Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

O Dual Topológico do Espaço da Funções Contínuas Definidas Sobre um Espaço Métrico Compacto

Notas de Aula

L. Cioletti

Junho de 2024

Resumo

Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $\big(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ o espaço de Banach das funções à valores reais, contínuas, definidas sobre X; munido da norma do supremo. Nesta notas, vamos mostrar que o dual topológico deste espaço de Banach, que será denotado por $C(X,\mathbb{R})^*$ é isometricamente isomorfo à $\big(\mathscr{M}_s(X,\mathscr{B}(X)), \|\cdot\|_{VT}\big)$, isto é, o espaço das medidas com sinal, finitas e definidas sobre a σ-álgebra de Borel de X; munido da norma da variação total.

Para obter o isomorfismo mencionado acima, vamos provar, no contexto de espaços métricos compactos, a validade do famoso Teorema de Representação de Riesz-Markov que afirma que se $\Phi : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado, positivo e normalizado, então existe uma única medida de probabilidade μ sobre $\mathscr{B}(X)$ tal que

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}).$$

1 Introdução

A proposta deste texto é apresentar uma prova completa e bem detalhada do Teorema de Representação de Riesz-Markov e mostrar como este teorema pode ser usado para construir explicitamente um espaço de Banach que é isometricamente isomorfo ao dual topológico do espaço das funções reais contínuas, definidas sobre um espaço métrico compacto.

Esta notas são baseadas em alguns dos resultados das Seções 1.4, 3.1, 4.1, 4.5, 7.1 e 7.3 da referência [1] e do Capítulo 1 da referência [2]. Na referência [1] o Teorema de Representação de Riesz-Markov é provado no contexto de espaços topológicos localmente compactos. Os argumentos envolvidos na prova dada em [1], dependem de diversos resultados espalhados pelos capítulos mencionados acima. Como o nível de generalidade considerado em cada um destes diversos capítulos é bastante distinto, não é difícil suspeitar que a tarefa de reunir todas as informações e organizá-las no mesmo contexto é muito dura para o leitor menos experiente.

O principal resultado deste texto é o Teorema de Representação de Riesz-Markov (Teorema 11), no contexto de espaços **métricos** compactos. Este teorema, apresentado na Seção 5, fornece uma caracterização, em termos de medidas, de funcionais lineares, positivos, normalizados e limitados, definidos sobre $C(X, \mathbb{R})$, onde (X, d) é um espaço métrico compacto arbitrário.

A versão do Teorema de Riesz-Markov apresentada neste texto, embora não seja a mais geral, abrange a maioria das aplicações mais comuns. Por exemplo, ela é aplicável ao estudo de medidas invariantes em fluxos gerados por EDO's em variedades compactas, bem como em diversos problemas na Teoria de Probabilidade, Mecânica Estatística e Teoria Ergódica.

Este texto foi elaborado de modo a oferecer explicações detalhadas e acessíveis das provas mencionadas nas referências anteriores, para leitores que possuam apenas um conhecimento básico da Teoria da Medida e Integração. Dedicamos especial atenção à clareza, utilizando ilustrações e até repetições intencionais para facilitar o entendimento dos conceitos mais complexos. Em vez de priorizar um estilo minimalista, focamos em garantir que a leitura seja fluida e intuitiva, mantendo os conceitos essenciais sempre próximos às explicações mais elaboradas. Embora seja um pouco longo, esperamos que a leitura seja bem suave.

O texto conta também com um pequeno apêndice que relaciona alguns fatos básicos sobre medidas exteriores, medidas com sinal e bem como algumas propriedades elementares de distâncias em espaços métricos.

Em um resumo, as técnicas usadas neste texto são muito parecidas com àquelas empregadas, em várias outras referências que consideram casos em que o espaço X pode ser mais geral que um espaço métrico compacto. Aqui, bem como em quase todos outros textos, a argumentação se baseia nos seguintes fatos de Análise Real:

- toda medida finita, definida na σ-álgebra de Borel de um espaço métrico é regular;
- Lema de Urysohn;
- partições da unidade subordinadas à coberturas abertas;
- Teorema de Extensão de Carathéodory;
- decomposição de funcionais lineares limitados em diferenças de funcionais positivos;
- Teorema da Decomposição de Hahn-Jordan.

Como optamos por apresentar a prova do Teorema de Representação de Riesz-Markov para o caso de espaços métricos compactos, alguns dos fatos mencionados acima admitem provas mais simples e explícitas. Por exemplo, quando assumimos que X é um espaço métrico, a prova do Lema de Urysohn se torna bastante intuitiva e geométrica. Além disto, quando assumimos a compacidade de X alguns argumentos baseados na regularidade das medidas são mais simples de serem compreendidos. Assumir a compacidade de X também facilita a construção de uma partição da unidade subordinada a uma cobertura aberta. Grosseiramente falando, assumindo que (X, d) é um espaço métrico compacto, a construção de praticamente todas as funções e dos demais objetos necessários na prova do teorema, podem ser obtidos explicitamente a partir de construções simples envolvendo a função de distância.

2 Regularidade das Medidas Finitas Definidas sobre $\mathscr{B}(X)$

Os principais objetivos desta seção são: introduzir o importante conceito de medida regular (Definição 1); e provar que qualquer medida μ finita definida sobre $\mathscr{B}(X)$ é uma medida regular (Teorema 8).

Antes de prosseguir, gostaríamos de mencionar que, embora os principais resultados destas notas assumam a compacidade de (X,d), alguns resultados auxiliares serão enunciados e provados para espaços métricos mais gerais. A razão dessa escolha é que, para esses resultados específicos, a hipótese de compacidade não simplifica a argumentação. Assim, para manter a clareza e evitar confusões, sempre que for necessário considerar a hipótese de compacidade, faremos menção explícita.

Relembramos que a σ-álgebra de Borel de um espaço métrico (X,d) é definida como sendo σ-álgebra gerada pelos subconjuntos abertos do espaço topológico (X,τ_d), onde τ_d denota a topologia em X induzida pela métrica d. Esta σ-álgebra será denotada, como de maneira usual, por $\mathscr{B}(X)$.

Uma medida μ sobre $\mathscr{B}(X)$ é uma função $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,+\infty]$ que satisfaz:

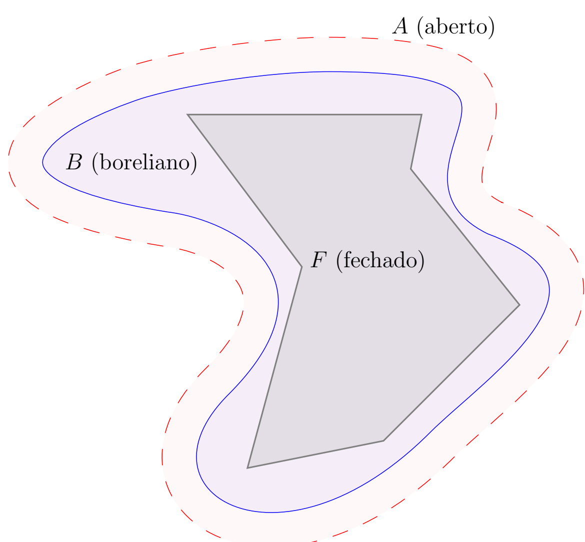
- $\mu(\varnothing) = 0$;
- $\mu(B) \geqslant 0$, para todo $B \in \mathscr{B}(X)$;
- se $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em $\mathscr{B}(X)$ dois-a-dois disjuntos, então
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Dizemos que uma medida μ é finita se $\mu(X) < +\infty$. Se $\mu(X) = 1$, então dizemos que μ é uma medida de probabilidade.

Definição 1 (Conjunto μ-regular e Medida Regular)**.** Sejam (X,d) um espaço métrico e μ uma medida sobre $\mathscr{B}(X)$. Dizemos que um boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ é μ-regular se

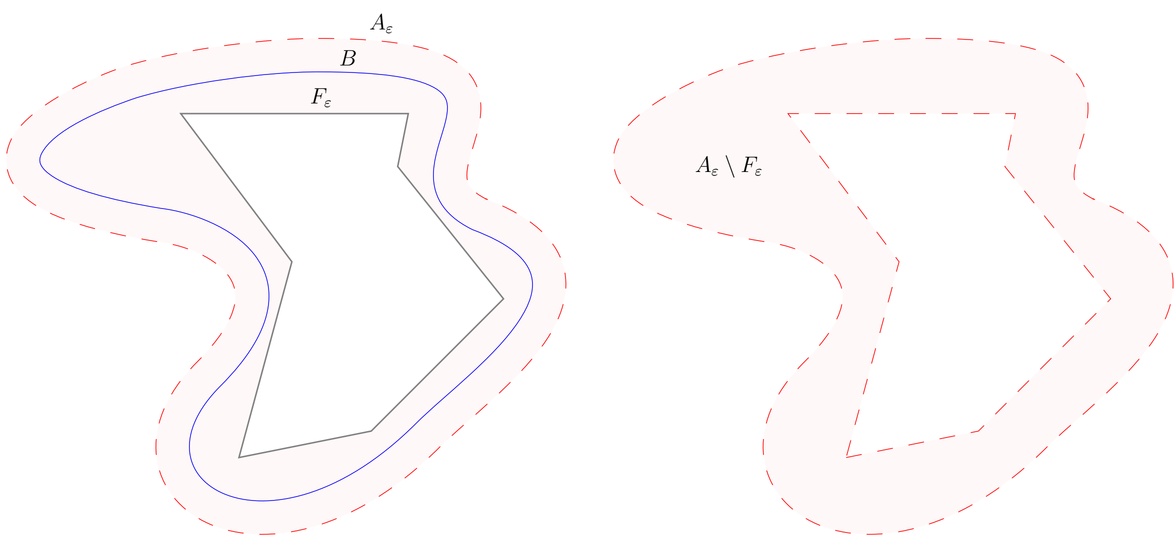
$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} \;=\; \mu(B) \;=\; \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

Se todo boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ é μ-regular, então dizemos que μ é regular.



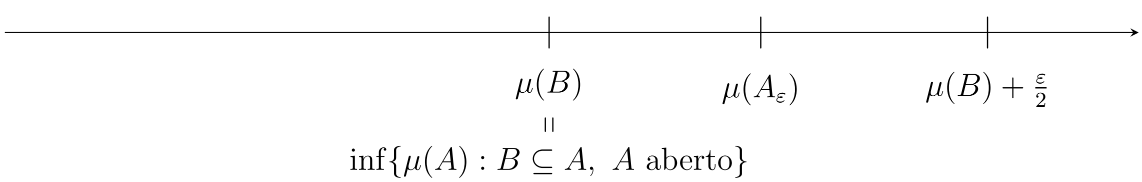
Antes de prosseguir para a prova do principal resultado desta seção que é o Teorema 8 vamos estabelecer novas (e mais simples) condições necessárias e suficientes para um conjunto $B \in \mathscr{B}(X)$ ser μ-regular. Em seguida, vamos mostrar que a coleção de todos os borelianos μ-regulares forma uma sub-σ-álgebra de $\mathscr{B}(X)$.

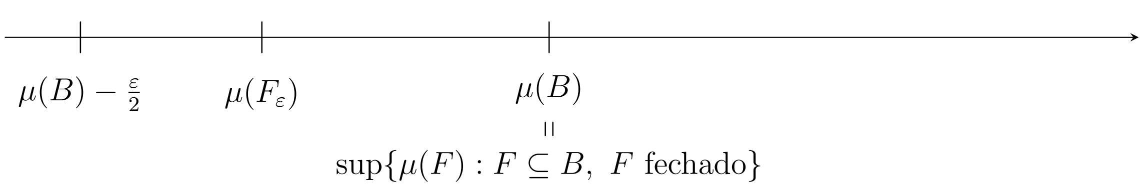
Lema 2. Sejam (X, d) um espaço métrico e μ uma medida definida sobre $\mathscr{B}(X)$ satisfazendo $\mu(X) < +\infty$. Um boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ é μ-regular se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem um conjunto aberto A_ε e um conjunto fechado F_ε tais que: $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.



Prova. Suponha inicialmente que $B \in \mathscr{B}(X)$ é um conjunto μ-regular. Então segue diretamente da Definição 1 que dado $\varepsilon > 0$, existem um conjunto aberto $A_\varepsilon \supseteq B$ e um conjunto fechado $F_\varepsilon \subseteq B$ satisfazendo:

- $\mu(A_\varepsilon) < \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}$;
- $\mu(B) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(F_\varepsilon)$.





Já que $F_\varepsilon \subseteq B$, segue da propriedade de monotonicidade da medida μ e da desigualdade acima que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \mu(F_\varepsilon) - \mu(B) \leqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(B) - \mu(F_\varepsilon)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Combinando estas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned}\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) &= \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon)\\ &< \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2} - \mu(F_\varepsilon)\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\mu(B) - \mu(F_\varepsilon)|\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

O que encerra a prova de que se $B \in \mathscr{B}(X)$ é μ-regular, então para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem um conjunto aberto A_ε e um conjunto fechado F_ε tais que: $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$.

Agora vamos provar a recíproca. Primeiro observamos que dado um Boreliano $B \in \mathscr{B}(X)$ temos da propriedade de monotonicidade da medida, para qualquer aberto $A \subseteq X$ satisfazendo $B \subseteq A$, que

$$\mu(B) \leqslant \mu(A) \implies \mu(B) \leqslant \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existem um aberto A_ε e um fechado F_ε tais que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e

$$\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(A_\varepsilon) - \mu(B) \leqslant \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Portanto segue da desigualdade acima que $\mu(A_\varepsilon) - \mu(B) < \varepsilon$ que por sua vez implica

$$\mu(A_\varepsilon) < \mu(B) + \varepsilon.$$

Daí segue da definição de ínfimo que $\inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\} \leqslant \mu(A_\varepsilon) < \mu(B) + \varepsilon$. Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue da desigualdade anterior que

$$\inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\} \leqslant \mu(B).$$

Como a desigualdade reversa foi estabelecida acima, podemos concluir que

$$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

Resta mostrar a igualdade $\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} = \mu(B)$. Como observado anteriormente, temos da hipótese que dado $\varepsilon > 0$, existem A_ε aberto e F_ε fechado tais que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$. Novamente pela monotonicidade de μ temos as seguintes desigualdades:

$$\mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(B) - \mu(F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Da última desigualdade segue imediatamente que $\mu(B) < \mu(F_\varepsilon) + \varepsilon$. Tomando o supremo, sobre todos os fechado contidos em B e observando que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\mu(B) \leqslant \sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\}.$$

Observe que a desigualdade reversa segue também da monotonicidade de μ. De fato, se F é um fechado tal que $F \subseteq B$ temos $\mu(F) \leqslant \mu(B)$ e portanto $\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} \leqslant \mu(B)$. Portanto podemos finalmente concluir que

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\}$$

o que completa a prova que B é μ-regular. $\blacksquare$

Proposição 3. Se (X,d) um espaço métrico e μ uma medida sobre $\mathscr{B}(X)$ satisfazendo $\mu(X) < +\infty$. Então a coleção

$$\mathscr{R} \equiv \{B \in \mathscr{B}(X) \,:\, B \text{ é } \mu\text{-regular}\}$$

é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Prova. A prova desta proposição é baseada em sucessivas aplicações do Lema 2.

