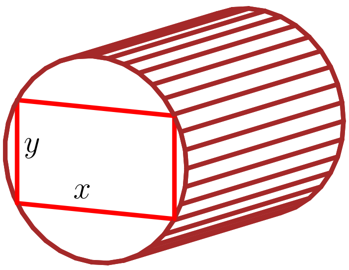
Universidade de Brasília - IE
Departamento de Matemática

# Cálculo I

## Lista de Exercícios – Semana 10 – 1.$^o$/2004

1) [**1.$^0$/2002**] Suponha que uma viga retangular, de largura $x$ e altura $y$, deva ser cortada de um cilíndro de seção circular de raio $a$, como ilustra a figura abaixo. A resistência $R$ dessa viga é diretamente proporcional ao produto de sua largura $x$ pelo quadrado de sua altura $y$. Indique por $K$ a constante de proporcionalidade e observe que a altura $y = y(x)$ pode ser obtida a partir da largura $x$, e portanto a resistência $R = R(x)$ pode ser expressa apenas em função de $x$.




a) Determine a expressão de $y = y(x)$ em termos de $x$.

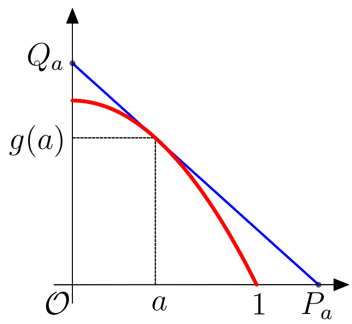
b) Obtenha a expressão da resistência $R = R(x)$ como função de $x$.

c) Determine os pontos críticos de $R(x)$ no domínio $(0, 2a)$, classificando-os como de mínimo local, máximo local ou de inflexão.

d) Determine o valor máximo da resistência que pode ser obtido entre as vigas cortadas do cilindro.

2) [**2.$^o$/2002**] A figura abaixo ilustra o gráfico da função $g(x) = 1 - x^2$ com $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ilustra ainda a reta tangente $L_a$ ao gráfico de $g(x)$ em um ponto $(a, g(a))$ e os pontos $P_a$ e $Q_a$ de interseção desta reta com os eixos $\mathcal{O}x$ e $\mathcal{O}y$, respectivamente.

a) Calcule a equação da reta $L_a$ e, em seguida, obtenha as coordenadas dos pontos $P_a$ e $Q_a$ ilustrados na figura.




b) Usando o item anterior, defina como $A(a)$ a função que, a cada $a \in (0, 1)$, fornece a área do triângulo $P_a\mathcal{O}Q_a$.

c) Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento da função $A(a)$.

d) Calcule os limites $\lim_{a \to 0^+} A(a)$ e $\lim_{a \to 1^-} A(a)$ e esboce o gráfico de $A(a)$.

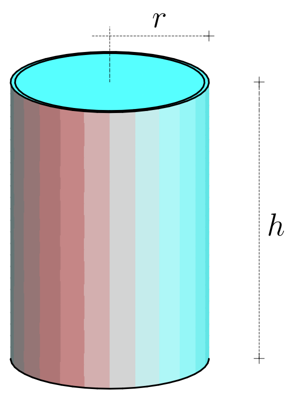
3) [**1.$^o$/2003**] Suponha que, na produção de uma lata de refrigerante, o custo do material da lateral e do fundo é de uma unidade monetária por centímetro quadrado, mas para o material da tampa esse custo é de 98/27 unidades monetárias. Suponha ainda que a lata seja cilíndrica de raio $r$ cm e altura $h$ cm, conforme ilustra a figura abaixo, e que o volume seja constante e igual a $5^3\,\pi$ cm$^3$.

a) Obtenha a expressão da altura $h$ em função do raio $r$ e do volume da lata.

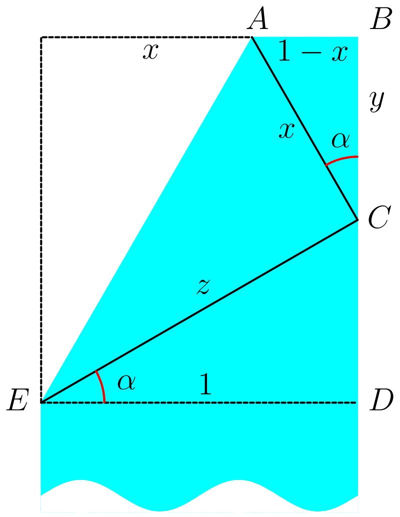
b) Calcule a área lateral $L(r)$ da lata em função do raio $r$.

c) Determine a função $C(r)$ que, a cada $r$, associa o custo de produção de uma lata de raio $r$.

d) Calcule o valor $r_0$ que minimiza o custo de produção, justificando a sua resposta.




4) [**2.$^o$/2003**] Em uma longa fita de papel de largura igual a 1 m, um dos cantos é dobrado conforme ilustra a figura abaixo. Com a notação da figura, o comprimento $y$ pode ser calculado em termos da variável $x$ usando o teorema de Pitágoras. Em seguida, o comprimento $z$ pode também ser calculado em termos da variável $x$ usando o fato de que os triângulos $ABC$ e $CDE$ são semelhantes. Após esses cálculos, é claro então que a área $a(x)$ do triângulo $ACE$ pode ser expressa em termos da variável $x$.




a) Proceda como indicado para calcular os comprimentos $y$ e $z$ em termos da variável $x$.

b) Determine o domínio e a expressão da função $a(x)$.

c) Calcule os pontos críticos de $a(x)$.

d) Esboce o gráfico de $a(x)$ indicando os intervalos de crescimento e decrescimento, os valores da função nos pontos críticos e o seu comportamento nos pontos extremos do domínio.