mu_1 - \int_\Omega \chi_F \, d\mu_2 \right| &\leq \int_\Omega |g_1 - g_2| \, d\mu \cdot \|f - m\|_\infty \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega |g_1 - g_2| \, d\mu. \end{aligned}$$

Desta desigualdade e da definição da distância da variação total segue que $\|\mu_1 - \mu_2\| \leq \int_\Omega |g_1 - g_2| \, d\mu$. Para finalizar observamos que a função característica do conjunto $F^* = \{\omega \in \Omega : g_1(\omega) > g_2(\omega)\}$ é tal que $\chi_{F^*} - 1/2 = 1/2 \cdot \operatorname{sign}(g_1 - g_2)$ e assim a equação (5.8) é satisfeita com $m = 1/2$ e portanto

$$|\mu_1(F^*) - \mu_2(F^*)| = \frac{1}{2} \int_\Omega |g_1 - g_2| \, d\mu.$$

Mostrando que de fato temos

$$\|\mu_1 - \mu_2\| = \int_\Omega |g_1 - g_2|\, d\mu.$$

□

Teorema 76. *Sejam $(E, \mathscr{E}, \nu)$ um espaço de probabilidade que é também um espaço métrico compacto com respeito a alguma métrica d, $\Omega = E^{\mathbb{Z}^d}$ e $\Phi = \{\Phi_A\}_{A\in\mathscr{L}}$ uma interação regular definida em $(\Omega, \mathcal{F})$. Considere Hamiltoniano a volume Λ dado por*

$$H_\Lambda(\sigma) = -\sum_{A\cap\Lambda\neq\emptyset} \Phi_A(\sigma)$$

e seja $\left\{\mu_{\Lambda,\beta}^{(\cdot)}\right\}_{\Lambda\in\mathscr{L}}$ a especificação Gibbsiana definida por

$$\mu_{\Lambda,\beta}^{\omega}(F) = \frac{1}{Z_{\Lambda,\beta}^{\omega}} \int_{E^\Lambda} \chi_F(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c}) \cdot e^{-\beta H_\Lambda(\sigma_\Lambda\omega_{\Lambda^c})} \prod_{i\in\Lambda} d\nu(\sigma_i).$$

Para todo $\beta > 0$ satisfazendo

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{A\ni i} (|A|-1)\|\Phi_A\|_\infty < \frac{1}{\beta}$$

temos que $|\mathcal{G}_\beta(\Phi)| \leq 1$. Além do mais se E é compacto então para todo β satisfazendo a condição acima temos $|\mathcal{G}_\beta(\Phi)| = 1$.

Prova. Sejam $i, j \in \mathbb{Z}^d$ tais que $i \neq j$, $\omega, \eta \in \Omega$ tais que $\omega_{\{i\}^c} = \eta_{\{i\}^c}$. Considere as funções $f_0, f_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_0(\sigma) = -\beta H_{\{j\}}(\sigma_j\omega_{\{j\}^c}) \qquad \text{e} \qquad f_1(\sigma) = -\beta H_{\{j\}}(\sigma_j\eta_{\{j\}^c}).$$

e seja $f = f_1 - f_0$. Já que ω e η estão fixados podemos pensar que f, f_0 e f_1 são funções apenas da variável de spin no sítio i. Seja

$$\mathrm{Var}(f) := \sup_{\sigma_1,\sigma_2\in\Omega} |f(\sigma_1) - f(\sigma_2)| = \sup_{\sigma\in\Omega} f(\sigma) - \inf_{\sigma\in\Omega} f(\sigma).$$