Vamos começar mostrando que $\varnothing \in \mathscr{R}$. Primeiro, observe que o conjunto $\varnothing$ é simultaneamente aberto e fechado. Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar como conjunto aberto $A_\varepsilon = \varnothing$ e como conjunto fechado $F_\varepsilon = \varnothing$. Claramente, estes conjuntos satisfazem $F_\varepsilon \subseteq \varnothing \subseteq A_\varepsilon$ e já que μ é uma medida temos $0 = \mu(\varnothing) = \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue diretamente do Lema 2 que $\varnothing$ é μ-regular e consequentemente $\varnothing \in \mathscr{R}$.

Analogamente, já que o espaço todo, X, é também simultaneamente aberto e fechado, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar como conjunto aberto $A_\varepsilon = X$ e como conjunto fechado $F_\varepsilon = X$. Claramente que estes conjuntos satisfazem $F_\varepsilon \subseteq X \subseteq A_\varepsilon$ e como no parágrafo anterior temos $0 = \mu(\varnothing) = \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Novamente, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário podemos aplicar mais uma vez o Lema 2 e concluir X is μ-regular e portanto $X \in \mathscr{R}$.

Agora vamos mostrar que a coleção $\mathscr{R}$ é fechada por complementação, isto é, se $B \in \mathscr{R}$, então $B^c \in \mathscr{R}$. Sejam $B \in \mathscr{R}$ um conjunto arbitrário e $\varepsilon > 0$ dado. Já que B é μ-regular podemos afirmar que existem um conjunto aberto A_ε e um conjunto fechado F_ε tais que $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Observe que tomando complementares, temos $A_\varepsilon^c \subseteq B^c \subseteq F_\varepsilon^c$. Como estamos assumindo que μ é uma medida finita temos das propriedades elementares de uma medida e da última desigualdade que

$$\begin{aligned}
\mu(F_\varepsilon^c \setminus A_\varepsilon^c) &= \mu(F_\varepsilon^c) - \mu(A_\varepsilon^c) \\
&= \mu(X) - \mu(A_\varepsilon^c) - (\mu(X) - \mu(F_\varepsilon^c)) \\
&= \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) \\
&= \mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário podemos aplicar mais uma vez o Lema 2 e concluir que que B^c é μ-regular. Portanto concluímos que se $B \in \mathscr{R}$, então $B^c \in \mathscr{R}$ o que mostra que $\mathscr{R}$ é uma coleção fechada por complementares.

Para finalizar a prova desta proposição resta mostrar que $\mathscr{R}$ é uma coleção fechada para uniões enumeráveis. Sejam $B_1, B_2, \ldots$ uma sequência arbitrária em $\mathscr{R}$ e $B \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Dado $\varepsilon > 0$, segue da μ-regularidade de B_n e do Lema 2 que, para $n \in \mathbb{N}$, existem um aberto A_ε^n e um fechado F_ε^n tais que

$$F_\varepsilon^n \subseteq B_n \subseteq A_\varepsilon^n \qquad \text{and} \qquad \mu(A_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n) < \frac{\varepsilon}{3^n}. \tag{1}$$

Considere os conjuntos $A_\varepsilon \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_\varepsilon^n$ e $F \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_\varepsilon^n$. Alertamos que na notação deste último conjunto não está faltando o subíndice ε. Na verdade, vamos definir mais a frente quem será o conjunto fechado F_ε.

Note que segue da definição do conjunto F e do Teorema da Convergência Monótona que

$$\int_X \chi_F \, d\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)} \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)} \, d\mu$$

Já que estamos assumindo que $\mu(X) < +\infty$ segue das propriedades elementares de medida e da igualdade acima que

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \mu\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_\varepsilon^n\Big) &= \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_{F\setminus\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_F - \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\int_X \chi_F\, d\mu - \int_X \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu\right] \\
&= \int_X \chi_F\, d\mu - \lim_{N\to\infty} \int_X \chi_{\left(\cup_{n=1}^N F_\varepsilon^n\right)}\, d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto existe algum $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geqslant N_0$ temos

$$\mu\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_\varepsilon^n\Big) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Agora estamos prontos para definir o fechado F_ε. Já que uniões finitas de conjuntos fechados é um conjunto fechado, temos que $F_\varepsilon \equiv \bigcup_{n=1}^N F_\varepsilon^n$ é um conjunto fechado.

Por outro lado, como uniões arbitrárias de conjuntos abertos é um conjunto aberto temos que A_ε é um conjunto aberto.

Segue diretamente das definições dos conjuntos F, F_ε, A_ε e das relações de continência que aparecem em (1) que

$$F_\varepsilon \equiv \bigcup_{n=1}^{N} F_\varepsilon^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_\varepsilon^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \equiv B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_\varepsilon^n \equiv A_\varepsilon, \quad \text{ou seja,} \quad F_\varepsilon \subseteq F \subseteq B \subseteq A_\varepsilon.$$

Segue das propriedades elementares de medidas finitas e das desigualdades que aparecem em (1) e (2) que

$$\begin{aligned}
\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) &= \mu(A_\varepsilon) - \mu(F) + \mu(F) - \mu(F_\varepsilon) \\
&= \mu(A_\varepsilon \setminus F) + \mu(F \setminus F_\varepsilon) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_\varepsilon^n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_\varepsilon^n\right) + \mu(F \setminus F_\varepsilon) \\
&\leqslant \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n\right)\right) + \mu(F \setminus F_\varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_\varepsilon^n \setminus F_\varepsilon^n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, podemos aplicar novamente o Lema 2 para concluir que o conjunto $B \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{R}$. Com isto finalmente encerramos a prova de que $\mathscr{R}$ é uma σ-álgebra. ■

Na sequência, mostramos a validade de dois resultados simples de natureza topológica que irão auxiliar na prova do Teorema 8.

Lema 4. Sejam (X, d) espaço métrico arbitrário não-vazio e $C \subseteq X$ um subconjunto qualquer não-vazio. Então para quaisquer $x, y \in X$ temos

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leqslant d(x, y), \qquad \text{onde } d(x, C) \equiv \inf\{d(x, w) : w \in C\}.$$

Em particular, a aplicação $x \longmapsto d(x, C)$ define uma função uniformemente contínua em X.

Prova. Observe que segue diretamente da desigualdade triangular e da definição de $d(x, C) \equiv \inf\{d(x, w) : w \in C\}$ que temos para quaisquer $z \in C$ e $x, y \in X$

$$d(x, C) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Tomando o ínfimo sobre $z \in C$ na desigualdade acima obtemos $d(x, C) \leqslant d(x, y) + d(y, C)$ e consequentemente $d(x, C) - d(y, C) \leqslant d(x, y)$. Analogamente, trocando os papeis de x e y, podemos verificar que também vale a seguinte desigualdade $d(y, C) \leqslant d(x, y) + d(x, C)$ o que implica $d(y, C) - d(x, C) \leqslant d(x, y)$. Portanto, segue destas desigualdades que

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leqslant d(x, y).$$

■

Definição 5 (Conjuntos G_δ e F_σ)**.** Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que um conjunto arbitrário $F \subset X$ é um conjunto G_δ, se existe uma coleção enumerável $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos em (X, d) tal que $F = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Vamos dizer que um subconjunto $E \subset X$ é um conjunto F_σ se existe uma coleção enumerável $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fechados em (X, d) tal que $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Proposição 6. Para qualquer $C \subseteq X$, não-vazio fixado e $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left\{x \in X : d(x, C) < \frac{1}{n}\right\} \quad \text{é um subconjunto aberto de } X. \tag{3}$$

Prova. Seja $C \subseteq X$ um conjunto **arbitrário** não-vazio. Neste caso, podemos afirmar que a função $f_C : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_C(x) \equiv d(x, C) \equiv \inf_{y\in C} d(x, y), \qquad \forall x \in X,$$

está bem-definida.

Observe que segue diretamente do Lema 4 que a função f_C satisfaz

$$|f_C(x) - f_C(y)| = |d(x, C) - d(y, C)| \leqslant d(x, y),$$

e portanto f_C é uma função Lipschitziana, logo contínua. Já que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\{x \in X : d(x, C) < \frac{1}{n}\right\} = f_C^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{n}\right)\right),$$

segue da continuidade de f_C que o conjunto acima é aberto o que prova a validade de (3). ■

Corolário 7. Seja (X, d) um espaço métrico arbitrário.

i) Se $F \subseteq X$ é um subconjunto fechado, então F é um conjunto G_δ. Além do mais, podemos mostrar que existe uma sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abertos em X tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

ii) Se $A \subseteq X$ é um aberto, então A é um conjunto F_σ. Além do mais, podemos mostrar que existe uma sequência $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados em X tal que $F_n \subseteq F_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Prova. Note que o corolário é obviamente verdadeiro se o conjunto fechado F e o conjunto aberto A são vazios, pois os conjuntos A_n's e F_n's do enunciados podem ser tomados todos como sendo o conjunto vazio. Portanto, resta considerar o caso em que estes conjuntos são não-vazios.

Prova de *i*). Das propriedades elementares de espaços métricos (veja Proposição B.1) sabemos que para qualquer conjunto $C \subseteq X$ temos $d(x, C) = 0$ se, e somente se, $x \in \overline{C}$. Em particular, se aplicamos esta afirmação à um conjunto fechado $F \subseteq X$ temos

$$F = \{x \in X : d(x, F) = 0\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Se definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \equiv \left\{x \in X : d(x, F) < \frac{1}{n}\right\}$$

segue das propriedades elementares de distância que $A_{n+1} \subseteq A_n$ e da Proposição 6 que A_n é aberto, para cada $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

O que encerra a prova de que todo fechado F é um conjunto G_δ e que ele pode ser escrito como uma interseção enumerável de uma sequência decrescente de abertos.

Prova de *ii*). Por outro lado, já que todo aberto $A \subseteq X$ é complementar de um fechado e vice-versa, segue diretamente das leis *de Morgan* que se A é um conjunto **aberto** então A é um conjunto F_σ. De fato,

$$\begin{aligned} A = (A^c)^c = (\{x \in X : d(x, A^c) = 0\})^c &= \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{x \in X : d(x, A^c) < \frac{1}{n}\right\}\right)^c \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\left\{x \in X : d(x, A^c) < \frac{1}{n}\right\}\right)^c. \end{aligned}$$

Além do mais, se definimos

$$F_n \equiv \left(\left\{ x \in X : d(x, A^c) < \frac{1}{n} \right\} \right)^c$$

temos novamente da Proposição 6 que F_n é fechado. Usando as propriedades elementares de distância podemos verificar imediatamente que $F_n \subseteq F_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n,$$

o que encerra a prova de que todo aberto A é um conjunto F_σ e que, além do mais, pode ser escrito como uma união enumerável de uma sequência crescente de fechados. ■

Teorema 8. Sejam (X, d) um espaço métrico arbitrário não-vazio e $\mathscr{B}(X)$ a σ-álgebra de Borel de X. Se μ é uma medida finita ($\mu(X) < +\infty$) sobre $\mathscr{B}(X)$, então μ é regular, ou seja, para cada $B \in \mathscr{B}(X)$ temos

$$\sup\{\mu(F) : F \subseteq B,\ F \text{ fechado}\} \ = \ \mu(B) \ = \ \inf\{\mu(A) : B \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}.$$

Prova. Considere a coleção

$$\mathscr{R} \equiv \{B \in \mathscr{B}(X) \ : \ B \text{ é } \mu\text{-regular}\}.$$

Como estamos assumindo que μ é uma medida finita sobre $\mathscr{B}(X)$, todas as hipóteses da Proposição 3 são satisfeitas e portanto podemos concluir que a coleção $\mathscr{R}$ é uma sub-σ-álgebra de $\mathscr{B}(X)$.

Vamos mostrar que a coleção de todos os fechados de X está contida na coleção $\mathscr{R}$. De fato, seja $F \subset X$ um conjunto fechado. Pelo Corolário 7 sabemos F é um G_δ e que além do mais, existe uma sequência de conjuntos abertos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Já que $\mu(X) < \infty$, temos em particular que $\mu(A_1) < +\infty$ e assim podemos usar a propriedade de continuidade da medida para garantir que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) = \mu(F).$$

Como $F \subseteq A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e μ é finita, segue da igualdade acima que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus F) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(F) = 0.$$

Portanto dado $\varepsilon > 0$ existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0} \setminus F) < \varepsilon$. Tomando $A_\varepsilon \equiv A_{n_0}$ e $F_\varepsilon \equiv F$, concluímos da desigualdade acima que para cada $\varepsilon > 0$ dado, existem um conjunto aberto A_ε e um conjunto fechado F_ε satisfazendo $F_\varepsilon \subseteq F \subseteq A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue do Lema 2 que F é μ-regular e consequentemente que $F \in \mathscr{R}$. Já que o argumento acima é válido para qualquer fechado $F \subseteq X$, temos que a coleção de todos os fechados de X está contida na σ-álgebra $\mathscr{R}$. Como $\mathscr{R}$ é fechada para complementos temos que a coleção de todos os abertos de X está contida em $\mathscr{R}$. Desta última observação e da definição de σ-álgebra gerada segue que $\mathscr{B}(X) \subseteq \mathscr{R}$. Mas como $\mathscr{R}$ é por definição uma sub-σ-álgebra de $\mathscr{B}(X)$, podemos concluir que, na verdade, temos $\mathscr{B}(X) = \mathscr{R}$ e logo todo conjunto boreliano é μ-regular, o que implica que μ é regular. ■

3 Lema de Urysohn em Espaços Métricos

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções. Como de costume vamos usar a notação $f \leqslant g$ quando a desigualdade $f(x) \leqslant g(x)$ for válida para todo $x \in X$. A função constante $f(x) = 1$, para todo $x \in X$, será denota por $\mathbb{1}$.

