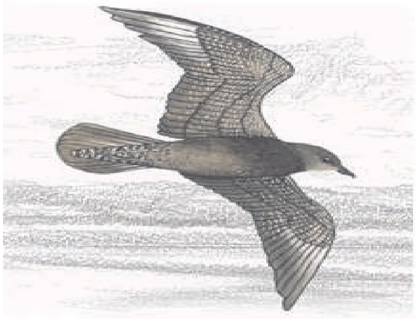
Universidade de Brasília - IE
Departamento de Matemática

Cálculo I

Lista de Exercícios – Semana 9 – 1.^{o}/2004

1) **[1.^{0}/2002]** Segundo o modelo de Ward-Smith, a potência P necessária para o vôo horizontal de uma gaivota depende de sua velocidade v, e é dada pela função



$$P(v) = K_1\,v^3 + \frac{K_2}{v}$$

em que $v > 0$ e K_1 e K_2 são constantes positivas que dependem da densidade do ar, da área das asas, do peso do pássaro etc. Em longos percursos, as gaivotas voam à velocidade que minimiza a potência necessária. Suponha que, em unidades apropriadas de medidas, $K_1 = 1$ e $K_2 = 3$.

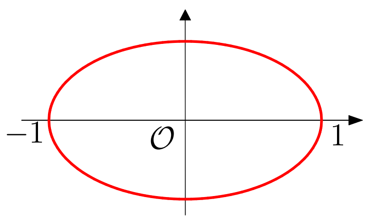
a) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento de P.

b) Determine os intervalos em que o gráfico de P é côncavo para baixo e os que é côncavo para cima.

c) Calcule os limites $\lim\limits_{v\to 0^+} P(v)$ e $\lim\limits_{v\to\infty} P(v)$, e esboce o gráfico de P no domínio $(0,\infty)$.

d) Determine a velocidade v_0 que é utilizada pelas gaivotas em vôos de longa distância.

2) **[2.^{0}/2002]** Em um sistema de coordenadas de origem $\mathcal{O} = (0,0)$, o gráfico da equação $x^2 + 4\,y^2 = 1$ é uma elipse, conforme ilustra a figura abaixo. Suponha que essa equação defina implicitamente um função derivável $y = f(x)$ para $x \in (-1,1)$, e denote por L_0 a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Julge os itens a seguir.



C | E a) Tem-se necessariamente que $\left|f(1/2)\right| = \sqrt{3}/4$.

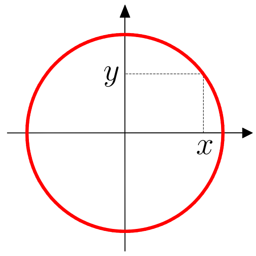
C | E b) Calculando implicitamente a derivada, obtém-se que $f'(x)$ não muda de sinal para $x \in (-1,1)$.

C | E c) A equação de L_0 pode ser escrita na forma $x_0 x + 4f(x_0)y = 1$.

C | E d) Não existe o limite $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$.

C | E e) Para algum ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ com $x_0 \in (0,1)$, o segmento $\mathcal{O}P_0$ é ortogonal à reta L_0.

3) **[1.^{0}/2003]** Conforme ilustra a figura abaixo, as áreas dos retângulos inscritos na circunferência $x^2 + y^2 = 16$ podem ser calculadas por meio da função $A(x) = 4\,x\,\sqrt{16 - x^2}$, com $x \in [0, 4]$.



a) Calcule os pontos críticos da função $A(x)$ no intervalo $(0, 4)$.

b) Determine os intervalos de crescimento e os de decrescimento da função $A(x)$.

c) Determine os intervalos em que a concavidade do gráfico de $A(x)$ é voltada para baixo e os intervalos em que concavidade é voltada para cima.

d) Esboce o gráfico de $A(x)$.

4) **[2.^{0}/2003]** Denote por $v(t)$ a velocidade de um corpo de massa $m = 0,1$ kg que foi lançado verticalmente com velocidade inicial $v(0) = 63$ m/s e sujeito a uma força de resistência do ar $FR = -v(t)$. Nesse caso, usando a aproximação $g = 10$ m/s^2 da aceleração da gravidade, pode-se mostrar que $v(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$(*) \begin{cases} \dfrac{v'(t)}{1 + v(t)} & = & -10 \\ \\ v(0) & = & 63 \end{cases}$$

Como ilustra os itens a seguir, o problema $(*)$ pode ser melhor entendido a partir do fato de que, se a derivada de uma função for identicamente nula em um intervalo, então a função é necessariamente constante.

a) Calcule as derivadas das funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

b) Use o item anterior e as informações dadas para obter uma relação entre as funções $\ln(1 + v(t))$ e $-10\,t$.

c) Use o item anterior e a condição inicial $v(0) = 63$ para obter a expressão de $v(t)$.

d) Determine o instante em que o corpo alcança a altura máxima usando a aproximação $\ln(2) = 0,69$.