Claramente temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(f) &\leq \beta \sup_{\sigma_j,\tau_j\in E} \sum_{A\ni j} |H_{\{j\}}(\sigma_j\eta_{\{j\}^c}) - H_{\{j\}}(\sigma_j\omega_{\{j\}^c}) - H_{\{j\}}(\tau_j\eta_{\{j\}^c}) + H_{\{j\}}(\tau_j\omega_{\{j\}^c})| \\
&\leq 2\beta \sum_{A\ni\{i,j\}} \delta_j(\Phi_A). \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Para cada $0 \leq t \leq 1$ defina $f_t := tf_1 + (1-t)f_0 = f_0 + tf$,

$$g_t = \frac{e^{f_t}}{\int_E e^{f_t}\, d\nu} \qquad \text{e} \qquad \nu_t = g_t \nu.$$

Tomando $t = 0$ e $t = 1$ obtemos respectivamente

$$\mu_0 = g_0 \nu = \frac{e^{f_0}}{\int_E e^{f_0}\, d\nu} \cdot \nu = \frac{e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \omega_{\{j\}^c})}}{\int_E e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \omega_{\{j\}^c})}\, d\nu} \cdot \nu$$

e

$$\mu_1 = g_1 \nu = \frac{e^{f_1}}{\int_E e^{f_1}\, d\nu} \cdot \nu = \frac{e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \eta_{\{j\}^c})}}{\int_E e^{-\beta H_{\{j\}}(\sigma_j \eta_{\{j\}^c})}\, d\nu} \cdot \nu.$$

Note que $\mu_0 = \mu^{\omega}_{\{j\},\beta}$ e $\mu_1 = \mu^{\eta}_{\{j\},\beta}$. Assim para obter uma cota superior para

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2} \sup_{\substack{\omega,\eta \in \Omega \\ \omega_k = \eta_k \, \forall\, k \neq i}} \left\| \mu^{\omega}_{\{j\},\beta} - \mu^{\eta}_{\{j\},\beta} \right\|.$$

basta cotar superiormente $\|\mu_0 - \mu_1\|$. Neste caso como μ_0 e μ_1 são absolutamente contínuas com respeito a medida a priori μ podemos aplicar o Lema 75, o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Fubini-Tonelli para obter a seguinte majoração

$$\begin{aligned}
\|\mu_0 - \mu_1\| &= \int_\Omega |g_0 - g_1|\, d\nu \\
&= \int_\Omega \left| \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\, g_t \right] dt \right| d\nu \\
&\leq \int_0^1 \int_\Omega \left| \frac{d}{dt}\, g_t \right| d\nu\ dt
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Exercício 52. *Mostre que a aplicação $t \mapsto g_t$ é diferenciável para que fique justificada a segunda igualdade acima.*

Pelo Teorema da Convergência Dominada podemos mostrar que

$$\frac{d}{dt} \int_E e^{f_t}\, d\nu = \int_E f \cdot e^{f_t}\, d\nu$$

aplicando então a regra do quociente segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\, g_t &= \frac{f e^{f_t}\cdot\left[\int_E e^{f_t}\, d\nu\right] - e^{f_t}\cdot\left[\int_E f\cdot e^{f_t}\, d\nu\right]}{\left[\int_E e^{f_t}\, d\nu\right]^2} \\ &= f g_t - g_t \int_E f\cdot g_t\, d\nu \\ &= g_t\left[f - \int_E f\, d\nu_t\right].\end{aligned}$$

Usando a expressão acima no lado direito de (5.10) obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|\mu_0 - \mu_1\| &\leq \int_0^1 \int_\Omega \left| g_t\left(f - \int_E f\, d\nu_t\right)\right| d\nu\ dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_\Omega \left| f - \int_E f\, d\nu_t\right| d\nu_t\right] dt \\ &\leq \int_0^1 \left[\int_\Omega \left| f - \int_E f\, d\nu_t\right|^2 d\nu_t\right]^{\frac{1}{2}} dt.\end{aligned}$$