Lema 9 (Lema de Urysohn)**.** Sejam (X, d) um espaço métrico, $\varnothing \subsetneq K \subseteq A \subseteq X$, onde K é compacto e A é um aberto. Então existe um aberto $O \subseteq X$ e uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tais que:

- $K \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq A$;
- $0 \leqslant f \leqslant 1, \quad \chi_K \leqslant f, \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}(f) \subseteq A.$

Prova. Vamos supor inicialmente que o aberto $A \neq X$. Assim podemos afirmar que A^c é um conjunto fechado não-vazio. Como $K \subseteq A$, segue que A^c e K são disjuntos. Já que estamos assumindo que $K \neq \varnothing$, segue das propriedades elementares de distância que $d(A^c, K) \equiv \delta > 0$.

Considere o conjunto O definido abaixo

$$O \equiv A \cap \left\{ x \in X : d(x, K) < \frac{\delta}{2} \right\}. \tag{4}$$

Como A é um aberto de X e o Lema 4 garante que o segundo conjunto que aparece na interseção acima também é um conjunto aberto, podemos concluir que o conjunto O é um conjunto aberto. Além do mais,

$$K \subseteq A \quad \text{e} \quad K \subseteq \left\{ x \in X : d(x, K) < \frac{\delta}{2} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \varnothing \subsetneq K \subseteq O. \tag{5}$$

Afirmamos que $\overline{O} \cap A^c = \varnothing$. De fato, suponha que existe $x \in \overline{O} \cap A^c$. Então $x \in A^c$ e $x \in \overline{O}$. Desta última afirmação, do fato de O ser não-vazio e da definição de fecho, podemos afirmar que existe alguma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contida em O tal que $d(x, x_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Já que $d(A^c, K) \equiv \delta > 0$ e $x \in A^c$, temos que $d(x, K) \geqslant d(A^c, K) \geqslant \delta$. Desta última desigualdade e da desigualdade triangular temos, para cada $n \in \mathbb{N}$, que

$$\delta \leqslant d(x, K) \leqslant d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y), \qquad \forall y \in K$$

Já que, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, a desigualdade acima é válida para todo $y \in K$. Então, tomando o ínfimo sobre $y \in K$, com n fixado, podemos concluir que a seguinte desigualdade

$$\delta \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, K)$$

é válida, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado. Já que $x_n \in O$, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue da definição do conjunto O e da desigualdade acima que

$$\delta \leqslant d(x, x_n) + \frac{\delta}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\delta}{2} \leqslant d(x, x_n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado. Mas esta última desigualdade sendo válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$ contradiz o fato que $d(x, x_n) \to 0$, quando $n \to \infty$. Desta contradição, concluímos que $\overline{O} \cap A^c = \varnothing$ e portanto $\overline{O} \subseteq A$.

Como observado em (5) temos $K \subseteq O$. Desta relação e da continência acima segue que

$$K \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq A. \tag{6}$$

Se $A = X$ basta tomar o aberto O como em (4) e neste caso as relações em (6) são evidentemente válidas. Isto encerra a prova da primeira parte do lema.

Resta construir a função f do enunciado. A ideia é usar os conjuntos construídos em (6). Como na primeira parte, vamos dividir a prova em dois casos. Primeiro, consideramos o caso $O = X$. Neste caso temos de (6) que $A = X$. Mas então a conclusão do lema é trivial, pois a função $f \equiv 1$, satisfaz todas as exigências.

Agora vamos considerar o caso $O \neq X$. Neste caso, observe que segue das propriedades elementares de distância, de O ser um conjunto aberto e das relações de continência em (6) que

$$d(x, K) + d(x, O^c) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \overline{K} \cap \overline{O^c} = K \cap O^c = \varnothing. \tag{7}$$

Desta última observação segue que o mapa levando $x \longmapsto d(x, K) + d(x, O^c)$, está bem-definido pois, K e O^c são ambos não-vazios e define uma aplicação que nunca se anula. Além do mais, segue do Lema 4 que esta aplicação é dada por soma de duas funções contínuas e portanto define uma função contínua em X não-negativa e que não se anula. Agora, considere a função $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) \equiv \frac{d(x, O^c)}{d(x, K) + d(x, O^c)}.$$

Segue das observações feitas acima que f define uma aplicação contínua em X, não-negativa. Além do mais, $f(x) = 1$ para todo $x \in K$. De fato, para cada $x \in K$ temos $d(x, K) = 0$. Como distâncias entre um compacto e um fechado disjuntos é um número positivo estrito, temos para qualquer $x \in K$ que $d(x, O^c) > 0$ e portanto

$$f(x) \equiv \frac{d(x, O^c)}{d(x, K) + d(x, O^c)} = \frac{d(x, O^c)}{d(x, O^c)} = 1, \qquad \forall x \in K \tag{8}$$

Em particular, $\chi_K \leqslant f$. Por outro lado, temos diretamente da definição de f que para todo $x \in O^c$ que $f(x) = 0$. Portanto

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq O.$$

Desta última observação e das relações de continência em (6) segue que

$$\operatorname{supp}(f) \equiv \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{O} \subseteq A. \tag{9}$$

$\blacksquare$

4 Partições da Unidade em Espaços Métricos

Sejam (X, d) um espaço métrico não-vazio e $C \subseteq X$ um conjunto arbitrário. Uma **partição da unidade** em C é uma família de funções $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, onde para cada $\alpha \in \Gamma$ a função $h_\alpha : X \to \mathbb{R}$ é uma função **contínua** e as seguintes condições são satisfeitas:

- para cada $x \in X$ existe algum $\varepsilon > 0$ tal que apenas uma quantidade finita de h_α's é não nula em $B(x, \varepsilon)$;
- $\displaystyle\sum_{\alpha\in\Gamma} h_\alpha(x) = 1$, para todo $x \in C$.

Dizemos que uma partição da unidade $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ em um conjunto $C \subseteq X$ é **subordinada** à uma cobertura por abertos $\mathscr{A} \equiv \{A_\beta\}_{\beta\in\Theta}$, do conjunto C, se para cada $\alpha \in \Gamma$ existe algum $\beta \in \Theta$ tal que $\mathrm{supp}(h_\alpha) \subseteq A_\beta$, onde $\mathrm{supp}(h_\alpha)$ é o chamado suporte de h_α e definido como sendo o fecho do conjunto dos pontos onde h_α é não-nula, isto é,

$$\mathrm{supp}(h_\alpha) \equiv \overline{\{x \in X : h_\alpha(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 10. Sejam (X, d) um espaço métrico, $K \subseteq X$ um compacto e $\mathscr{A} \equiv \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma cobertura por abertos de K. Então existe uma partição da unidade $\{h_1, \ldots, h_n\}$ em K subordinada à cobertura $\mathscr{A}$. Mais precisamente, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ temos que $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq A_j$ e

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(x) = 1, \qquad \forall x \in K.$$

Prova. Como $\mathscr{A}$ é uma cobertura por abertos de K, podemos afirmar que para cada ponto $x \in K$ existe algum $j \in \{1, \ldots, n\}$ e algum número real $\varepsilon(x) > 0$ tais que $\overline{B(x, \varepsilon(x))} \subseteq A_j$. Claramente

$$\bigcup_{x\in K} B(x, \varepsilon(x)) = K.$$

Como estamos assumindo que K é compacto, a cobertura por abertos mostrada acima admite uma subcobertura finita. Isto é, existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq K$ tal que

$$\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon(x_j)) = K.$$

Desta última igualdade e do fato que $\overline{D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n} = \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \ldots \cup \overline{D_n}$, para quaisquer $D_1, \ldots, D_n \subseteq X$, temos

$$\bigcup_{j=1}^{m} \overline{B(x_j, \varepsilon(x_j))} = K. \tag{10}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, seja Γ_j o conjunto de índices definido por

$$\Gamma_j \equiv \{i \in \{1, \ldots, m\} : \overline{B(x_i, \varepsilon(x_i))} \subseteq A_j\}.$$

Agora considere o conjunto compacto

$$K_j \equiv \bigcup_{i\in\Gamma_j} \overline{B(x_i, \varepsilon(x_i))}.$$

Observe que, por construção, cada K_j é um conjunto fechado e como está contido em K compacto, então K_j é compacto. Além do mais, $K_j \subseteq A_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Pelo Lema de Urysohn (Lema 9) sabemos que existe, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, uma função contínua $g_j : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$0 \leqslant g_j \leqslant 1, \quad \chi_{K_j} \leqslant g_j, \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}(g_j) \subseteq A_j. \tag{11}$$

Já que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n = \{1, \ldots, m\}$ temos de (10) que

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i \in \Gamma_j} \overline{B(x_i, \varepsilon(x_i))} = \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B(x_k, \varepsilon(x_k))} = K.$$

Daí decorre que, para cada $x \in K$, existe algum $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in K_{j_0}$. Por (11) sabemos que se $x \in K_{j_0}$, então $g_{j_0}(x) = 1$. Como $g_j \geqslant 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ podemos concluir que a soma $\sum_{j=1}^{n} g_j(x) \geqslant 1$. Como este argumento é independente da escolha de $x \in K$, podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(x) \geqslant 1, \qquad \forall x \in K.$$

Segue da desigualdade acima que,

$$K \subseteq \left\{ x \in X : \sum_{j=1}^{n} g_j(x) > 0 \right\} \equiv O.$$

Como K é compacto e O é um aberto contendo K, podemos aplicar mais uma vez o Lema de Urysohn (Lema 9) para garantir que existe uma função $f \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant f \leqslant 1$, $\chi_K \leqslant f$ e $\operatorname{supp}(f) \subseteq O$. Usando esta função definimos mais uma função auxiliar que será denotada por $g_{n+1} \in C(X, \mathbb{R})$ e dada por $g_{n+1}(x) \equiv 1 - f(x)$. Como $0 \leqslant g_{n+1} \leqslant 1$, segue da definição do conjunto O e de $g_{n+1} \equiv 1$ em O^c que

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(x) + g_{n+1}(x) > 0, \qquad \forall x \in X.$$

Agora para cada $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, considere a função $h_j : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_j(x) \equiv \frac{g_j(x)}{\sum_{k=1}^{n+1} g_k(x)}, \qquad \forall x \in X. \tag{12}$$

A desigualdade anterior garante que cada h_j está bem-definida e que define uma função contínua em X. Observe que para todo $x \in K$, temos $g_{n+1}(x) = 0$ e portanto $h_{n+1}(x) = 0$ em K. Daí segue que

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(x) = \sum_{j=1}^{n+1} h_j(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{g_j(x)}{\sum_{k=1}^{n+1} g_k(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} g_j(x)}{\sum_{k=1}^{n+1} g_k(x)} = 1, \qquad \forall x \in K. \tag{13}$$

Já que $\{h_1, \ldots, h_n\}$ é uma coleção finita de funções contínuas sobre X satisfazendo a identidade acima em K, temos que esta coleção de funções satisfaz a definição de partição da unidade em K.

Segue diretamente de (12) que

$$\{x \in X : h_j(x) \neq 0\} = \{x \in X : g_j(x) \neq 0\}.$$

Logo podemos concluir que $\operatorname{supp}(h_j) = \operatorname{supp}(g_j)$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Desta última igualdade e da relação (11) temos que $\operatorname{supp}(h_j) = \operatorname{supp}(g_j) \subseteq A_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como a coleção $\{A_1, \ldots, A_n\}$ é uma cobertura por abertos de K, segue das observações anteriores que $\{h_1, \ldots, h_n\}$ é uma partição da unidade em K subordinada à cobertura $\mathscr{A} \equiv \{A_1, \ldots, A_n\}$. Isto encerra a prova do teorema. ∎

5 O Teorema de Representação de Riesz-Markov

Por toda esta seção (X, d) denota um espaço métrico compacto e como de costume

$$C(X, \mathbb{R}) \equiv \{f : X \to \mathbb{R} : \ f \text{ é uma função contínua em } X\}$$

denota o espaço vetorial de todas as funções à valores reais definidas sobre X, munido de suas operações algébricas naturais de: soma de funções e multiplicação por escalares. Para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$ temos da compacidade de X que $\|f\|_\infty \equiv \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ está bem-definido como número real e a aplicação $f \longmapsto \|f\|_\infty$ define uma norma em $C(X, \mathbb{R})$. É bem conhecido que $C(X, \mathbb{R})$ munido desta norma é um espaço de Banach.

Uma função $\Phi : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é chamada de um funcional linear sobre $C(X, \mathbb{R})$ se para quaisquer $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $\Phi(f + \alpha g) = \Phi(f) + \alpha\Phi(g)$.

Dizemos que um funcional linear $\Phi : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é limitado se

$$\|\Phi\|_{\text{op}} \equiv \sup_{\substack{f \in C(X,\mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty = 1}} |\Phi(f)| < +\infty.$$

Exemplo. Seja μ uma medida finita sobre $\mathscr{B}(X)$. A aplicação $\Phi_\mu : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_\mu(f) \equiv \int_X f \, d\mu, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}), \tag{14}$$

define uma funcional linear limitado sobre $C(X, \mathbb{R})$.

