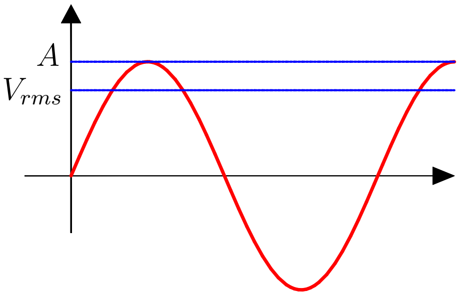
Cálculo I

Lista de Exercícios – Semana 13 – 1.^{o}/2004

1) **[1.^{o}/2002]** A voltagem $V(t)$ (em Volts) de uma corrente alternada pode ser modelada por $V(t) = A\,\text{sen}(2\pi f t)$, em que A é a amplitude da corrente, f é a frequência (em Hz), $1/f$ é o período e t é o tempo (em segundos). O que os voltímetros medem é o valor V_{rms}, obtido como a raiz quadrada do valor médio da função $V^2(t)$ no intervalo $[0, 1/f]$, isto é,



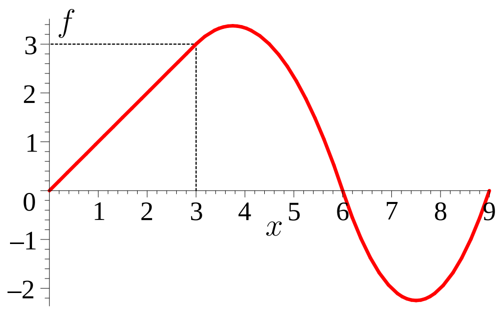
$$V_{rms} = \left(f \int_0^{1/f} V^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Determine uma primitiva para a função $V^2(t)$ usando a identidade trigonométrica $\text{sen}^2(u) = (1/2)(1 - \cos(2u))$ e a substituição de variáveis $u = 2\pi f t$.

b) Usando o item anterior, calcule o valor V_{rms} em termos das constantes fornecidas.

c) Determine a amplitude de corrente no caso de Brasília, em que $V_{rms} = 220$ Volts.

2) **[2.^{o}/2002]** Considere uma reta orientada da esquerda para a direita, com origem no ponto $\mathcal{O}$. Suponha que, no instante t, a posição em relação à origem de uma partícula que se desloca ao longo dessa reta seja dada por $s(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$, em que $f\colon [0,9] \to \mathbb{R}$ é a função cujo gráfico está ilustrado abaixo. Considere ainda que t seja dado em segundos, que $s(t)$ seja dada em metros e que, para $0 \leqslant x \leqslant 3$, o gráfico de $f(x)$ seja um segmento de reta. Julgue os itens a seguir.



| C | E | a) A partícula está se afastando da origem entre os instantes $t = 5$ e $t = 6$.

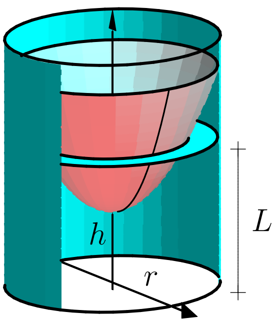
| C | E | b) A partícula percorre menos de 4 metros nos primeiros 3 segundos.

| C | E | c) No instante $t = 6$ a partícula está na origem $\mathcal{O}$.

| C | E | d) No instante $t = 9$ a partícula está à direita de $\mathcal{O}$.

| C | E | e) O espaço total percorrido pela partícula é igual a $\displaystyle\int_0^6 f(r)\,dr - \int_6^9 f(r)\,dr$.

3) [**1.º/2003**] Considere um recipiente cilíndrico de raio $r = 5$ cm, inicialmente em repouso com água até a altura $L = 10$ cm. Em seguida, o recipiente começa a girar até que, juntamente com a água, alcance uma velocidade angular constante igual a ω rad/s. Nesse caso, a superfície da água corresponde à rotação, em torno do eixo $\mathcal{O}y$, do gráfico de uma função $f(x)$, com $x \in [0, r]$. Não havendo perda de água, pode-se mostrar que $f(x) = h + \omega^2 x^2/2g$, onde $g = 980$ cm/s^2 é a aceleração da gravidade e h é uma constante que depende de ω.



a) O volume V do sólido de rotação do gráfico de $f(x)$ em torno do eixo $\mathcal{O}y$ é igual a $V = \int_0^r 2\pi\, x\, f(x)\, dx$. Use essa informação para calcular o volume de água no recipiente em termos de ω e h.

Resposta: $\boxed{}$

b) Usando o item anterior, obtenha h como função de ω.

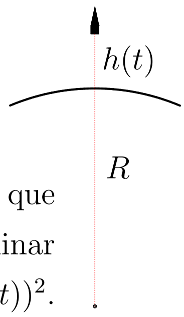
Resposta: $\boxed{}$

c) Determine o valor de ω para que h seja igual à metade da altura da água em repouso.

Resposta: $\boxed{}$

4) [**2.º/2003**] Nem tudo o que sobe desce! De fato, pode-se imaginar que um corpo seja lançado com uma velocidade tão grande que acabe escapando da atração gravitacional da Terra. Para se ter uma idéia dessa velocidade, denote por v_0 a velocidade inicial, por m a massa e por $h(t)$ a altura do corpo a partir do solo no instante t. Desconsiderando a resistência do ar, o corpo está sujeito apenas à força gravitacional $F = -m\,M\,G/(R+h(t))^2$, em que G é constante, M é a massa e R é o raio da Terra. Usando a segunda lei de Newton $F = m\,h''(t)$, em que $h''(t)$ é a aceleração do corpo, segue-se que $h(t)$ satisfaz às condições

$$(*)\begin{cases} m\,h''(t) &= -\dfrac{m\,M\,G}{(R+h(t))^2} \\ h(0) &= 0 \text{ e } h'(0) = v_0 \end{cases}$$



a) Cancelando a massa m e multiplicando a equação em $(*)$ por $h'(t)$, obtém-se que $h'(t)\,h''(t) = -M\,G\,h'(t)/(R+h(t))^2$. Use substituição de variáveis para determinar a integral indefinida de cada uma das funções $h'(t)\,h''(t)$ e $-M\,G\,h'(t)/(R+h(t))^2$.

b) Usando o item anterior, verifique que $h'(t)^2$ pode ser expressa em termos da função $h(t)$, das constantes M e G e de uma constante arbitrária K.

c) Use as condições iniciais $h(0) = 0$ e $h'(0) = v_0$ para determinar a constante K.

d) Determine agora uma outra constante v_e tal que, se $v_0 \geqslant v_e$, então a velocidade $h'(t)$ é sempre positiva. A constante v_e é dita a velocidade de escape da Terra.