Para obter a desigualdade acima usamos que ν_t é medida de probabilidade e também a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Já que para todo $m \in \mathbb{R}$ temos

$$\left[\int_\Omega \left| f - \int_E f\, d\nu_t\right|^2 d\nu_t\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_\Omega |f - m|^2\, d\nu_t\right]^{\frac{1}{2}}$$

segue que

$$\|\mu_0 - \mu_1\| \leq \int_0^1 \left[\int_\Omega |f - m|^2\, d\mu_t\right]^{\frac{1}{2}} dt \leq \|f - m\|_\infty.$$

Escolhendo

$$m = \frac{1}{2}\left(\sup_{\sigma\in\Omega} f(\sigma) + \inf_{\sigma\in\Omega} f(\sigma)\right),$$

obtemos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
\|f-m\|_\infty &= \sup_{\sigma\in\Omega}\left|f(\sigma)-\frac{1}{2}\left(\sup_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)+\inf_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\sup_{\sigma\in\Omega}\left|f(\sigma)-\sup_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)+f(\sigma)-\inf_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\sup_{\sigma\in\Omega}\left(\left|f(\sigma)-\sup_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)\right|+\left|f(\sigma)-\inf_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\sup_{\sigma\in\Omega}\left(\sup_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)-f(\sigma)+f(\sigma)-\inf_{\sigma\in\Omega}f(\sigma)\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Var}(f).
\end{aligned}
$$

Portanto temos $2\|\mu_0-\mu_1\|\leq \mathrm{Var}(f)$. Como já comentado anteriormente $\mu_0=\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}$ e $\mu_1=\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}$. Logo $2\left\|\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}-\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}\right\|\leq \mathrm{Var}(f)$. Pela desigualdade (5.9) concluímos que

$$\left\|\mu^{\omega}_{\{j\},\beta}-\mu^{\eta}_{\{j\},\beta}\right\|\leq \beta\sum_{A\ni\{i,j\}}\delta_j(\Phi_A).$$

Como estamos supondo desde o início da prova que $\omega_{\{i\}^c}=\eta_{\{i\}^c}$ a desigualdade acima implica pela definição de $\rho_{i,j}$ que

$$\rho_{i,j}\leq\frac{\beta}{2}\sum_{A\ni\{i,j\}}\delta_j(\Phi_A).$$

Consequentemente, usando que $\rho_{i,i} = 0$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \rho_{i,j} &\leq \frac{\beta}{2} \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}^d\\ i\neq j}} \sum_{A\ni\{i,j\}} \delta_j(\Phi_A) \\
&\leq \beta \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}^d\\ i\neq j}} \sum_{A\ni\{i,j\}} \|\Phi_A\|_\infty \\
&= \beta \sum_{A\ni j} \sum_{\substack{i\in A\\ i\neq j}} \|\Phi_A\|_\infty \\
&= \beta \sum_{A\ni j} (|A|-1)\|\Phi_A\|_\infty
\end{aligned}
$$

Tomando o supremo sobre todos os pontos $j \in \mathbb{Z}^d$ obtemos

$$
\sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \rho_{i,j} \leq \beta \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{A\ni j} (|A|-1)\|\Phi_A\|_\infty.
$$

Como toda especificação Gibbsiana definida a partir de uma interação regular tem a propriedade de Feller, basta aplicar o Teorema de Dobrushin para concluir a prova deste teorema. □

Exercício 53. (Gás de Rede) *Sejam $E = \{0,1\}$ e μ a medida da contagem sobre o conjunto das partes de E. Denote por $\mathscr{L}$ a coleção de todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}^d$. Considere a interação $\Phi = \{\Phi_A\}_{A\in\mathscr{L}}$ em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ dada por*

$$
\Phi_A(\omega) = \begin{cases} K(A), & \text{se } \omega_A = 1; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}
$$

onde $|K(A)| \leq e^{-2|A|}$ se $\#A \leq 3$ e $K(A) = 0$ caso contrário. (Φ é conhecido como potencial de um gás com estado de vacuum 0.)
para quais valores de β o critério de Dobrushin garante que este modelo tem apenas uma medida de Gibbs ?