Primeiro é preciso argumentar que $\Phi_\mu(f)$ está bem-definido para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$. De fato, se f é uma função à valores reais e contínua sobre X, então sabemos que f é $\mathscr{B}(X)$-mensurável. Como $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty < +\infty$, para todo $x \in X$ e $\mu(X) < +\infty$, segue da monotonicidade da integral de Lebesgue que

$$\int_X |f(x)| \, d\mu(x) \leqslant \int_X \|f\|_\infty \, d\mu = \|f\|_\infty \, \mu(X) < +\infty$$

e portanto que f é μ-integrável. Consequentemente, segue das propriedades elementares da integral de Lebesgue que a expressão de $\Phi_\mu(f)$ dada pelo lado direito de (14), define um número real para cada função $f \in C(X, \mathbb{R})$. A linearidade de Φ_μ é consequência direta da linearidade da integral de Lebesgue. De fato,

$$\Phi_\mu(f + \alpha g) = \int_X f + \alpha g \, d\mu = \int_X f d\mu + \alpha \int_X g \, d\mu = \Phi_\mu(f) + \alpha\Phi_\mu(g).$$

Por último, para verificar que Φ_μ é um funcional linear limitado, basta notar que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\mu\|_{\text{op}} \equiv \sup_{\substack{f \in C(X,\mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty = 1}} |\Phi_\mu(f)| &= \sup_{\substack{f \in C(X,\mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty = 1}} \left| \int_X f \, d\mu \right| \\
&\leqslant \sup_{\substack{f \in C(X,\mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty = 1}} \int_X |f| \, d\mu \\
&\leqslant \sup_{\substack{f \in C(X,\mathbb{R}) \\ \|f\|_\infty = 1}} \|f\|_\infty \, \mu(X) \\
&= \mu(X) < +\infty.
\end{aligned}$$

Teorema 11 (Teorema de Representação de Riesz-Markov)**.** Sejam (X,d) um espaço métrico compacto e $\Phi : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado satisfazendo:

- (positivo) se $f \geqslant 0$, então $\Phi(f) \geqslant 0$;
- (normalizado) $\Phi(\mathbb{1}) = 1$.

Então existe uma única medida de probabilidade μ definida sobre $\mathscr{B}(X)$ tal que Φ admite a seguinte representação integral

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}).$$

Além do mais, a medida μ é caraterizada pelas seguintes propriedades

$$\mu(A) = \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\}, \qquad \forall A \subseteq X \text{ aberto} \tag{15}$$

$$\mu(K) = \inf\big\{\Phi(f) : f \in C(X,\mathbb{R}) \ \text{ e } \ \chi_K \leqslant f\big\}, \qquad \forall K \subseteq X \text{ compacto.} \tag{16}$$

Prova. Vamos começar estabelecendo a unicidade da representação integral de Φ, isto é, se μ e ν são medidas de probabilidade definidas sobre $\mathscr{B}(X)$ e satisfazem

$$\int_X f\, d\mu = \Phi(f) = \int_X f\, d\nu, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}) \tag{17}$$

então $\mu = \nu$.

Seja $A \subseteq X$ um conjunto aberto não-vazio, $x_0 \in A$ e $K \equiv \{x_0\}$. Pelo Lema de Urysohn (Lema 9) podemos afirmar que existe alguma função $f \in C(X,\mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant f \leqslant 1$, $\chi_K \leqslant f$ e $\operatorname{supp}(f) \subseteq A$. Portanto segue de (17), das propriedades de f e das propriedades elementares da integral de Lebesgue que

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu \leqslant \int_X \chi_{\operatorname{supp}(f)}\, d\mu \leqslant \int_X \chi_A\, d\mu = \mu(A).$$

Da estimativa acima e da definição de supremo obtemos a seguinte desigualdade

$$\sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\} \leqslant \mu(A). \tag{18}$$

Por outro lado, se $K \subseteq A$ é um conjunto compacto arbitrário, podemos aplicar novamente o Lema de Urysohn (Lema 9) para garantir que existe alguma função $g \in C(X,\mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant g \leqslant 1$, $\chi_K \leqslant g$ e $\operatorname{supp}(g) \subseteq A$. Portanto, segue das propriedades elementares da integral de Lebesgue, das propriedades de g e da desigualdade (18) que

$$\begin{aligned}
\mu(K) = \int_X \chi_X\, d\mu \leqslant \int_X g\, d\mu = \Phi(g) & \\
& \leqslant \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\} \\
& \leqslant \mu(A).
\end{aligned}$$

Como a estimativa acima é válida para qualquer compacto $K \subseteq A$, segue da definição de supremo que

$$\sup\left\{\mu(K) : \begin{array}{c} K \subseteq A, \\ K \text{ compacto} \end{array}\right\} \leqslant \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\} \leqslant \mu(A). \quad (19)$$

Já que μ é uma medida de probabilidade sobre $\mathscr{B}(X)$, podemos aplicar o Teorema 8 para garantir que μ é regular. Em particular, o Teorema 8 garante que o aberto A fixado acima é um boreliano μ-regular. Como estamos assumindo que (X,d) é um espaço métrico compacto temos que se $F \subseteq X$ é um subconjunto fechado então F é compacto. Portanto, segue da μ-regularidade de A e desta última observação que

$$\mu(A) \;=\; \sup\left\{\mu(F) : \begin{array}{c} F \subseteq A, \\ F \text{ fechado} \end{array}\right\} \;=\; \sup\left\{\mu(K) : \begin{array}{c} K \subseteq A, \\ K \text{ compacto} \end{array}\right\}. \quad (20)$$

Das desigualdades em (19) e da identidade (20) concluímos que

$$\mu(A) = \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\}.$$

Note que a igualdade acima estabelece a validade da identidade (15), sob a condição de Φ admitir uma representação integral.

Como estamos assumindo que

$$\int_X f\, d\mu = \Phi(f) = \int_X f\, d\nu, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R})$$

podemos repetir todos os passos do argumento apresentado acima, *ipsis litteris*, porém substituindo μ por ν e concluir que

$$\mu(A) \;=\; \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\} \;=\; \nu(A), \qquad \forall A \subseteq X \text{ aberto.}$$

Estabelecida a igualdade acima para a coleção de todos os abertos de X, segue de mais aplicação do Teorema 8 que garante a regularidade de μ e ν que

$$\mu(B) = \inf\left\{\mu(A) : \begin{array}{c} B \subseteq A, \\ A \text{ aberto} \end{array}\right\} = \inf\left\{\nu(A) : \begin{array}{c} B \subseteq A, \\ A \text{ aberto} \end{array}\right\} = \nu(B), \qquad \forall B \in \mathscr{B}(X).$$

O que encerra a prova da unicidade.

Agora vamos mostrar a existência de μ. Como deve ter ficado claro para o leitor o argumento da unicidade já dá uma pista de como podemos proceder para construir a medida μ à partir do funcional linear Φ.

Seja $A \subseteq X$ é um aberto não-vazio, $x_0 \in A$ qualquer e $K \equiv \{x_0\}$. Aplicando novamente o Lema de Urysohn (Lema 9) podemos afirmar que existe alguma função $f \in C(X,\mathbb{R})$ satisfazendo: $0 \leqslant f \leqslant 1$, $\chi_K \leqslant f$ e $\operatorname{supp}(f) \subseteq A$. Desta forma podemos garantir que a expressão abaixo está bem-definida

$$\rho(A) \equiv \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\} \qquad \text{e} \qquad \rho(\varnothing) = 0, \quad (21)$$

e que pela positividade do funcional linear Φ, determina uma função $\rho : \tau_d \to [0, +\infty)$, onde τ_d é a topologia em X induzida pela métrica d.

Observe que se $A_1 \subseteq A_2$ são abertos não-vazios de X, então segue da definição de supremo que

$$\rho(A_1) \equiv \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X, \mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A_1 \end{array}\right\}$$

$$\leqslant \sup\left\{\Phi(f) : \begin{array}{c} f \in C(X, \mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A_2 \end{array}\right\} \equiv \rho(A_2), \tag{22}$$

ou seja, ρ tem a propriedade de monotonicidade.

Agora considere a função $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty)$ definida para cada $E \subseteq X$ por

$$\mu^*(E) \equiv \inf\left\{\rho(A) : \begin{array}{c} E \subseteq A, \\ A \text{ aberto} \end{array}\right\}.$$

Nosso próximo passo é mostrar que μ^* é uma medida exterior.

Antes de prosseguir vamos fazer algumas observações. Como, por hipótese, o funcional linear Φ é normalizado, isto é, $\Phi(\mathbb{1}) = 1$ e positivo, temos diretamente da definição de ρ que vale a seguinte desigualdade $\rho(A) \leqslant 1$, para todo aberto $A \subseteq X$. Logo segue da definição de μ^* que $\mu^*(E) \leqslant 1$, para todo $E \subseteq X$.

Agora, vamos voltar à análise de μ^*. Como $\rho(A) \geqslant 0$, para todo aberto $A \neq \varnothing$ segue que $\mu^*(E) \geqslant 0$, para todo $E \subseteq X$. Da igualdade $\rho(\varnothing) = 0$ e da não-negatividade de μ^* segue que $\mu^*(\varnothing) = 0$. Vamos verificar agora que μ^* possui a propriedade de monotonicidade. Sejam C e D subconjuntos arbitrários de X satisfazendo $C \subseteq D$. Então se A é um aberto tal que $D \subseteq A$, então $C \subseteq A$ e portanto segue da continência abaixo e das definições de ínfimo e de μ^* que ($I \subseteq J \Longrightarrow \inf(J) \leqslant \inf(I)$)

$$\left\{\rho(A) : \begin{array}{c} D \subseteq A, \\ A \text{ aberto} \end{array}\right\} \subseteq \left\{\rho(A) : \begin{array}{c} C \subseteq A, \\ A \text{ aberto} \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(C) \leqslant \mu^*(D).$$

Para completar a prova de que μ^* é uma medida exterior, resta mostrar que μ^* é subaditiva, isto é, para qualquer sequência $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X temos:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)\,. \tag{23}$$

A prova da subaditividade μ^* será feita em duas etapas. Primeiro vamos mostrar, usando o Lema de Urysohn (Lema 9) e o teorema de existência de partições da unidade (Teorema 10) que ρ é subaditiva na coleção dos abertos de X. Em seguida, usaremos esta propriedade de ρ para obter uma nova representação para μ^* que permitirá concluir que μ^* é uma medida exterior sobre $\mathscr{P}(X)$.

Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de abertos de X e $A \equiv \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Se $A = \varnothing$, então $A_n = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a desigualdade

$$\rho(A) = \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n)$$

é trivialmente satisfeita, já que $\rho(\varnothing) = 0$. Portanto podemos assumir que A é um aberto não-vazio. Fixando qualquer compacto não-vazio (por exemplo, um conjunto unitário) contido em A, podemos aplicar o Lema de Urysohn (Lema 9) para garantir que existe alguma função não-nula $f \in C(X, \mathbb{R})$, satisfazendo $0 \leqslant f \leqslant 1$ e $\mathrm{supp}(f) \subseteq A$. Já que $\mathrm{supp}(f)$ é um compacto e coberto por A, sabemos que existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

Aplicando o Teorema 10 podemos afirmar que existe uma partição da unidade $\{h_1, \ldots, h_n\}$, em $\mathrm{supp}(f)$, subordinada a cobertura $\{A_1, \ldots, A_n\}$, ou seja, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, a função $h_j \in C(X, \mathbb{R})$ e satisfaz $0 \leqslant h_j \leqslant 1$, $\mathrm{supp}(h_j) \subseteq A_j$ e $\sum_{j=1}^{n} h_j(x) = 1$, para todo $x \in \mathrm{supp}(f)$. Portanto, podemos decompor f em uma soma da forma $f = \sum_{j=1}^{n} f h_j$, onde cada parcela, desta soma, satisfaz $0 \leqslant f h_j \leqslant 1$ e $\mathrm{supp}(f h_j) \subseteq A_j$. Assim segue da decomposição de f obtida acima, das propriedades de cada uma destas parcelas, da linearidade do funcional Φ e da definição de ρ que

$$\Phi(f) = \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} f h_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \Phi(f h_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \rho(A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j).$$

Como a desigualdade acima é válida para qualquer $f \in C(X, \mathbb{R})$, satisfazendo $0 \leqslant f \leqslant 1$ e $\mathrm{supp}(f) \subseteq A$. Concluímos que

$$\rho(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j). \tag{24}$$

Da desigualdade acima, do fato do conjunto vazio ser aberto, $\rho(\varnothing) = 0$ e de união enumerável de abertos ser aberto, temos para qualquer $E \subseteq X$

$$\mu^*(E) \equiv \inf\left\{\rho(A) : \begin{array}{c} E \subseteq A, \\ A \text{ aberto} \end{array}\right\} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : \begin{array}{c} E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \\ A_n \text{ aberto } \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\}.$$

Como a expressão do lado direito da igualdade acima define uma medida exterior sobre $\mathscr{P}(X)$, segue que μ^* é uma medida exterior.

Observamos também que a monotonicidade de ρ fornece a seguinte igualdade

$$\mu^*(A) \equiv \inf\left\{\rho(O) : \begin{array}{c} A \subseteq O, \\ O \text{ aberto} \end{array}\right\} = \rho(A), \qquad \forall A \subseteq X \text{ aberto}. \tag{25}$$

A seguir, vamos mostrar que todo aberto $A \subseteq X$ satisfaz a condição de mensurabilidade de Carathéodory, ou seja, $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, para todo $E \subseteq X$. Como μ^* é subaditiva basta mostrar que

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^*(E), \qquad \forall E \subseteq X. \tag{26}$$

Primeiro, vamos estabelecer a desigualdade (26) quando o conjunto E é um aberto. Observe que a desigualdade é claramente verdadeira se E ou A são vazios. Note também que não há nada a fazer caso $A \cap E = \varnothing$, pois $E \subseteq A^c$ e (26) é obviamente satisfeita neste caso. Analogamente, a desigualdade é trivial se $E \cap A^c = \varnothing$. Portanto, só precisamos nos concentra no caso em que ambos $A \cap E \neq \varnothing$ e $E \cap A^c \neq \varnothing$. Neste caso, temos $E \cap A$ é um aberto não-vazio e assim podemos usar o Lema de Urysohn para garantir que existe uma função $f \in C(X, \mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant f \leqslant 1$ e $\operatorname{supp}(f) \subseteq E \cap A$. Como $\rho(E \cap A)$ é o supremo de $\Phi(f)$ tomado sobre tais funções, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher f também satisfazendo

$$\rho(E \cap A) - \varepsilon < \Phi(f). \tag{27}$$

Como estamos assumindo que E é um aberto temos que $E \setminus \operatorname{supp}(f)$ é também um aberto. Já que $E \cap A^c \neq \varnothing$, segue que o conjunto $E \setminus \operatorname{supp}(f)$ é um aberto não-vazio. Aplicando mais uma vez o Lema de Urysohn (Lema 9) podemos encontrar uma função $g \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant g \leqslant 1$ e $\operatorname{supp}(g) \subseteq (E \setminus \operatorname{supp}(f))$. Segue novamente da definição de ρ que g pode ser escolhida possuindo as propriedades mencionadas acima e também satisfazendo

$$\rho(E \setminus \operatorname{supp}(f)) - \varepsilon < \Phi(g). \tag{28}$$

Como $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g) = \varnothing$, podemos verificar que $0 \leqslant f + g \leqslant 1$. Além do mais, $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g) \subseteq (E \cap A) \cup (E \setminus \operatorname{supp}(f)) \subseteq E$. Portanto temos diretamente da definição de ρ e da linearidade do funcional Φ que

$$\Phi(f) + \Phi(g) = \Phi(f+g) \leqslant \rho(E) \tag{29}$$

Usando em (29) as cotas inferiores para $\Phi(f)$ e $\Phi(g)$ fornecidas por (27) e (28), respectivamente, ficamos com

$$\rho(E \cap A) - \varepsilon + \rho(E \setminus \operatorname{supp}(f)) - \varepsilon < \rho(E)$$

