Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

1.ª Prova 1.º/2000 24/04/00

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

1) Considere a função $f(x) = 3 + \dfrac{1}{1-x}$ definida para $x \neq 1$.

a) Calcule os limites laterais de f no ponto 1.

b) Calcule os limites de f em $+\infty$ e $-\infty$.

c) Usando os itens anteriores, esboce o gráfico de f.

2) Em um país imaginário o imposto de renda é cobrado da seguinte maneira: aqueles que ganham até R\$10.00,00 são isentos; os que ganham mais de R\$10.000,00 e até R\$20.000,00 pagam 10% sobre a renda, menos um valor fixo c; de todos os demais é cobrada uma taxa de 20% da renda. Nessas circunstâncias,

a) determine a função $I(x)$ que associa a renda x ao valor do imposto.

b) calcule a parcela a deduzir c, de forma que $I(x)$ seja contínua em $x = 10.000$.

c) esboce o gráfico de $I(x)$ usando o valor de c calculado no item anterior.

d) existe algum contribuinte que paga R\$3.000,00 de imposto de renda? Justifique a sua resposta.

3) Um projétil é lançado em uma direção inclinada em relação à horizontal. Suponha que a velocidade inicial tenha componente horizontal v_1 e componente vertical v_2. Nessas circunstâncias e desprezando a resistência do ar, transcorridos t segundos, as distâncias horizontal $x(t)$ e vertical $y(t)$ percorridas pelo projétil são dadas, respectivamente, por $x(t) = v_1 t$ e $y(t) = v_2 t - (g/2)t^2$.

a) Usando a definição de derivada, calcule as velocidades instantâneas, na direção horizontal e vertical, em um instante $t = t_0$.

b) Usando o item anterior, determine, justificando a sua resposta, o instante em que o projétil atinge a sua altura máxima.

c) Usando o item anterior, determine o tempo total que o projétil permanece no ar.

d) Determine a distância entre o ponto de lançamento e o ponto em que o projétil atinge o solo.

4) Considere a função $f(x) = \dfrac{7.5x}{2x^2+13}$ definida para $x \in \mathbb{R}$. Observe que $f(1) = 1/2$.

a) Verifique que $f(x) - f(1) = \dfrac{r(x)}{q(x)}$, em que $r(x)$ e $q(x)$ são polinômios do segundo grau e $q(x) \geqslant 26\ \forall x$.

b) Fatorando o polinômio $r(x)$, determine uma constante K de forma que, se $0 \leqslant x \leqslant 2$, então $|f(x) - f(1)| \leqslant K|x-1|$.

c) Usando os itens anteriores, determine $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x-1| < \delta$, então $|f(x) - f(1)| < 0.1$.

d) Repita o item anterior substituindo 0.1 por um valor arbitrário $\epsilon > 0$.