Exercício 54. (Modelo de Ising de primeiros vizinhos com campo magnético) *Sejam $E = \{-,+\}$ e $\mu = \frac{1}{2}\delta_+ + \frac{1}{2}\delta_-$ a medida a priori uniforme. Considere a interação $\Phi = \{\Phi_A\}_{A\in\mathscr{L}}$ em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ dada por*

$$
\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} J\sigma_i\sigma_j, & \text{se } A = \{i,j\} \text{ e } \|i-j\| = 1; \\ h\sigma_i, & \text{se } A = \{i\}; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}
$$

onde $J, h \in \mathbb{R}$ são constantes fixadas. Encontre em função de J, h e d o valor máximo de β fornecido pelo Teorema 76. O que acontece com β se $d \to \infty$?

Exercício 55. (Modelo de Ising de longo alcance) *Sejam $E = \{-,+\}$, $\mu = \frac{1}{2}\delta_+ + \frac{1}{2}\delta_-$, $\varepsilon > 0$ e para $i \neq j$,*

$$J_{ij} = \frac{1}{\|i-j\|^{d+\varepsilon}}.$$

Considere a interação $\Phi = \{\Phi_A\}_{A \in \mathscr{L}}$ em $(E^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{F})$ dada por

$$\Phi_A(\sigma) = \begin{cases} J_{ij}\, \sigma_i \sigma_j, & \textit{se } A = \{i,j\}; \\ 0, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

Mostre que Φ é regular e em seguida, encontre uma estimativa para o maior valor possível de β para o qual o Teorema 76 garante a unicidade da Medida de Gibbs deste modelo.

5.3 Transição de Fase e o Argumento de Peierls

Já que estabelecemos condições para unicidade de $\mathcal{G}_\beta(\Phi)$ é natural procurar por situações onde a unicidade não é válida. A possibilidade da existência de mais de uma medida de Gibbs para modelos tipo de Ising, e o estabelecimento deste fato por argumentos rigorosos em vários modelos, como Ising, constituiu um dos grandes triunfos da Mecânica Estatística.

Ao contrário do que acontece no estudo da unicidade da medida de Gibbs, onde temos o critério de Dobrushin que é bastante geral, o estudo de transição de fase requer com a técnicas atuais o estudo de caso a caso. Existem várias ferramentas para investigar estes problemas, uma das mais poderosas é conhecida como chamada teoria de Pirogov-Sinai, mas mesmo depois de ter sido bastante desenvolvida ainda é uma ferramenta que está longe de dar uma resposta satisfatória sobre existência do fenômeno de transição de fase para uma classe de modelos (ou mesmo para um modelo em particular) a respeito da região de β onde temos mais de uma medida por exemplo.

A base da maioria dos métodos para provar a existência de múltiplas medidas de Gibbs é o argumento de Peierls. Vamos explicá-lo no contexto em que ele foi originalmente criado (no modelo de Ising) e depois apontar algumas referências posteriores.

A intuição por trás deste argumento é a seguinte. Em baixas temperaturas as medidas de Gibbs do modelo de Ising devem favorecer configurações que minimizem H_Λ. No caso da presença de um campo magnético $h \in \mathbb{R}$, sabemos do exercícios (23), (24), (25), (26) e (27) quais são exatamente as configurações minimizantes de H_Λ. Vimos também que apenas no caso em que $h = 0$ que temos dois estados fundamentais do sistema, que são, as configurações $\omega, \eta \in \Omega$ dadas por $\omega_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}^d$ e $\eta_i = -1$, para todo $i \in \mathbb{Z}^d$. Baseado nestas informações é razoável tentar entender como se comportam as configurações cujas as energias são próximas da energia do estado fundamental e este estudo leva a considerar o conceito de contornos.