Já que ambos E, $A \cap E$ e $(E \setminus \operatorname{supp}(f))$ são conjuntos abertos, segue da identidade (25) que $\rho(E) = \mu^*(E)$, $\rho(A \cap E) = \mu^*(A \cap E)$ e $\rho(E \setminus \operatorname{supp}(f)) = \mu^*(E \setminus \operatorname{supp}(f))$. Portanto podemos reescrever a desigualdade acima como segue

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus \operatorname{supp}(f)) - 2\varepsilon < \mu^*(E).$$

Já que $(E \setminus A) \subseteq (E \setminus \operatorname{supp}(f))$ segue da monotonicidade de μ^* e da desigualdade acima que

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) - 2\varepsilon < \mu^*(E).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos a desigualdade (26) quando E é um conjunto aberto, isto é,

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leqslant \mu^*(E). \tag{30}$$

Para verificar a validade de (26) para $E \subseteq X$ arbitrário, a ideia é usar a desigualdade provada acima e a definição de μ^* dada em (25). Já que para qualquer $E \subseteq X$, temos $\mu^*(E) < +\infty$, segue da definição de ínfimo que dado $\varepsilon > 0$, existe $O \subseteq X$ aberto satisfazendo: $E \subseteq O$ e $\rho(O) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon$. Desta desigualdade, da monotonicidade de μ^*, da validade de (30) para qualquer aberto e da igualdade $\mu^*(O) = \rho(O)$, fornecida por (25), temos

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) &\leqslant \mu^*(O \cap A) + \mu^*(O \cap A^c) \\ &\leqslant \mu^*(O) \\ &= \rho(O) \\ &< \mu^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário segue da desigualdade acima que (26) é válida para qualquer $E \subseteq X$ o que encerra prova de que todo aberto $A \subseteq X$ satisfaz a condição de mensurabilidade de Carathéodory.

Seja $\mathscr{M}$ a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis no sentido de Carathéodory. O que mostramos acima é que a coleção de todos os abertos está contida nesta σ-álgebra, ou seja, $\tau_d \subseteq \mathscr{M}$. Portanto segue da definição de σ-álgebra gerada que $\mathscr{B}(X) \subseteq \mathscr{M}$. Já que a restrição de uma medida exterior à σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis no sentido de Carathéodory define uma medida nesta σ-álgebra. temos que $\mu^*|_{\mathscr{M}}$ é uma medida. Como $\mathscr{B}(X) \subseteq \mathscr{M}$ temos, em particular, que a restrição de μ^* à σ-álgebra de Borel $\mathscr{B}(X)$ também define uma medida, que denotaremos por μ. Veremos a seguir que esta medida μ é a medida, sobre $\mathscr{B}(X)$, que representa o funcional linear Φ.

Note que, segue da definição de μ e da igualdade (25) que

$$\mu(A) = \mu^*(A) = \rho(A) = \sup\left\{\Phi(f) \ : \begin{array}{c} f \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\} \qquad \forall A \subseteq X \text{ aberto.}$$

O que prova a validade de (15).

Próximo passo é provar a validade de (16). Seja $K \subseteq X$ um compacto não vazio. Pelo Lema de Urysohn (aplicado aos conjuntos K e $A = X$) sabemos que existe alguma função $f \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant f \leqslant 1$ tal que $\chi_K \leqslant f$ e $\operatorname{supp}(f)$ é algum compacto em X. (Como estamos assumindo que (X, d) é compacto, aqui poderíamos simplesmente tomar a função f como sendo a função constante igual à um.) Dado $0 < \varepsilon < 1$ conidere o aberto $A_\varepsilon \equiv \{x \in X : 1 - \varepsilon < f(x)\}$. Invocando novamente o Lema de Urysohn podemos garantir que existe alguma função $g \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $0 \leqslant g \leqslant 1$ e $\operatorname{supp}(g) \subseteq A_\varepsilon$. Usando as definições de A_ε e que $0 \leqslant g \leqslant 1$ temos:

$$(1-\varepsilon) < f(x), \quad \forall x \in A_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad g(x)(1-\varepsilon) \leqslant g(x)f(x) \leqslant f(x), \quad \forall x \in A_\varepsilon$$

Como $\operatorname{supp}(g) \subseteq A_\varepsilon$ e f é não-negativa, podemos concluir que as duas últimas desigualdades acima são válidas, na verdade, para todo $x \in X$. Consequentemente, temos

$$g(x)(1-\varepsilon) \leqslant f, \quad \forall x \in X \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)} f(x) - g(x), \quad \forall x \in X.$$

Daí segue da positividade do funcional Φ que

$$0 \leqslant \Phi\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)} f - g\right) = \frac{1}{(1-\varepsilon)}\Phi(f) - \Phi(g) \quad \Longrightarrow \quad \Phi(g) \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)}\Phi(f) \tag{31}$$

Como g é uma função arbitraria satisfazendo $g \in C(X,\mathbb{R})$, $0 \leqslant g \leqslant 1$ e $\operatorname{supp}(g) \subseteq A_\varepsilon$ segue da última desigualdade acima e da identidade (15) que

$$\mu(A_\varepsilon) = \sup\left\{\Phi(g) \ : \begin{array}{c} g \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant g \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(g) \subseteq A_\varepsilon \end{array}\right\} \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)}\Phi(f).$$

Como $\chi_K \leqslant f$, temos que $K \subseteq A_\varepsilon \equiv \{x \in X : 1 - \varepsilon < f(x)\}$. Desta relação e da propriedade de monotonicidade da medida temos $\mu(K) \leqslant \mu(A_\varepsilon)$. Usando esta desigualdade na desigualdade que acabamos de mostrar acima ficamos com

$$\mu(K) \leqslant \mu(A_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)}\Phi(f).$$

Como a desigualdade acima é válida para qualquer $0 < \varepsilon < 1$, tomando o limite, quando $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que

$$\mu(K) \leqslant \Phi(f), \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}) \text{ tal que } K \subseteq \operatorname{supp}(f).$$

Tomando o ínfimo na desigualdade acima obtemos

$$\mu(K) \leqslant \inf\big\{\Phi(f) : f \in C(X,\mathbb{R}) \ \text{ e } \ \chi_K \leqslant f\big\} \leqslant \Phi(h),$$

para qualquer função $h \in C(X,\mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant h \leqslant 1$ e $K \subseteq \operatorname{supp}(h)$. Por outro lado, sabemos do Lema de Urysohn (Lema 9) que para qualquer A aberto satisfazendo $K \subseteq A$, existe alguma função $h \in C(X,\mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant h \leqslant 1$, $\chi_K \leqslant h$ e $\operatorname{supp}(h) \subseteq A$. Portanto, usando a desigualdade acima e a identidade (15) obtemos

$$\begin{aligned}
\mu(K) &\leqslant \inf\big\{\Phi(f) : f \in C(X,\mathbb{R}) \ \text{ e } \ \chi_K \leqslant f\big\} \\
&\leqslant \sup\left\{\Phi(h) \ : \begin{array}{c} h \in C(X,\mathbb{R}), \\ 0 \leqslant h \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(h) \subseteq A \end{array}\right\} \\
&= \mu(A), \qquad \forall K \subseteq A, \ A \text{ aberto}.
\end{aligned}$$

Como μ é uma medida finita sobre $\mathscr{B}(X)$ podemos aplicar o Teorema 8 para garantir que K é μ-regular. Logo, segue da μ-regularidade de K e das desigualdades acima que

$$\begin{aligned}
\mu(K) &\leqslant \inf\big\{\Phi(f) : f \in C(X,\mathbb{R}) \ \text{ e } \ \chi_K \leqslant f\big\} \\
&\leqslant \inf\{\mu(A) : K \subseteq A, \ A \text{ aberto}\} \\
&= \mu(K).
\end{aligned}$$

O que finaliza a prova de (16), ou seja,

$$\mu(K) = \inf\big\{\Phi(f) : f \in C(X,\mathbb{R}) \ \text{ e } \ \chi_K \leqslant f\big\}.$$

Agora vamos para a última parte do teorema que é a prova da validade da igualdade

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}).$$

Antes porém observamos que, pela linearidade do funcional Φ basta provar a igualdade acima para funções na bola fechada unitária de $C(X,\mathbb{R})$, isto é, para f tal que $\|f\|_\infty \leqslant 1$. De fato, $f \equiv 0$, não há nada a fazer pois todo funcional linear leva o vetor nulo no zero e a integral de Lebesgue de uma função nula também é zero. Por outro lado, se $f \in C(X,\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ e a identidade acima vale na bola fechada unitária, então temos

$$\Phi\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) = \int_X \frac{f}{\|f\|_\infty} d\mu \quad \Longrightarrow \quad \Phi(f) = \int_X f \, d\mu.$$

Portanto, a identidade acima é válida para toda $f \in C(X,\mathbb{R})$.

Na verdade, podemos reduzir a prova ao caso em que $\|f\|_\infty \leqslant 1$ e f é não-negativa. Pois, qualquer função contínua f pode ser escrita como diferença de duas funções contínuas não-negativas, mais precisamente,

$$f = f^+ - f^-, \qquad \text{onde} \quad f^+ \equiv \max\{f, 0\} \quad \text{e} \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Logo, se a igualdade acima vale para toda função não-negativa e pertencente à bola unitária de $C(X, \mathbb{R})$, então ela vale para toda função em $C(X, \mathbb{R})$. Portanto resta mostrar a validade da representação integral de Φ para funções $f \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant f \leqslant 1$.

Fixe $f \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant f \leqslant 1$. Dado $N \in \mathbb{N}$ defina para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$ os seguintes conjuntos

$$K_j \equiv \left\{x \in X : \frac{j}{N} \leqslant f(x)\right\} \qquad \text{e} \qquad K_0 \equiv \operatorname{supp}(f).$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, N\}$ considere função $f_j : X \to [0, 1]$ dada por

$$f_j(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin K_{j-1}; \\ f(x) - \frac{j-1}{N}, & \text{se } x \in K_{j-1} \setminus K_j; \\ \frac{1}{N}, & \text{se } x \in K_j. \end{cases}$$

Obviamente podemos reescrever as funções $f_1, \ldots, f_N$ como segue:

$$f_1(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \notin \operatorname{supp}(f); \\ f(x), & \text{se } \ 0 \leqslant f(x) < \frac{1}{N}; \\ \frac{1}{N}, & \text{se } \ \frac{1}{N} \leqslant f(x) \end{cases} \quad \text{e} \quad f_j(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{se } \ 0 \leqslant f(x) < \frac{j-1}{N}; \\ f(x) - \frac{j-1}{N}, & \text{se } \ \frac{j-1}{N} \leqslant f(x) < \frac{j}{N}; \\ \frac{1}{N}, & \text{se } \ \frac{j}{N} \leqslant f(x), \end{cases}$$

para $j \in \{2, \ldots, N\}$. Podemos verificar imediatamente que f_j também pode ser representada da seguinte maneira

$$f_j(x) = \min\left\{\max\left\{f - \frac{j-1}{N}, 0\right\} \ , \ \frac{1}{N}\right\}$$

e consequentemente $f_j \in C(X, \mathbb{R})$ para todo $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Da terceira linha da definição de f_j temos que $\frac{1}{N}\chi_{K_j} \leqslant f_j$. Da última representação de f_j concluímos que $f_j \leqslant \frac{1}{N}$. Além do mais, temos que $K_j \subseteq \operatorname{supp}(f_j) \subseteq K_{j-1}$. Assim, segue da desigualdade anterior que $f_j \leqslant \frac{1}{N}\chi_{K_{j-1}}$. Juntando as duas desigualdades obtidas neste parágrafo ficamos com:

$$\frac{1}{N}\chi_{K_j} \leqslant f_j \leqslant \frac{1}{N}\chi_{K_{j-1}} \tag{32}$$

Integrando, com respeito a μ, obtemos

$$\frac{1}{N}\mu(K_j) \leqslant \int_X f_j \, d\mu \leqslant \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}). \tag{33}$$

Como observado anteriormente, temos da definição de f_j que $0 \leqslant f_j \leqslant \frac{1}{N}$, ou seja, $0 \leqslant Nf_j \leqslant 1$ e $K_j \subseteq \operatorname{supp}(f_j) \subseteq K_{j-1}$. Assim se A é um aberto satisfazendo $K_{j-1} \subseteq A$, então temos $0 \leqslant Nf_j \leqslant 1$ e $\operatorname{supp}(Nf_j) \subseteq A$, logo

$$\Phi(Nf_j) \leqslant \sup\left\{\Phi(h) \ : \begin{array}{c} f \in C(X, \mathbb{R}), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1 \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(f) \subseteq A \end{array}\right\} = \rho(A) = \mu(A),$$

para todo aberto A tal que $K_{j-1} \subseteq A$.

