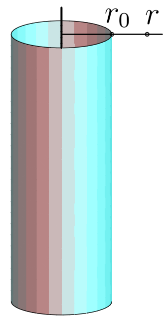
Universidade de Brasília - IE
Departamento de Matemática

Cálculo I

Lista de Exercícios – Semana 4 – 1.º/2004

1) **[1.º/2002]** Suponha que um fio retilíneo, de seção transversal circular de raio r_0, seja percorrido por uma corrente estacionária. A corrente gera um campo magnético cuja intensidade I, em um ponto do espaço, depende da distância r do ponto ao eixo do fio. Assim, $I = I(r)$, e pode-se mostrar que, em um sistema de unidades apropriado, $I(r)$ é dada por

$$I(r) = \begin{cases} \dfrac{r}{r_0^2}, & \text{se } \ 0 \leqslant r < r_0 \\[2ex] \dfrac{1}{r}, & \text{se } \ r \geqslant r_0 \end{cases}$$



a) Calcule o limite lateral $\displaystyle\lim_{r \to r_0^+} \frac{I(r) - I(r_0)}{r - r_0}$.

b) Verifique se a função $I(r)$ é derivável em $r = r_0$.

c) Se um aparelho deixa de detectar a presença do campo para intensidades menores que 10^{-3}, determine a distância r do fio a partir da qual o aparelho deixa de detectar a presença do campo.

2) **[2.º/2002]** Um supermercado precisa encomendar 1.200 caixas de um determinado produto para atender as vendas do próximo ano. Cada encomenda tem um custo fixo de R$ 75,00 e, se as encomendas forem de x caixas cada, o custo anual de armazenagem é igual a $4\,x$. Além disso, como devem ser feitas n encomendas, em que $n = 1.200/x$, segue-se que o custo total $C(x)$ das encomendas é dado por

$$C(x) = 4\,x + 75\,n = 4\,x + 75 \times \frac{1.200}{x} = 4\,x + \frac{90.000}{x}.$$

Pode-se mostrar que o número x_0 que minimiza o custo $C(x)$ é aquele para o qual a derivada $C'(x)$ se anula.

a) Com base nos valores de $C(1)$, $C(100)$ e $C(1.200)$, justifique a afirmação de que o ponto x_0 que minimiza o custo é tal que $1 < x_0 < 1.200$.

b) Use a definição para calcular, separadamente, as derivadas das funções $f(x) = 4\,x$ e $g(x) = 90.000/x$.

c) Use o item anterior para calcular a derivada $C'(x)$.

d) Usando as informações anteriores, determine o valor de x_0.

3) [**1.º/2003**] As figuras abaixo ilustram os gráficos da função $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, $x \in \mathbb{R}$, para alguns valores específicos das constantes a, b e c, em que $a \neq 0$.

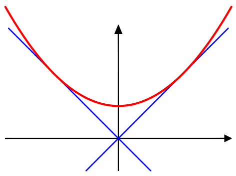


Figura 1

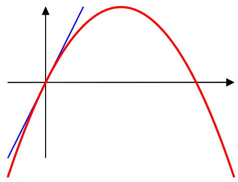


Figura 2

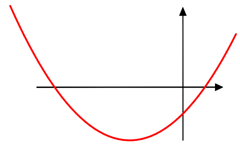


Figura 3

Observe que, na Figura 1, existem exatamente duas retas tangentes que passam pela origem. Na Figura 2, existe apenas uma e, na Figura 3, não existe reta tangente que passa pela origem. Esses casos estão relacionados com o sinal do quociente c/a, como segue-se dos itens abaixo.

a) Usando as regras de derivação, determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em um ponto genérico $(x_0, f(x_0))$.

b) No caso em que $a = 2$ e $c = 2$, determine, caso existam, as retas tangentes ao gráfico de $f(x)$ que passam pela origem.

c) Repita o item anterior no caso em que $a = -1$ e $c = 0$.

d) Determine as condições que as constantes a e c devem satisfazer para que existam duas retas tangentes ao gráfico de $f(x)$ que passem pela origem.

4) [**2.º/2003**] Em um determinado processador, a quantidade de x Gb de dados, com $x \leqslant 10$, é processada em $T(x) = 2\,x + 280$ segundos. Para uma quantidade $x > 10$ Gb, o tempo de processamento é igual a $T(x) = K(x^2 - 10^2) + 300$ segundos, em que K é uma constante positiva. Isso define a função $T\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, em que $T(x)$ é o tempo de processamento de uma quantidade x de dados.

a) Calcule os limites laterais $\displaystyle\lim_{x \to 10^-} T(x)$ e $\displaystyle\lim_{x \to 10^+} T(x)$.

b) Determine a imagem da função $T(x)$.

c) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x \to 10^+} \frac{T(x) - T(10)}{x - 10}$.

d) Determine o valor de K para o qual a função $T(x)$ é derivável em $x = 10$.