Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo I

Prova 1 - 1.º/2003 - 28/04/2003

Nome: **Mat.:** / **Turma:**

Atenção: na questão 1, a seguir, decida se cada item é certo (C) ou errado (E), assinalando sua resposta a caneta no espaço indicado ao lado do item. O valor de cada item respondido é igual a $0,5$ ou a $-0,5$, conforme a resposta coincida ou não com o gabarito. Itens deixados em branco, com marcação rasurada ou com dupla marcação terão valor igual a zero.

1) Uma companhia de turismo cobra uma taxa de serviço fixa de R$ 50,00 para pacotes turísticos de valor menor ou igual a R$ 1.000,00. Para pacotes de valor superior a R$ 1.000,00 e menor ou igual a R$ 5.000,00, a companhia cobra uma taxa fixa de R$ 30,00 acrescida de 2% do valor do pacote. Para os demais pacotes, a taxa fixa é de R$ c, acrescida de 1% do valor do pacote. Indique por $T(x)$ o valor da taxa de serviço cobrada por um pacote turístico no valor de R$ x.

| C | E | a) O gráfico da função $T(x)$ contém o ponto $(3.000, 90)$.

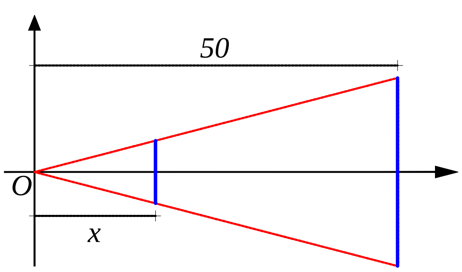
| C | E | b) A função $T(x)$ não é contínua no ponto $x = 1.000$.

| C | E | c) Se a função $T(x)$ é contínua no ponto $x = 5.000$, então $c = 80$.

| C | E | d) Para $c = 100$, não é possível encontrar um pacote turístico de valor R$ x_0 de modo que se tenha $T(x_0) = 140$.

| C | E | e) Se $c = 80$, então a função $T(x)$ é derivável no ponto $x = 5.000$.

2) Um foco de luz é colocado a uma distância de x m de um anteparo quadrado de lado igual a 1 m, como ilustra a figura abaixo, em que o foco de luz está na origem O, o eixo Ox é ortogonal ao anteparo e passa pelo seu centro. A figura ilustra ainda a sombra do anteparo projetada em uma parede situada a 50 m do foco de luz e paralela ao anteparo. É claro então que a área A da sombra depende da distância x do anteparo ao foco de luz, sendo assim uma função $A = A(x)$, com $x \in (0, 50)$.



a) Determine a função $A(x)$.

Resposta:

b) Usando as propriedades do limite, determine os pontos $x \in (0, 50)$ em que $A(x)$ é contínua.

Resposta:

c) Calcule os limites laterais $\lim\limits_{x \to 0^+} A(x)$ e $\lim\limits_{x \to 50^-} A(x)$.

Resposta:

d) Usando os itens anteriores e o Teorema do Valor Intermediário, justifique a seguinte afirmação: $\exists\, c \in (0, 50)$ tal que $A(c) = 250\ \text{m}^2$.

Resposta:

3) As figuras abaixo ilustram os gráficos da função $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, $x \in \mathbb{R}$, para alguns valores específicos das constantes a, b e c, em que $a \neq 0$.

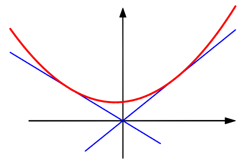


Figura 1

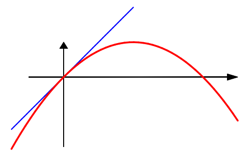


Figura 2

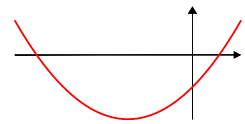


Figura 3

Observe que, na Figura 1, existem exatamente duas retas tangentes que passam pela origem. Na Figura 2, existe apenas uma e, na Figura 3, não existe reta tangente que passa pela origem. Esses casos estão relacionados com o sinal do quociente c/a, como segue-se dos itens abaixo.

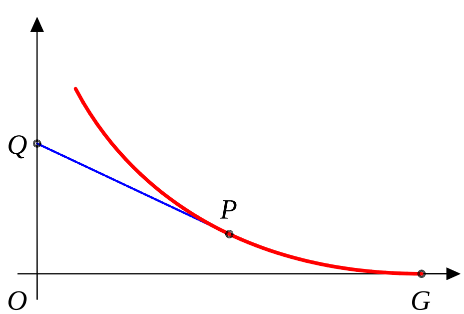
a) Usando as regras de derivação, determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em um ponto genérico $(x_0, f(x_0))$.

b) No caso em que $a = 2$ e $c = 2$, determine, caso existam, as retas tangentes ao gráfico de $f(x)$ que passam pela origem.

c) Repita o item anterior no caso em que $a = -1$ e $c = 0$.

d) Determine as condições que as constantes a e c devem satisfazer para que existam duas retas tangentes ao gráfico de $f(x)$ que passem pela origem.

4) Considere a situação em que um gato, inicialmente no ponto $G = (1, 0)$, descobre um rato situado na origem $O = (0, 0)$ e parte em sua perseguição. No mesmo instante, o rato percebe o gato e foge seguindo a direção positiva do eixo Oy, com velocidade igual à metade da do gato. A trajetória percorrida pelo gato para alcançar o rato é conhecida como *curva de perseguição*. Essa curva tem a seguinte propriedade: se o rato e o gato estiverem nas posições Q e P, ilustradas na figura abaixo, então a reta determinada pelos pontos P e Q é tangente à curva no ponto P. No exemplo considerado, pode-se mostrar que a curva de perseguição é o gráfico da função $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}\,(\frac{x}{3} - 1) + \frac{2}{3}$.



a) Calcule, pela definição, a derivada de $g(x) = \sqrt{x}$ em um ponto $x_0 \in (0, 1)$. Para isso, vale lembrar a igualdade $x - x_0 = (\sqrt{x} - \sqrt{x_0})\,(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})$.

b) Use o item anterior e as regras de derivação para calcular a derivada $f'(x_0)$.

c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.

d) Determine a posição $Q = (0, y_0)$ em que se encontra o rato no instante em que o gato estiver na posição $P = (1/4, f(1/4))$.

e) Calcule o espaço total percorrido pelo rato antes de ser apanhado pelo gato.