De (32) temos que $\chi_{K_j} \leqslant Nf_j$. Portanto segue de (16), da definição de ínfimo e da desigualdade acima que

$$\mu(K_j) \;=\; \inf\left\{\Phi(f) : f \in C(X,\mathbb{R}) \;\text{ e }\; \chi_{K_j} \leqslant f\right\} \;\leqslant\; \Phi(Nf_j) \;\leqslant\; \mu(A),$$

para todo aberto A tal que $K_{j-1} \subseteq A$. Usando mais uma vez que a medida μ é regular temos $\mu(K_{j-1}) = \inf\{\mu(A) : K_{j-1} \subseteq A,\ A \text{ aberto}\}$. Desta observação, da definição de ínfimo e da desigualdade acima obtemos

$$\mu(K_j) \leqslant \Phi(Nf_j) \leqslant \mu(K_{j-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mu(K_j)}{N} \leqslant \Phi(f_j) \leqslant \frac{\mu(K_{j-1})}{N}. \tag{34}$$

Afirmamos que $f = f_1 + \ldots + f_N$. De fato, considere a seguinte decomposição do intervalo fechado

$$[0,1] = \left[0\,,\,\frac{1}{N}\right) \cup \left[\frac{1}{N}\,,\,\frac{2}{N}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{j-1}{N}\,,\,\frac{j}{N}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{N-1}{N}\,,\,\frac{N}{N}\right) \cup \{1\}.$$

Já que os conjuntos acima formam uma partição da imagem da função f, basta mostrar que a identidade é válida quando a imagem de f toma valor em qualquer um destes conjuntos. Para fazer isto vamos separar estes conjuntos em três classes: a primeira classe é a que contém o primeiro destes conjuntos, a segunda classe é a que contém os demais, exceto o último e a terceira classe é a que contém o último conjunto (que é o conjunto unitário $\{1\}$). Vamos começar considerando o caso em que f toma valores na segunda classe. Mais precisamente, fixe $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ e suponha que $x \in X$ satisfaz:

$$f(x) \in \left[\frac{k}{N}\,,\,\frac{k+1}{N}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{k}{N} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{N} \tag{35}$$

$$\Downarrow \left(\text{ somando } \; -\frac{j-1}{N}\right)$$

$$\frac{k-j+1}{N} \leqslant f(x) - \frac{j-1}{N} < \frac{k-j+2}{N}$$

Já que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ fixados, as funções $x \longmapsto \max\{x,a\}$ e $x \longmapsto \min\{x,b\}$ são monótonas não-decrescentes segue das desigualdades acima e da definição de f_j que

$$\min\left\{\max\left\{\frac{k-j+1}{N}\,,0\right\}\;,\;\frac{1}{N}\right\} \leqslant\; f_j(x) \;\leqslant \min\left\{\max\left\{\frac{k-j+2}{N}\,,0\right\}\;,\;\frac{1}{N}\right\}.$$

Note que, para $j = \{1, \ldots, k\}$, o valor das expressões que aparecem nos extremos das desigualdades acima, são todos iguais à $1/N$. Logo $f_j(x) = 1/N$, para todo $j = \{1, \ldots, k\}$. Para $j = k+1$, segue da definição de f_{k+1} e de (35) que $f_{k+1}(x) = f(x) - k/N$. Para $j \geqslant k+2$, o valor do lado direito da desigualdade acima é zero e portanto $f_j(x) = 0$. Juntando estas três observações podemos verificar imediatamente que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} f_j(x) &= f_1(x) + \ldots + f_k(x) + f_{k+1}(x) + f_{k+2} + \ldots + f_N(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}}_{k \text{ vezes}} + f(x) - \frac{k}{N} + 0 + \ldots + 0 \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Resta mostra que esta identidade permanece válida nos casos em que $f(x) \in [0, 1/N)$ e $f(x) = 1$. No primeiro caso, vamos ter $f_1(x) = f(x)$ e $f_j(x) = 0$, para todo $j = 2, \ldots, N$. Portanto a identidade desejada é claramente verdadeira, neste caso. Por último, se $f(x) = 1$, segue diretamente da definição de f_j que $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_N(x) = 1/N$ e claro $f(x) = 1 = f_1(x) + \ldots + f_N(x)$. O que encerra a prova da identidade

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x), \qquad \forall x \in X.$$

De (33) e (34) e da identidade acima temos

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\mu(K_j) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_X f_j \, d\mu = \int_X f \, d\mu \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}) \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\mu(K_j) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \Phi(f_j) = \Phi(f) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\mu(K_{j-1}). \tag{37}$$

Multiplicando (37) por (-1) e, em seguida, somando com (36) ficamos com

$$\frac{1}{N}(\mu(K_N) - \mu(K_0)) \leqslant \int_X f \, d\mu - \Phi(f) \leqslant \frac{1}{N}(\mu(K_0) - \mu(K_N))$$

Já que $\mu(X) = 1$ segue da desigualdade acima que

$$\frac{-2}{N} \leqslant \int_X f \, d\mu - \Phi(f) \leqslant \frac{2}{N}, \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite, quando $N \to \infty$, nas desigualdades acima concluímos finalmente que

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}) \text{ tal que } 0 \leqslant f \leqslant 1.$$

Como explicado anteriormente, a afirmação acima implica que a igualdade é válida para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$ o que encerra a prova do teorema. ■

6 Propriedades Elementares de Funcionais Lineares Positivos

Lema 12. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Se $\Phi : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo, então Φ é limitado e $\|\Phi\|_{\text{op}} = \Phi(\mathbb{1})$.

Prova. Seja $f \in C(X, \mathbb{R})$ e considere sua decomposição como diferença de duas funções positivas e contínuas $f = f^+ - f^-$. Observe que segue da positividade e linearidade do funcional Φ que:

$$
\begin{aligned}
-\max\{\Phi(f^+), \Phi(f^-)\} \leqslant -\Phi(f^-) &\leqslant \Phi(f^+) - \Phi(f^-) \\
&= \Phi(f) \\
&\leqslant \Phi(f^+) \leqslant \max\{\Phi(f^+), \Phi(f^-)\}
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
|\Phi(f)| \leqslant \max\{\Phi(f^+), \Phi(f^-)\}. \tag{38}
$$

Observe também que

$$
\begin{aligned}
-\max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\} \leqslant -\max\{f^-, f^+\} &\leqslant -f^- \\
&\leqslant f \\
&\leqslant f^+ \\
&\leqslant \max\{f^-, f^+\} \leqslant \max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\},
\end{aligned}
$$

o que implica $|f| \leqslant \max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\}$ e consequentemente $\|f\|_\infty \leqslant \max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\}$. Por outro lado, temos:

- $f^+ \leqslant f^+ + f^- = |f| \leqslant \|f\|_\infty$;
- $f^- \leqslant f^+ + f^- = |f| \leqslant \|f\|_\infty$.

Logo $\|f^+\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ e $\|f^-\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Desta duas últimas desigualdades podemos concluir imediatamente que $\max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\} \leqslant \|f\|_\infty$. Como também estabelecemos acima a validade da desigualdade reversa, à esta última, temos que

$$
\max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\} = \|f\|_\infty.
$$

Usando em (38) que Φ é um funcional linear positivo e a identidade acima, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|\Phi(f)| \leqslant \max\{\Phi(f^+), \Phi(f^+)\} &\leqslant \max\{\Phi(\|f^+\|_\infty \cdot \mathbb{1}), \Phi(\|f^-\|_\infty \cdot \mathbb{1})\} \\
&= \max\{\Phi(\mathbb{1}) \cdot \|f^+\|_\infty\, ,\, \Phi(\mathbb{1}) \cdot \|f^-\|_\infty\} \\
&= \Phi(\mathbb{1}) \cdot \max\{\|f^+\|_\infty, \|f^-\|_\infty\} \\
&= \Phi(\mathbb{1}) \cdot \|f\|_\infty.
\end{aligned}
$$

O que mostra que o funcional linear $\Phi : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é limitado e $\|\Phi\|_{\text{op}} \leqslant \Phi(\mathbb{1})$. Observe que tomando $f = \mathbb{1}$, na desigualdade acima, temos uma igualdade. De fato, $\Phi(\mathbb{1}) = |\Phi(\mathbb{1})| \leqslant \Phi(\mathbb{1})\|\mathbb{1}\|_\infty = \Phi(\mathbb{1})$. Desta igualdade e da definição da norma $\|\Phi\|_{\text{op}}$ podemos concluir, finalmente, que $\|\Phi\|_{\text{op}} = \Phi(\mathbb{1})$. ■

A seguir, provamos um corolário do Teorema 11, Teorema de Representação de Riesz-Markov, que pode ser aplicado à funcionais lineares positivos e não-normalizados.

Corolário 13. Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $\Phi : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ um funcional linear positivo e limitado. Então, existe uma única medida finita e não-negativa μ, definida sobre $\mathscr{B}(X)$, tal que Φ admite a seguinte representação integral

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Prova. Se $\Phi(\mathbb{1}) = 0$, então segue do Lema 12 que $\Phi \equiv 0$. Considerando a medida $\mu \equiv 0$, temos que a igualdade acima é satisfeita para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$ e assim só resta mostrar que a medida identicamente nula é a única medida satisfazendo a igualdade acima para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$. Suponha que

$$\int_X f\, d\nu = 0, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

o corolário está provado neste caso.

Portanto, resta mostrar a validade do corolário quando $\Phi(\mathbb{1}) \neq 0$.

Já que Φ é um funcional linear positivo e limitado, temos que a aplicação

$$f \longmapsto \frac{\Phi(f)}{\Phi(\mathbb{1})}$$

define um funcional linear positivo limitado e normalizado. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Representação de Riesz-Markov, para garantir que existe uma única medida de probabilidade ν, definida sobre $\mathscr{B}(X)$ tal que

$$\frac{\Phi(f)}{\Phi(\mathbb{1})} = \int_X f\, d\nu, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Já que $\Phi(\mathbb{1}) \geqslant 0$, temos que $\mu \equiv \Phi(\mathbb{1})\nu$ define uma medida finita sobre $\mathscr{B}(X)$ e além do mais, segue da identidade acima e da linearidade da integral de Lebesgue que

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\mu, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Agora, vamos mostrar que μ é a única medida finita sobre $\mathscr{B}(X)$ que satisfaz a igualdade acima para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$. Suponha que γ é uma medida finita não-negativa sobre $\mathscr{B}(X)$ satisfazendo

$$\Phi(f) = \int_X f\, d\gamma, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Note que tomando $f \equiv \mathbb{1}$ na igualdade acima temos que $\Phi(\mathbb{1}) = \gamma(X)$. Portanto $\rho \equiv \gamma/\Phi(\mathbb{1})$ define uma medida de probabilidade sobre $\mathscr{B}(X)$. Observe também que segue da igualdade acima que

$$\frac{\Phi(f)}{\Phi(\mathbb{1})} = \frac{1}{\Phi(\mathbb{1})} \int_X f\, d\gamma = \int_X f\, d\rho, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Pela unicidade fornecida pelo Teorema de Representação de Riesz-Markov, podemos afirmar que $\nu = \rho$. Mas já que $\rho = \gamma/\Phi(\mathbb{1})$, e $\nu = \mu/\Phi(\mathbb{1})$ temos que $\mu = \gamma$ o que prova a unicidade e encerra a prova do corolário. ■

7 Decomposição de Funcionais Lineares

Lema 14. Seja (X,d) um espaço métrico compacto e $\Phi : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado, então existem funcionais lineares positivos $\Phi^+, \Phi^- : C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tais que $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, isto é,

$$\Phi(f) = \Phi^+(f) - \Phi^-(f), \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}).$$

Prova. Primeiro vamos definir uma função auxiliar $\Psi : C^+(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o espaço convexo $C^+(X,\mathbb{R}) \equiv \{f \in C(X,\mathbb{R}) : \ f \geqslant 0\}$. Em seguida, vamos mostrar que Ψ admite uma extensão à todo $C(X,\mathbb{R})$ e que esta extensão define um funcional linear positivo e limitado.

A função Ψ é definida para cada $f \in C^+(X,\mathbb{R})$ pela seguinte expressão

$$\Psi(f) \equiv \sup\{\Phi(g) : \ g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant f\}. \tag{39}$$

Já que todo funcional linear leva o vetor nulo no zero, considerando a função constante $g \equiv 0$, podemos verificar que $\Psi(f) \geqslant 0$. Observe também que, segue da definição de supremo que

$$\begin{aligned}\{g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant f\} &\subseteq \{g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant \|f\|_\infty\} \\ &\subseteq \{g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } \|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\}.\end{aligned}$$

É claro que para cada $g \in C(X,\mathbb{R})$ temos $\Phi(g) \leqslant |\Phi(g)|$. Além do mais, já que estamos assumindo que Φ é limitado, temos que $|\Phi(g)| \leqslant \|\Phi\|_{\text{op}}\|g\|_\infty$. Portanto, segue das observações acima que

$$\begin{aligned}|\Psi(f)| = \Psi(f) &= \sup\{\Phi(g) : \ g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant f\} \\ &\leqslant \sup\{|\Phi(g)| : \ g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant f\} \\ &\leqslant \sup\{|\Phi(g)| : \ g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } \|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\} \\ &\leqslant \sup\{\|\Phi\|_{\text{op}}\|g\|_\infty : \ g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } \|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\} \\ &= \|\Phi\|_{\text{op}} \sup\{\|g\|_\infty : \ g \in C(X,\mathbb{R}) \text{ e } \|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty\} \\ &= \|\Phi\|_{\text{op}}\, \|f\|_\infty, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}) \text{ tal que } f \geqslant 0.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$0 \leqslant \Psi(f) \leqslant \|\Phi\|_{\text{op}}\, \|f\|_\infty, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R}) \text{ tal que } f \geqslant 0. \tag{40}$$

Na sequência vamos mostrar que para todo escalar $\lambda \geqslant 0$ e para todo par de funções $f, g \in C^+(X,\mathbb{R})$, temos a seguinte igualdade:

$$\Psi(\lambda f + g) = \lambda\Psi(f) + \Psi(g).$$

Primeiro, observamos que para cada função $f \in C^+(X, \mathbb{R})$ e cada escalar $\lambda \geqslant 0$ temos: (i) se $\lambda = 0$, então

$$\Psi(0 \cdot f) = \Psi(0) = 0 = 0 \cdot \Psi(f);$$

(ii) se $\lambda > 0$, então a aplicação $g \longmapsto g/\lambda \equiv h$ define uma bijeção em $C(X, \mathbb{R})$. Além do mais, $0 \leqslant g \leqslant \lambda f$ se, e somente se, $0 \leqslant \lambda h = \lambda g/\lambda = g \leqslant \lambda f$. O que implica