Para simplificar a exposição a partir de agora vamos considerar o modelo de Ising em $\mathbb{Z}^2$. Se $\|i - j\|$ denota a distância entre dois pontos arbitrários de $\mathbb{Z}^2$, temos naturalmente associado ao espaço métrico $(\mathbb{Z}^2, \|\cdot\|)$, um grafo G cujo o conjunto de vértices é formado pelos pontos da rede $\mathbb{Z}^2$ e o conjunto de arestas formado pelo conjunto de pares de primeiros vizinhos, isto é, o conjunto dos pares $i, j \in \mathbb{Z}^d$ tais que $\|i - j\| = 1$.

Referências Bibliográficas

[1] R. Bartle: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. 1° Ed. Wiley-Interscience; 1995.

[2] R. Bhattacharya and E.C. Waymire: *A basic Course in Probability Theory*. Universitext. Springer-Verlag; 2007.

[3] A. Bovier: *Lecture notes Gibbs measures and phase transitions - part 1*. Diponível em `http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~bovier/files/note1.pdf`, acessado em 29/01/2012.

[4] A. Bovier: *Lectures notes Gibbs measures and phase transitions - part 2*. Diponível em `http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~bovier/files/note2.pdf`, acessado em 29/01/2012.

[5] R. Bowen: *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. 2° Ed. Lectures Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 2008.

[6] K.L. Chung: *A course in Probability Theory*. 3° Ed. Academic Press; 2001.

[7] J.B. Conway: *A Course in Functional Analysis*. Second Edition, GTM-Springer, 2007.

[8] R.S. Ellis: *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, 1985.

[9] P.J. Fernández: *Medida e Integração*. 2° ed. Projeto Euclides; 2007.

[10] R. Fernández: *Gibbsianness and Non-Gibbsianess in Lattice Random Fields*. Les Houches, Session LXXXIII 2005 Mathematical Statistical Physics, Elsevier; 2006.

[11] G.B. Folland: *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications*. Pure and Applied Mathematics (New York) (Second ed.). New York: John Wiley & Sons Inc; 1999.

[12] H.-O. Georgii: *Gibbs Measures and Phase Transitions(Second Edition)*. De Gruyter Studies in Mathematics; 9. Walter de Gruyter & Co; 2011.

[13] R. B. Israel: *Convexity in the theory of lattice gases*. Princeton Series in Physics. Princeton Univ. Press, Princeton; 1979.

[14] G. Keller: *Equilibrium States in Ergodic Theory*. Student Texts; vol 42. Cambridge University Press; 1998.

[15] O.E. Lanford: *Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics*. Lecture notes in physics, vol. 20, Springer-Verlag; 1973.

[16] L. Lamport: *LaTeX A Document Preparation System*. Addison-Wesley, California; 1986.

[17] A. Le Ny: *Introduction to (generalized) Gibbs Measures*. Ensáios Matemáticos. Vol. 15, 1-126. SBM; 2008. `http://www.sbm.org.br/docs/ensaio_matematico/em_15_leny.pdf`, acessado em 29/01/2012.

[18] K. Oliveira: *Um Primeiro Curso em Teoria Ergódica com Aplicações*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2005.

[19] K. Oliveira and M. Viana: *Introdução à Teoria Ergódica*. Livro a ser publicado.

[20] K.R. Parthasarathy: *Probability Measures on Metric Spaces*. A.M.S., Providence 2005.

[21] W. Parry and M. Pollicot: *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*. Astérisque No. 187-188; 1990.

[22] F. Rassoul-Agha and T. Seppäläinen: *A course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures*. Disponível em `http://www.math.wisc.edu/~seppalai/ldp-book/rassoul-seppalainen-ldp.pdf`, acessado em 29/01/2012.

[23] M. Reed and B. Simon: *Functional Analysis*. (Methods of Modern Mathematical Physics) (vol 1). Academic Press; 1981.

[24] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*. 3° Ed. McGraw-Hill Science; 1986.

[25] O. Sarig: *Lecture Notes on Thermodynamic Formalism for Topological Markov Shifts*; 2009. Disponível em `http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~sarigo/TDFnotes.pdf`, acessado em 29/01/2012.