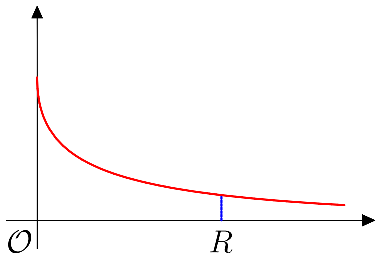
Cálculo I

Lista de Exercícios – Semana 14 – 1.º/2004

1) **[1.º/2002]** A figura abaixo ilustra o gráfico da função $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$. A área $A(R)$ sob esse gráfico entre $x = 0$ e $x = R$ é dada pela integral

$$A(R) = \int_0^R e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$



a) Use a mudança de variável $x = t^2$ para transformar a integral indefinida $\int e^{-\sqrt{x}}\, dx$ em uma outra cujo integrando não envolva a função raiz quadrada.

b) Calcule a integral do item anterior usando integração por partes.

c) Usando os resultados anteriores, determine explicitamente a função $A(R)$.

d) Calcule o limite $\lim\limits_{R\to\infty} A(R)$ usando a regra de H'Lôpital, e verifique se a área sob o gráfico de $f(x)$, para $x \in [0,\infty)$, é finita.

2) **[2.º/2002]** No estudo dos fogos de artifício, suponha que $v(t)$ seja a velocidade de uma bomba lançada verticalmente com velocidade inicial $v(0) = 50$ m/s. Suponha ainda que a bomba tenha massa $m = 0,1$ kg, que a aceleração da gravidade seja $g = 10$ m/s^2 e que a força de resistência do ar F seja modelada por $F = -0,01\, v(t)$. Nessas condições, $v(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{100 + v(t)} = -0,1 \quad \text{para } t > 0, \\ v(0) = 50\,. \end{cases}$$

a) Supondo $100 + v(t) > 0$, obtenha uma primitiva para a função $\dfrac{v'(t)}{100 + v(t)}$.

b) Use o item anterior e a condição inicial $v(0) = 50$ para obter a função $v(t)$.

c) Determine o instante t_0 em que a bomba alcança a altura máxima usando as aproximações $\ln(2) = 0,7$ e $\ln(3) = 1,1$.

3) **[1.º/2003]** Suponha que, juntamente com o combustível, um foguete tenha massa inicial de m_0 kg, e que o combustível seja consumido a uma taxa de r kg/s. Assim, a massa do foguete no instante $t \geqslant 0$ é dada por $m(t) = m_0 - r\,t$. Suponha ainda que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante de v_0 m/s em relação ao foguete. Nesse caso, indicando por g a aceleração da gravidade e considerando valores pequenos de t, a velocidade do foguete em relação à Terra pode ser modelada por

$$v(t) = -g\,t - v_0 \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right).$$

a) Determine uma primitiva para a função $\ln(x)$ usando integração por partes.

b) Use o item anterior e substituição de variáveis para determinar uma primitiva para a função $\ln(m(t)/m_0)$.

c) Determine a altura $s(t)$ do foguete em um instante $t > 0$, supondo $s(0) = 0$.

d) Seja t_0 o instante em que $m(t_0)$ é igual a 90% da massa inicial m_0. Calcule a altura do foguete no instante t_0 em termos das constantes m_0, r, v_0, g e $\ln(9/10)$.

4) **[2.º/2003]** Recentemente, um grande esforço tem sido feito para despoluir o Lago Paranoá, que tem aproximadamente volume $V = 500 \times 10^6$ m^3 e vazão $v = 10^6$ m^3/dia. Denotando por $q(t)$ a quantidade de detritos no instante t, suponha $q(0) = 0{,}20\,V$ kg e que se queira reduzir essa quantidade para um valor inferior a $0{,}10\,V$. Para isso, pretende-se que o lançamento de detritos seja limitado a uma concentração de $0{,}05$ kg/m^3. Seriam então lançados $0{,}05\,v$ kg e retirados $(q(t)/V)\,v$ kg de detritos por dia. Nesse caso, a taxa de variação $q'(t)$ é igual à quantidade que entra menos a quantidade que sai de detritos por dia.

a) Obtenha uma equação diferencial satisfeita pela função $q(t)$.

Resposta:

b) Obtenha a expressão de $q(t)$ usando o item anterior e a condição inicial $q(0) = 0{,}20\,V$.

Resposta:

c) Usando a aproximação $\ln(3) = 1{,}1$, determine o instante t_0 para o qual $q(t_0) = 0{,}10\,V$.

Resposta:

d) Calcule o limite $\lim_{t\to\infty} q(t)$.

Resposta: