Universidade de Brasília - IE
Departamento de Matemática

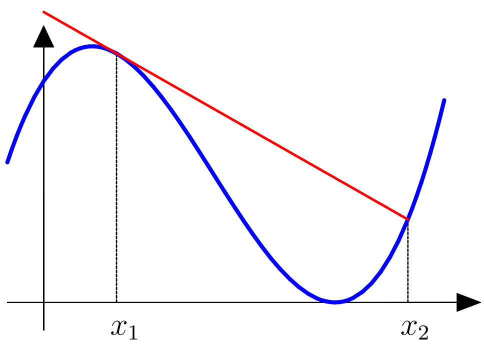
Cálculo I

Lista de Exercícios – Semana 5 – 1.^{o}/2004

1) [**1.^{o}/2002**] A figura abaixo ilustra o corte transversal de um relevo descrito pela função

$$f(x) = (x+1)(x-4)^2 = x^3 - 7x^2 + 8x + 16.$$

Ilustra também um raio de sol tangente ao relevo no ponto de abscissa x_1 que incide sobre o solo no ponto de abscissa x_2. Assim, a parte do relevo compreendida entre x_1 e x_2 está assombreada naquele instante.



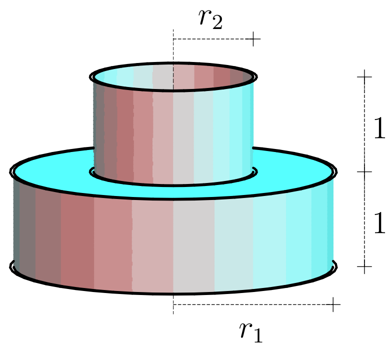
a) Calcule a derivada da função $f(x)$.

b) Determine, em um ponto genérico $(a, f(a))$, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$.

c) Determine a parte assombreada do relevo no caso em que $x_2 = 4$, ou seja, determine x_1 nesse caso.

2) [**2.^{o}/2002**] A figura abaixo ilustra um recipiente formado por dois cilindros circulares retos justapostos de raios $r_1 = 4/\sqrt{\pi}$ dm e $r_2 = 2/\sqrt{\pi}$ dm. Suponha que, a partir do instante $t_0 = 0$, se comece a colocar água nesse recipiente a uma taxa de 1 dm^3 por minuto. Nessa situação, e com as medidas indicadas na figura, o nível da água $h = h(t)$ no recipiente, em decímetros, é dado por

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{16}, & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 16 \\[2ex] \dfrac{t}{4} - 3, & \text{para } 16 < t \leqslant 20. \end{cases}$$



a) Esboce o gráfico da função $h(t)$.

b) Determine, caso existam, os instantes $t \in (0, 20)$ nos quais $h(t)$ não é derivável.

c) Esboce o gráfico da função $v(t)$, em que $v(t) = h'(t)$ é a velocidade com que aumenta o nível da água no recipiente.

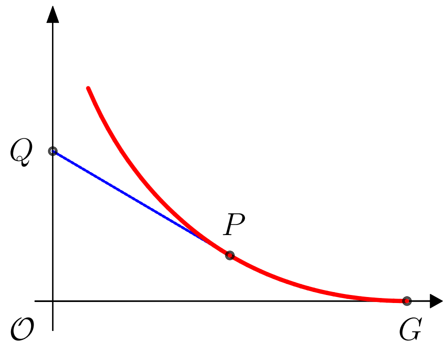
d) Decida se existe algum instante t_1 no intervalo $(0, 20)$ no qual $v(t_1) = 1/14$.

3) **[1.^{o}/2003]** Considere a situação em que um gato, inicialmente no ponto $G = (1, 0)$, descobre um rato situado na origem $\mathcal{O} = (0, 0)$ e parte em sua perseguição. No mesmo instante, o rato percebe o gato e foge seguindo a direção positiva do eixo $\mathcal{O}y$, com velocidade igual à metade da do gato. A trajetória percorrida pelo gato para alcançar o rato é conhecida como *curva de perseguição*. Essa curva tem a seguinte propriedade: se o rato e o gato estiverem nas posições Q e P, ilustradas na figura abaixo, então a reta determinada pelos pontos P e Q é tangente à curva no ponto P. No exemplo considerado, pode-se mostrar que a curva de perseguição é o gráfico da função $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}\,(\frac{x}{3} - 1) + \frac{2}{3}$.

a) Calcule, pela definição, a derivada de $g(x) = \sqrt{x}$ em um ponto $x_0 \in (0, 1)$.

b) Use o item anterior e as regras de derivação para calcular a derivada $f'(x_0)$.

c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.



d) Determine a posição $Q = (0, y_0)$ em que se encontra o rato no instante em que o gato estiver na posição $P = (1/4, f(1/4))$.

e) Calcule o espaço total percorrido pelo rato antes de ser apanhado pelo gato.

4) **[2.^{o}/2003]** No estudo da produtividade de uma fábrica, suponha que a quantidade de bens produzidos possa ser modelada, em função do número x de empregados, por uma função derivável $p(x)$, em que $p(x)$ é medida em milhares e x em centenas. A produtividade média por empregado é então dada pela função $M(x) = \dfrac{p(x)}{x}$, e pode-se mostrar que o número x_0 de empregados que maximiza a função $M(x)$ é aquele para o qual $M'(x_0) = 0$.

a) Usando as regras de derivação, calcule $M'(x)$ em termos da derivada $p'(x)$.

b) Use o item anterior para justificar a afirmação de que $M'(x_0) = 0$ se, e somente se, $p'(x_0) = M(x_0)$.

c) Calcule $p'(x)$ supondo que $p(x) = \dfrac{2\,x^2}{x^2 + 1}$.

d) Supondo $p(x)$ como no item anterior, determine o número de empregados que maximiza a produtividade média da fábrica.