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda f) &\equiv \sup\{\Phi(g) : \; g \in C(X, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad 0 \leqslant g \leqslant \lambda f\} \\
&= \sup\{\Phi(\lambda h) : \; \lambda h \in C(X, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad 0 \leqslant \lambda h \leqslant \lambda f\} \\
&= \sup\{\lambda \Phi(h) : \; h \in C(X, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad 0 \leqslant h \leqslant f\} \\
&= \lambda \sup\{\Phi(h) : \; h \in C(X, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad 0 \leqslant h \leqslant f\} \\
&= \lambda \Psi(f).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Psi(\lambda f) = \lambda \Psi(f), \qquad \forall f \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \lambda \geqslant 0. \tag{41}$$

No que segue, fixamos um par de funções $f_1, f_2 \in C^+(X, \mathbb{R})$. É claro que para cada par de funções $g_1, g_2 \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant g_1 \leqslant f_1$ e $0 \leqslant g_2 \leqslant f_2$, temos $0 \leqslant g_1 + g_2 \leqslant f_1 + f_2$. Destas desigualdades, da linearidade de Φ e da definição de Ψ segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(g_1) + \Phi(g_2) = \Phi(g_1 + g_2) &\leqslant \sup\{\Phi(g) : \; g \in C(X, \mathbb{R}) \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2\} \\
&\equiv \Psi(f_1 + f_2).
\end{aligned}$$

Tomando o supremo, do lado esquerdo da desigualdade acima, primeiro sobre todas as funções $g_1 \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant g_1 \leqslant f_1$ com g_2 não-negativa fixada e satisfazendo $g_2 \leqslant f_2$ e, em seguida, sobre $g_2 \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant g_2 \leqslant f_2$ ficamos com a seguinte desigualdade

$$\Psi(f_1) + \Psi(f_2) \leqslant \Psi(f_1 + f_2). \tag{42}$$

Por outro lado, para cada $g \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$, considere as funções

$$g_1 \equiv \min\{g, f_1\} \qquad \text{e} \qquad g_2 \equiv g - g_1.$$

Claramente temos que $0 \leqslant g_1 \leqslant f_1$ e $g \geqslant g_1$ o que implica $0 \leqslant g_2$. Vamos verificar que $g_2 \leqslant f_2$. Seja $x \in X$ um ponto arbitrário. Se $g_1(x) \equiv \min\{g(x), f_1(x)\} = g(x)$, então $g_2(x) = g(x) - g(x) = 0 \leqslant f_2(x)$, uma vez que $f_2 \geqslant 0$. Caso contrário, $g_1(x) \equiv \min\{g(x), f_1(x)\} = f_1(x)$. Logo $g_2(x) = g(x) - f_1(x) \leqslant f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) = f_2(x)$, pois g satisfaz $0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$. Portanto, $g_2 \leqslant f_2$. Destas desigualdades ($0 \leqslant g_1 \leqslant f_1$ e $0 \leqslant g_2 \leqslant f_2$) que acabamos de estabelecer, da definição de g_2 e linearidade do funcional Φ segue que

$$\Phi(g) = \Phi(g_1) + \Phi(g_2) \leqslant \Psi(f_1) + \Psi(f_2),$$

para toda $g \in C(X, \mathbb{R})$, satisfazendo $0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$. Tomando o supremo sobre tais g's obtemos a seguinte desigualdade:

$$\Psi(f_1 + f_2) \leqslant \Psi(f_1) + \Psi(f_2).$$

Como em (42) já havíamos estabelecido a desigualdade reversa, podemos concluir que

$$\Psi(f_1 + f_2) = \Psi(f_1) + \Psi(f_2), \qquad \forall f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{R}) \text{ satisfazendo } f_1, f_2 \geqslant 0. \tag{43}$$

A seguir, vamos mostrar que Ψ admite uma extensão linear, definida em todo $C(X, \mathbb{R})$ que será denotada por Φ^+. Como veremos abaixo, Φ^+ será um funcional linear limitado e positivo e também uma das parcelas que aparece na decomposição, $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, do enunciado do lema.

Para isto, dada uma função arbitrária $f \in C(X, \mathbb{R})$ considere sua decomposição padrão como diferença de duas funções positivas, isto é, $f = f^+ - f^-$. Defina

$$\Phi^+(f) \equiv \Psi(f^+) - \Psi(f^-).$$

Vamos mostrar que Φ^+ define um funcional linear, positivo e limitado sobre $C(X, \mathbb{R})$. Seja $f \in C(X, \mathbb{R})$ e $f = g - h$, uma decomposição arbitrária de f como diferença de duas funções contínuas e não-negativas. Neste caso temos $f^+ - f^- = f = g - h$ e logo $f^+ + h = g + f^-$. De (43) segue $\Psi(f^+) + \Psi(h) = \Psi(f^+ + h) = \Psi(g + f^-) = \Psi(g) + \Psi(f^-)$. Mostrando que

$$\Phi^+(f) \equiv \Psi(f^+) - \Psi(f^-) = \Psi(g) - \Psi(h)$$

e consequentemente que $\Psi(f)$ não depende de como fazemos a decomposição de f como diferença de funções contínuas não-negativas. Este fato será importante na prova da linearidade de Φ^+.

Agora vamos provar que Φ^+ define um funcional linear. De fato, sejam $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar arbitrário. Então, temos da definição de Φ^+ e de (43) que

$$\begin{aligned}
\Phi^+(f + \alpha g) &= \Phi^+\Big(f^+ - f^- + (\alpha g)^+ - (\alpha g)^-\Big) \\
&= \Phi^+\Big(f^+ + (\alpha g)^+ - (f^- + (\alpha g)^-)\Big) \\
&= \Psi(f^+ + (\alpha g)^+) - \Psi\Big(f^- + (\alpha g)^-)\Big) \\
&= \Psi(f^+) + \Psi((\alpha g)^+) - \Psi(f^-) - \Psi((\alpha g)^-)) \\
&= \Phi^+(f) + \Phi^+(\alpha g).
\end{aligned}$$

Para finalizar a prova de que Φ^+ é um funcional linear, resta mostrar que $\Phi^+(\alpha g) = \alpha \Phi^+(g)$. Vamos dividir esta prova em dois casos. Primeiro consideramos o caso $\alpha \geqslant 0$. Neste caso a prova segue diretamente da definição de Φ^+ e da identidade (41) já que

$$\begin{aligned}
\Phi^+(\alpha g) &= \Phi^+(\alpha(g^+ - g^-)) \\
&= \Phi^+(\alpha g^+ - \alpha g^-) \\
&= \Psi(\alpha g^+) - \Psi(\alpha g^-) \\
&= \alpha \Psi(g^+) - \alpha \Psi(g^-) \\
&= \alpha\Big(\Psi(g^+) - \Psi(g^-)\Big) \\
&= \alpha \Phi^+(g).
\end{aligned}$$

No segundo caso, onde assumimos que $\alpha < 0$, basta considerar a seguinte decomposição de $\alpha g = (-\alpha)(g^- - g^+) = (-\alpha)g^- - (-\alpha)g^+$. Note que esta é também uma forma de escrever a função αg como diferença de duas funções contínuas não-negativas. Logo, podemos argumentar, de maneira análoga a feita no caso anterior que $\Phi^+(\alpha g) = \alpha\Phi^+(g)$.

Portanto podemos afirmar que para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e toda função $g \in C(X, \mathbb{R})$ temos $\Phi^+(\alpha g) = \alpha\Phi^+(g)$. O que completa a prova de que Φ^+ é um funcional linear.

Podemos verificar imediatamente da definição de Φ^+ que este funcional linear é positivo, já que se $f \geqslant 0$, então $f = f^+$ e segue diretamente de (40) que $\Phi^+(f) = \Psi(f^+) \geqslant 0$. Como o Lema 12 garante que todo funcional linear positivo definido sobre todo $C(X, \mathbb{R})$ é limitado, segue que Φ^+ é um funcional linear limitado.

Para finalizar, definimos $\Phi^- : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi^-(f) \equiv \Phi^+(f) - \Phi(f). \tag{44}$$

Já que Φ^- é definido como diferença de dois funcionais lineares, então Φ^- também é um funcional linear. Como diferenças de funcionais lineares limitados também são funcionais lineares limitados, temos que Φ^- é um funcional linear limitado. Portanto, resta mostrar que este funcional linear é positivo. Para isto, seja $f \in C(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $0 \leqslant f$. Então, $f = f^+$ e

$$\begin{aligned}
\Phi^-(f) &= \Phi^+(f) - \Phi(f) \\
&= \Phi^+(f^+) - \Phi(f^+) \\
&= \Psi(f^+) - \Phi(f^+) \\
&= \sup\left\{\Phi(g) : \ g \in C(X, \mathbb{R}) \text{ e } 0 \leqslant g \leqslant f^+\right\} - \Phi(f^+) \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

O que mostra que Φ^- é um funcional positivo. Finalmente, segue de (44) e das propriedades demonstradas acima que

$$\Phi(f) = \Phi^+(f) - \Phi^-(f), \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R})$$

com Φ^+ e Φ^- sendo funcionais lineares limitados e positivos. ■

8 O Dual Topológico de $C(X, \mathbb{R})$

Como nas seções anteriores (X, d) denota um espaço métrico compacto. Lembramos que uma medida com sinal finita ν sobre $\mathscr{B}(X)$ é uma função $\nu : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

- $\nu(\varnothing) = 0$;
- se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos dois-a-dois disjuntos em $\mathscr{B}(X)$, então

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n),$$

  com a série acima sendo absolutamente convergente.

A coleção de todas as medidas com sinal finitas, definidas sobre a σ-álgebra $\mathscr{B}(X)$ será denotada por $\mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$, ou seja,

$$\mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X)) \equiv \{\nu : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{R} : \nu \text{ é uma medida finita com sinal}\}.$$

Pelo Teorema da Decomposição de Hahn-Jordan, veja [1, p.86-87] sabemos que para cada $\nu \in \mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$, existem únicas medidas positivas $\nu^+, \nu^- : \mathscr{B}(X) \to [0, +\infty)$ tais que $\nu = \nu^+ - \nu^-$. As medidas ν^+ e ν^- são chamadas de **variações positiva e negativa** de ν, respectivamente. Definimos a **variação total** de uma medida com sinal ν, como sendo a medida (não-negativa) dada por $|\nu| \equiv \nu^+ + \nu^-$. Olhando para $\mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$ como um espaço vetorial, sobre $\mathbb{R}$, com as operações naturais de soma e multiplicação por escalar, podemos verificar que a aplicação

$$\mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X)) \ni \nu \longmapsto |\nu|(X) \equiv \|\nu\|_{VT}$$

define uma norma em $\mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$ que é conhecida como **norma da variação total**.

Teorema 15. Se (X, d) é um espaço métrico compacto, então

$$(C(X, \mathbb{R})^*, \|\cdot\|_{\mathrm{op}}) \cong (\mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X)), \|\cdot\|_{VT}),$$

ou seja, existe uma bijeção linear $T : C(X, \mathbb{R})^* \to \mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$ isométrica

$$\|T(\Phi)\|_{VT} = \|\Phi\|_{\mathrm{op}}, \qquad \forall \Phi \in C(X, \mathbb{R})^*.$$

Em outras palavras, o dual topológico de $C(X, \mathbb{R})$ é isometricamente isomorfo ao espaço vetorial das medidas finitas com sinal, sobre a σ-álgebra de Borel, munido da norma da variação total.

Prova. Seja $\Phi \in C(X, \mathbb{R})^*$ arbitrário. Pelo Lema 14 sabemos que é possível escrever Φ como diferença de dois funcionais lineares limitados positivos, isto é, $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$. Vamos mostrar, a seguir, como esta decomposição pode ser usada para construir um isomorfismo isométrico $T : C(X, \mathbb{R})^* \to \mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$, por meio do Corolário 13 do Teorema de Representação de Riesz-Markov (Teorema 11).

Considere a aplicação

$$C(X, \mathbb{R})^* \ni \Phi \longmapsto T(\Phi) \equiv \rho,$$

onde $\rho \in \mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$ é medida com sinal dada por $\rho = \mu - \nu$ e as medidas μ e ν são as únicas medidas não-negativas e finitas fornecidas pelo Corolário 13 que representam os funcionais lineares Φ^+ e Φ^-, respectivamente, isto é,

$$\Phi^+(f) = \int_X f\, d\mu \qquad \text{e} \qquad \Phi^-(f) = \int_X f\, d\nu, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Note que a definição da aplicação T é feita com base na decomposição do funcional Φ fornecida pelo Lema 14. Em outras palavras, a rigor, para calcular $T(\Phi)$ precisamos primeiro decompor Φ como no Lema 14, isto é, $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ e em seguida, usar a forma mais geral do Teorema de Representação de Riesz-Markov (Corolário 13). Embora isto sempre possa ser feito é mais prático mostrar que se consideramos uma decomposição arbitrária de Φ como diferença de dois funcionais lineares positivos limitados e, em seguida, usamos o Teorema de Representação de Riesz-Markov para cada um destes funcionais e consideramos a diferença destas medidas obtemos a mesma medida com sinal que ρ construída acima.

Mais precisamente, vamos mostrar no que segue que se $\Upsilon^+ - \Upsilon^-$ é uma decomposição arbitrária de Φ como diferença de dois funcionais lineares positivos e

$$\Upsilon^+(f) = \int_X f \, d\eta \qquad \text{e} \qquad \Upsilon^-(f) = \int_X f \, d\vartheta, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}),$$

então vale a seguinte igualdade $\eta - \vartheta = \rho = \mu - \nu$. De fato, já que

$$\Phi^+(f) - \Phi^-(f) = \Phi(f) = \Upsilon^+(f) - \Upsilon^-(f), \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R})$$

temos que

$$\Phi^+(f) + \Upsilon^-(f) \; = \; \Upsilon^+(f) + \Phi^-(f), \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

Como consequência direta da igualdade acima, podemos afirmar que

$$\int_X f \, d(\mu + \vartheta) \; = \; \int_X f \, d\mu + \int_X f \, d\vartheta \; = \; \int_X f \, d\eta + \int_X f \, d\nu \; = \; \int_X f \, d(\eta + \nu),$$

para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$. Desta última identidade, do fato de soma de medidas não-negativas e finitas ser uma medida não-negativa e finita; e da unicidade garantida pelo Corolário 13 podemos afirmar que $\mu + \vartheta = \eta + \nu$ e portanto $\rho = \mu - \nu = \eta - \vartheta$. Isto mostra que $T(\Phi)$ é uma medida com sinal definida independentemente da forma de como decompomos o funcional Φ como diferença de dois funcionais positivos. Este fato será importante no nosso próximo passo que é a prova da linearidade da aplicação T.

