Universidade de Brasília - IE
Departamento de Matemática

Cálculo I

Lista de Exercícios – Semana 15 – 1.º/2004

---

1) [**1.º/2002**] Segundo o modelo logístico, a partir de um valor inicial $k > 0$, a taxa de crescimento $p'(t)/p(t)$ de uma população $p(t)$ deve diminuir proporcionalmente ao aumento da população. Esta hipótese corresponde a supor que a função $p(t)$ satisfaz à equação $p'(t)/p(t) = k - cp(t)$, em que c é uma constante positiva. Equivalentemente, usando a notação $a = k/c$, essa equação pode ser escrita na forma

$$(*) \qquad \frac{p'(t)}{p(t)(a - p(t))} = c.$$

a) Para determinar $p(t)$, primeiro determine constantes A e B tais que

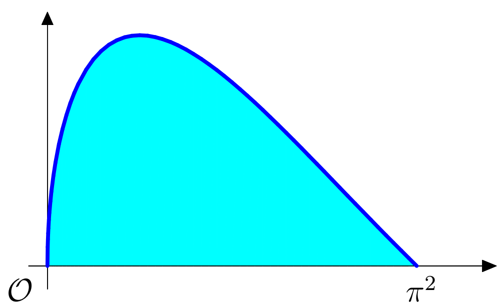
$$\frac{1}{x(a-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x}.$$

b) Usando o item anterior e lembrando que $\dfrac{d}{dt}\ln(u(t)) = u'(t)/u(t)$, obtenha uma primitiva para $p'(t)/[p(t)(a - p(t))]$ na forma de uma soma de duas funções, cada uma delas envolvendo o logaritmo.

c) Usando as propriedades do logaritmo, transforme a soma das duas funções do item anterior em uma função da forma $\ln(v(t))$, em que a expressão de $v(t)$ envolve $p(t)$.

d) Finalmente, usando a equação $(*)$ e supondo que $p(t)$ e $a - p(t)$ sejam positivas, obtenha uma expressão para $p(t)$.

2) [**2.º/2002**] Considere o problema de calcular a área A sob o gráfico da função $f(x) = \mathrm{sen}(\sqrt{x})$ definida no intervalo $[0, \pi^2]$, conforme ilustra a figura a seguir.



a) Para o cálculo da área, primeiro use integração por partes para calcular $\int y\,\mathrm{sen}(y)\,dy$.

b) Use a mudança de variável $y = \sqrt{x}$ para transformar a integral indefinida $\int \mathrm{sen}(\sqrt{x})\,dx$ em uma outra cujo integrando não envolva a função raiz quadrada.

c) Use os itens anteriores para obter uma primitiva para a função $f(x)$.

d) Calcule a área A usando o item anterior.

---

3) [**1.^{o}/2003**] Suponha que uma população inicial de 200 mil fêmeas de um determinado inseto habite uma região agrícola, e que esteja crescendo a uma taxa 50% ao ano. Para retardar o crescimento sem o uso de pesticidas, foram introduzidos 50 mil machos estéreis na região, que cruzam com as fêmeas mas não produzem descendentes. Indique por p a população, em milhares, de fêmeas desse inseto em um determinado instante. Nesse caso, o tempo $T(p)$, em anos, necessário para que essa população alcance o número $p < 200$ pode ser modelado pela função

$$T(p) = -2\int_{200}^{p} \frac{x+50}{x(x+100)}\,dx\ .$$

a) Determine constantes A e B tais que

$$\frac{x+50}{x\,(x+100)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+100}.$$

b) Usando o item anterior, obtenha uma expressão explícita para $T(p)$ em termos da função logarítmica.

c) Usando a aproximação $\ln(3) = 1,1$, determine o tempo necessário para que a população de fêmeas seja reduzida à metade da população inicial.

4) [**2.^{o}/2003**] Suponha que 1 g de uma substância química A combine com 3 g de outra substância B para formar o composto C, e que hajam inicialmente 50 g de A e 33 g de B. Denotando por $Q(t)$ a quantidade de C no instante t, tem-se que $Q(t)/4$ correspondem à massa da substância A e $3\,Q(t)/4$ correspondem à de B. Assim, as quantidades remanescentes de A e B após t segundos são, respectivamente, $50 - Q(t)/4$ e $33 - 3\,Q(t)/4$. Supondo ainda que a taxa $Q'(t)$ de formação do composto C seja proporcional ao produtos das quantidades remanescentes, segue-se que $Q(t)$ satisfaz à equação

$$(**)\quad Q'(t) = k\,(50 - Q(t)/4)\,(33 - 3\,Q(t)/4) = K\,(200 - Q(t))\,(44 - Q(t))$$

em que k e K são constantes .

a) Para obter a função $Q(t)$, primeiro calcule a integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(200-x)(44-x)}$.

b) Use a equação $(**)$, o item anterior e subtituição de variáveis para obter uma expressão de $Q(t)$ em termos da constante K e de uma constante arbitrária L.

c) Determine a constante L usando a condição inicial $Q(0) = 0$.

d) Determine a maior quantidade do composto C que pode ser produzida a partir da reação dada.