No que segue, mostramos que T é uma aplicação linear. Sejam $\Phi, \Psi \in C(X, \mathbb{R})^*$. Então, temos da conclusão do parágrafo anterior que qualquer decomposição do funcional $\Phi + \Psi$ como diferença de funcionais lineares positivos pode ser usada para determinação de $T(\Phi + \Psi)$. Portanto, para a calcular $T(\Phi + \Psi)$, podemos usar a decomposição $\Phi + \Psi = (\Phi^+ + \Psi^+) - (\Phi^- + \Psi^-)$. Pelo Teorema de Representação de Riesz-Markov sabemos que existem medidas sobre $\mathscr{B}(X)$ não-negativas e finitas $\mu, \nu, \eta, \vartheta$ tais que:

- $\Phi^+(f) = \int_X f \, d\mu, \qquad \Phi^-(f) = \int_X f \, d\nu,$
- $\Psi^+(f) = \int_X f \, d\eta \quad \text{e} \quad \Psi^-(f) = \int_X f \, d\vartheta,$

para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$. Usando a decomposição $\Phi + \Psi = (\Phi^+ + \Psi^+) - (\Phi^- + \Psi^-)$ e as identidades acima, temos que $T(\Phi + \Psi) = (\mu + \eta) - (\nu + \vartheta) = T(\Phi) + T(\Psi)$. Para completar a prova da linearidade, basta mostrar que $T(\alpha\Phi) = \alpha T(\Phi)$. para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Para isto podemos usar a igualdade $T(\alpha\Phi) = T(\alpha\Phi^+ - \alpha\Phi^-)$. Se $\alpha \geqslant 0$, então $\alpha\Phi^+$ e $\alpha\Phi^-$ são funcionais lineares positivos. Além do mais, se μ representa Φ^+, então $\alpha\mu$ representa $\alpha\Phi^+$. Analogamente, se ν representa Φ^-, então $\alpha\nu$ representa $\alpha\Phi^-$. Portanto $T(\alpha\Phi) = \alpha(\mu - \nu) = \alpha T(\Phi)$. O caso $\alpha < 0$, pode ser tratado de maneira análoga bastando observar que $T(\alpha\Phi) = T(-\alpha\Phi^- - (-\alpha)\Phi^+) = (-\alpha)(\nu - \mu) = \alpha(\mu - \nu) = \alpha T(\Phi)$. O que completa a prova da linearidade de T.

No que segue, mostramos o seguinte resultado auxiliar: se Φ é um funcional linear limitado e positivo e μ é a medida que representa Φ, então $\|T(\Phi)\|_{VT} = \mu(X) = \Phi(\mathbb{1}) = \|\Phi\|_{\text{op}}$. De fato, como μ é uma medida positiva, sua decomposição de Hahn-Jordan é igual a ela mesma e portanto

$$\|T(\Phi)\|_{VT} = \|\mu\|_{VT} = \mu(X) = \int_X \mathbb{1}\, d\mu = \Phi(\mathbb{1}). \tag{45}$$

Já que o valor absoluto de uma função contínua é uma função contínua, $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ e o funcional linear Φ é positivo, temos $-\Phi(|f|) \leqslant \Phi(f) \leqslant \Phi(|f|)$. Consequentemente, $|\Phi(f)| \leqslant \Phi(|f|)$. Usando mais uma vez a positividade de Φ e a desigualdade $|f| \leqslant \|f\|_\infty \mathbb{1}$ temos $\Phi(|f|) \leqslant \Phi(\|f\|_\infty \mathbb{1}) \leqslant \|f\|_\infty \Phi(\mathbb{1})$, para toda $f \in C(X, \mathbb{R})$. Desta forma,

$$\sup_{\|f\|_\infty = 1} |\Phi(f)| \leqslant \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|f\|_\infty \Phi(\mathbb{1}) = \Phi(\mathbb{1}) \leqslant \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\Phi(f)|,$$

o que implica

$$\|\Phi\|_{\text{op}} \equiv \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\Phi(f)| = \Phi(\mathbb{1}). \tag{46}$$

De (45) e (46) temos finalmente que

$$\|\Phi\|_{\text{op}} = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\Phi(f)| = |\Phi(\mathbb{1})| = \Phi(\mathbb{1}) = \|\mu\|_{VT} = \|T(\Phi)\|_{VT}. \tag{47}$$

Próximo passo é estender a conclusão acima para funcionais lineares arbitrários, isto é, mostrar a validade da igualdade $\|\Phi\|_{\text{op}} = \|T(\Phi)\|_{VT}$, para todo $\Phi \in C(X, \mathbb{R})^*$. Primeiro observamos que

$$|\Phi(f)| = \left| \int_X f\, d\gamma \right| \leqslant \int_X |f|\, d|\gamma| \leqslant \|f\|_\infty \cdot |\gamma|(X) = \|f\|_\infty \cdot \|\gamma\|_{VT}, \qquad \forall f \in C(X, \mathbb{R}).$$

O que implica imediatamente que

$$\|\Phi\|_{\text{op}} \leqslant \|T(\Phi)\|_{VT}. \tag{48}$$

Observe que segue da identidade (46) que

$$\|\Phi^+\|_{\text{op}} = \Phi^+(\mathbb{1}) \qquad \text{e} \qquad \|\Phi^-\|_{\text{op}} = \Phi^-(\mathbb{1}).$$

Além do mais, segue da desigualdade triangular para a norma $\|\cdot\|_{\text{op}}$ que

$$\|\Phi\|_{\text{op}} = \|\Phi^+ - \Phi^-\|_{\text{op}} \leqslant \|\Phi^+\|_{\text{op}} + \|\Phi^-\|_{\text{op}} = \Phi^+(\mathbb{1}) + \Phi^-(\mathbb{1}). \tag{49}$$

Para obter a desigualdade reversa, tomamos uma função $g \in C(X, \mathbb{R})$ arbitrária satisfazendo $0 \leqslant g \leqslant 1$. Multiplicando ambos lados destas desigualdades por dois, ficamos com $0 \leqslant 2g \leqslant 2$ o que implica $-1 \leqslant 2g - 1 \leqslant 1$ e logo $|2g - 1| \leqslant 1$, ou seja, $\|2g - 1\|_\infty \leqslant 1$. Desta observações e das propriedades elementares da norma de operadores temos

$$\Phi(2g - 1) \leqslant |\Phi(2g - 1)| \leqslant \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} |\Phi(f)| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |\Phi(f)| \equiv \|\Phi\|_{\text{op}}$$

Da desigualdade acima, da linearidade de Φ e definição de $\Phi^{\pm}$ temos

$$2\Phi(g) - (\Phi^+(\mathbb{1}) - \Phi^-(\mathbb{1})) = \Phi(2g-1) \leqslant \|\Phi\|_{\mathrm{op}}.$$

Tomando, na desigualdade acima, o supremo sobre todas as funções contínuas g's satisfazendo $0 \leqslant g \leqslant \mathbb{1}$ temos

$$2 \sup_{\substack{g\in C(X,\mathbb{R})\\ 0\leqslant g\leqslant \mathbb{1}}} \Phi(g) - (\Phi^+(\mathbb{1}) - \Phi^-(\mathbb{1})) \leqslant \|\Phi\|_{\mathrm{op}}.$$

Lembrando que: Φ^+ é definido em termos da função Ψ introduzida no inicio da prova do Lema 14 e que $\Phi^+(\mathbb{1}) \equiv \Psi(\mathbb{1})$, pela identidade (39), é dado pela seguinte expressão $\Phi^+(\mathbb{1}) = \sup\{\Phi(g) : g \in C(X,\mathbb{R})\text{e } 0 \leqslant g \leqslant \mathbb{1}\}$, podemos concluir, usando a desigualdade acima, que

$$\begin{aligned}
\Phi^+(\mathbb{1}) + \Phi^-(\mathbb{1}) &= 2\Phi^+(\mathbb{1}) - (\Phi^+(\mathbb{1}) - \Phi^-(\mathbb{1})) \\
&= 2 \sup_{\substack{g\in C(X,\mathbb{R})\\ 0\leqslant g\leqslant \mathbb{1}}} \Phi(g) - (\Phi^+(\mathbb{1}) - \Phi^-(\mathbb{1})) \\
&\leqslant \|\Phi\|_{\mathrm{op}}.
\end{aligned}$$

Desta última desigualdade e de (49) segue que $\Phi^+(\mathbb{1}) + \Phi^-(\mathbb{1}) = \|\Phi\|_{\mathrm{op}}$.

Por outro lado, lembrando que: $\gamma = \mu - \nu$; das propriedades ótimas da decomposição de Hahn-Jordan (Proposição A.4) e da identidade (45) obtemos a seguinte estimativa:

$$\|T(\Phi)\|_{VT} \equiv \|\gamma\|_{VT} = \gamma^+(X) + \gamma^-(X) \leqslant \mu(X) + \nu(X) = \Phi^+(\mathbb{1}) + \Phi^-(\mathbb{1}) = \|\Phi\|_{\mathrm{op}},$$

que junto com (48) mostra a validade da igualdade $\|T(\Phi)\|_{VT} = \|\Phi\|_{\mathrm{op}}$.

Para finalizar a prova deste teorema ainda precisamos mostrar que a aplicação linear $T : C(X,\mathbb{R})^* \to \mathscr{M}_s(X,\mathscr{B}(X))$ é uma bijeção.

Para verificar que T é injetiva basta usar sua linearidade e que esta aplicação é isométrica. De fato, se $\Phi, \Psi \in C(X,\mathbb{R})^*$ são tais que $T(\Phi) = T(\Psi)$, então $0 = \|T(\Phi) - T(\Psi)\|_{VT} = \|T(\Phi - \Psi)\|_{VT} = \|\Phi - \Psi\|_{\mathrm{op}}$ e logo $\Phi = \Psi$. O que mostra que T é injetiva.

Para verificar que T é sobrejetiva, vamos usar o Teorema da Decomposição de Hahn-Jordan e o Teorema de Representação de Riesz-Markov. Com efeito, dada $\gamma \in \mathscr{M}_s(X,\mathscr{B}(X))$ sabemos pelo Teorema de Decomposição de Hahn-Jordan que existem medidas finitas e não-negativas γ^+ e γ^- tais que $\gamma = \gamma^+ - \gamma^-$. Considere os funcionais positivos definidos abaixo

$$\Phi^+(f) = \int_X f\, d\gamma^+ \qquad \text{e} \qquad \Phi^-(f) = \int_X f\, d\gamma^-, \qquad \forall f \in C(X,\mathbb{R})$$

e $\Phi \equiv \Phi^+ - \Phi^-$. Então, claramente $\Phi \in C(X,\mathbb{R})^*$ e pela definição de T temos que $T(\Phi) = \gamma$. Como $\gamma \in \mathscr{M}_s(X,\mathscr{B}(X))$ é uma medida com sinal finita e arbitrária segue que T é sobrejetiva. O que completa a prova do teorema. ■

Apêndice A - Teoria da Medida

Uma **medida exterior** em um conjunto X não-vazio é uma função $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ satisfazendo:

- $\mu^*(\varnothing) = 0$;
- se $A \subseteq B$, então $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;
- se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência subconjuntos de X, então $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Teorema A.1. Seja X um conjunto não-vazio e $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(X)$ uma coleção arbitrária de subconjuntos de X satisfazendo: $\varnothing \in \mathscr{C}$ e $X \in \mathscr{C}$. Seja $\rho : \mathscr{C} \to [0, +\infty]$ uma função arbitrária satisfazendo $\rho(\varnothing) = 0$. Então a função $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu^*(E) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \ : \ E_j \in \mathscr{C} \text{ e } E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} E_j \right\}$$

define uma medida exterior sobre X.

Definição A.2 (Condição Carathéodory)**.** Seja X um conjunto não-vazio e μ^* uma medida exterior sobre X. Dizemos que um conjunto $A \subseteq X$ satisfaz a condição de Carathéodory (alternativamente, que A é μ^*-mensurável) se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \qquad \forall E \subseteq X.$$

Denotaremos por $\mathscr{M}_{\mu^*}$ a coleção de todos os subconjuntos de X que satisfazem a condição de Carathéodory.

Teorema A.3 (Teorema de Carathéodory)**.** Seja X um conjunto não-vazio e μ^* uma medida exterior sobre X. Então a coleção $\mathscr{M}_{\mu^*}$ dos conjuntos que satisfazem a condição de Carathéodory da Definição A.2 é uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Além do mais, $\mu \equiv \mu^*|_{\mathscr{M}_{\mu^*}}$ define uma medida completa sobre $\mathscr{M}_{\mu^*}$.

Proposição A.4. Seja $\nu \in \mathscr{M}_s(X, \mathscr{B}(X))$ uma medida com sinal finita e suponha que $\nu = \mu - \gamma$, onde μ e γ são medidas positivas e finitas definidas sobre $\mathscr{B}(X)$. Sejam ν^+ e ν^- as variações positiva e negativa de ν, respectivamente $(\nu = \nu^+ - \nu^-)$. Então

$$\nu^+(B) \leqslant \mu(B) \qquad \text{e} \qquad \nu^-(B) \leqslant \gamma(B) \qquad \forall B \in \mathscr{B}(X).$$

Apêndice B - Espaços Métricos

Sejam (X, d) um espaço métrico e $C \subseteq X$ um subconjunto arbitrário não-vazio. Definimos a distância de um ponto qualquer $x \in X$ ao conjunto C pela seguinte expressão

$$d(x, C) \equiv \inf_{y \in C} d(x, y).$$

Proposição B.1. Sejam (X, d) um espaço métrico não-vazio e $C \subseteq X$ um subconjunto arbitrário. Então $d(x, C) = 0$ se, e somente, se $x \in \overline{C}$.

Teorema B.2. Sejam (X, d) um espaço métrico não-vazio, $K \subseteq X$ é um subconjunto compacto de X não-vazio e e $F \subseteq X$ um subconjunto de X fechado não-vazio. Se $K \cap F = \varnothing$, então

$$d(K, F) \equiv \inf_{\substack{x \in K \\ y \in F}} d(x, y) > 0.$$

Referências

[1] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, volume 40. John Wiley & Sons, second edition, 1999.

[2] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. Reprint of the 1967 original.